Université de M'sila.

Faculté de Technologie.

Matière : TP Méthodes Numériques.

TP N° 3 : Résolution de l'équation $f(x) = 0$
Méthode de Newton-Raphson.

$2^{ème}$ **Année ST (LMD) : (2019/2020).**

1 But :

Le problème est de trouver des valeurs approchées des solutions d'une équation $f(x) = 0$ où f est une fonction non linéaire, le plus souvent continue et dérivable, sur un intervalle I. dans le cas général, en utilisant des méthodes itératives, qui donnent une suite d'approximations successives s'approchant de la solution exacte.

2 Principales méthodes de résolutions approchées de $f(x) = 0$:

On considère un intervalle $[a, b]$ et une fonction f continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f(a) \times f(b) < 0$ et que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]a, b[$. [1]

2.1 Méthode de Newton :

La méthode de Newton est une méthode particulière de point fixe.
Elle est basée sur l'idée de construction d'une suite (x_n) qui converge vers α d'une manière quadratique. On construit la suite (x_n) définie par $x_0 \in [a, b]$ et la relation de récurrence suivante :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{1}$$

est convergente vers α de manière au moins quadratique. Où f' désigne la dérivée de la fonction f. La figure montre une illustration graphique.
Nous allons annoncer un résultat de convergence globale concernant la méthode de Newton pour des fonctions ayant une concavité déterminée (convexe ou concave).
Soit $f : [a, b] \in \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}_2$ vérifiant :

- $f(a) \times f(b) < 0$
- $f'(x) \neq 0, \forall x \in [a, b]$
- $f''(x) \neq 0, \forall x \in [a, b]$

Alors la suite (x_n) définie par :

$$\begin{cases} x_0 \in [a, b] \text{ tel que } f(x_0) \times f''(x_0) > 0 \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases} \tag{2}$$

est convergente vers α.
Implique qu'il existe un unique $\alpha \in [a, b]$ tel que $f(\alpha) = 0$, comme f'' est de signe constant, on distingue deux cas :

1. **Présence aux T.P.** : La présence aux T.P. est obligatoire. Toute absence devra être valablement justifiée et donnera lieu à un rattrapage.

(1) Si $f''(x) > 0, \forall x \in [a,b]$ (donc $f(x_0) > 0$), alors

(a) Si $f'(x) > 0, \forall x \in [a,b]$ on a :

$$\begin{cases} f(x) > 0, & \forall x \in]\alpha, b] \\ f(x) < 0, & \forall x \in [a, \alpha[\end{cases} \tag{3}$$

Comme $f(x_0) > 0$, alors $x_0 \in]\alpha, b]$. Par conséquent :
$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \Longrightarrow g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \geq 0, \forall x \in]\alpha, b]$
Donc g est croissante sur $]\alpha, b]$. D'où,
$\alpha < x_0 \Longrightarrow \alpha = g(\alpha) \leq g(x_0) = x_1 \Longrightarrow x_1 \in]\alpha, b]$
De plus $g(x_0) = x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} < x_0 \Longrightarrow \alpha \leq x_1 < x_0$
Par récurrence , on obtient :
$\alpha \leq ... \leq x_{n+1} \leq x_n \leq ... \leq x_2 \leq x_1 \leq x_0$
donc
$|x_{n+1} - \alpha| < |x_n - \alpha|$
C'est -à-dire que (x_n) est décroissante minorée par α. Donc (x_n) est convergente. Comme $x_{n+1} = g(x_n)$ et que g est continue, (x_n) converge vers l'unique point fixe α de g.

(b) Si $f'(x) < 0, \forall x \in [a,b]$, un raisonnement semblable au précédent implique que (x_n) est croissante majorée par α.
Donc (x_n) est convergente. Comme $x_{n+1} = g(x_n)$ et que g est continue, on obtient que (x_n) converge vers α l'unique point fixe de g.

(2) Si $f''(x) < 0, \forall x \in [a,b]$ (donc $f(x_0) < 0$). Alors le raisonnement précédent, avec f remplacée par $(-f)$, implique que la suite (x_n) est convergente vers α.

Test d'arrêt : Une fois construite la suite (x_n) convergeant vers α vérifiant $g(\alpha) = \alpha$, et une fois fixée la tolérance ϵ, nous cherchons le premier entier n_0 vérifiant : $|x_{n+1} - x_{n_0}| < \epsilon$.

Exemple :

Pour illustrer la méthode, recherchons le nombre positif x vérifiant $\cos(x) = x^3$. Reformulons la question pour introduire une fonction devant s'annuler : on recherche le zéro positif (la racine) de $f(x) = \cos(x) - x^3$. La dérivation donne $f'(x) = -\sin(x) - 3x^2$.
Comme pour tout x et $x^3 > 1$ pour $x > 1$, nous savons que notre zéro se situe entre 0 et 1. Nous essayons une valeur de départ de $x_0 = 0.5$.

$$\begin{array}{lcllr} x_1 & = & x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} & = 0.5 - \frac{\cos(0.5) - 0.5^3}{-\sin(0.5) - 3 \times 0.5^2} & \simeq 1.112\,141\,637\,1 \\ x_2 & = & x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} & \vdots & \simeq 0.909\,672\,693\,736 \\ x_3 & & \vdots & \vdots & \simeq 0.866\,263\,818\,209 \\ x_4 & & \vdots & \vdots & \simeq 0.865\,477\,135\,298 \\ x_5 & & \vdots & \vdots & \simeq 0.865\,474\,033\,111 \\ x_6 & & \vdots & \vdots & \simeq 0.865\,474\,033\,101 \\ x_7 & & \vdots & \vdots & \simeq 0.865\,474\,033\,102 \end{array}$$

Les 7 premiers chiffres de cette valeur coïncident avec les 7 premiers chiffres du vrai zéro.

3 Jeux de données :

On travaillera avec les fonctions et intervalles suivants :

1.
$$\begin{cases} f_1(x) = x - e^{\sin(x)} \\ \text{[a,b]}\in[1,10] \end{cases} \tag{4}$$

2.
$$\begin{cases} f_2(x) = x^3 - 12x^2 - 60x + 46 \\ \text{[a,b]}\in[0,1] \end{cases} \tag{5}$$

4 Travail à réaliser

Écrire les programmes sous MATLAB permettant d'appliquer la méthode en question aux fonctions précédemment définies. On prendra un test d'arrêt de la forme $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$, et on prendra soin de prévoir un compteur d'itérations qui permettra d'interrompre le traitement dès que N_{max} d'itérations sont effectuées sans que la précision ϵ ne soit atteinte. On pourra prendre par exemple $N_{max} = 50$. Les paramètres d'entrée de la fonction Newton seront x_0, ϵ, N_{max}, la fonction f et sa dérivée f' ; les résultats seront la racine obtenue ainsi que son image par la fonction f et le nombre d'itérations effectuées et l'erreur de calcul.

Choix de la valeur initiale :

On teste cette méthode pour la fonction f_1. On testera à chaque fois pour $\epsilon = 10^{-3}, 10^{-6}, 10^{-9}$ et 10^{-12}. On prendra comme valeur initiale : $x_0 = -10, x_0 = 1, x_0 = 2$ puis $x_0 = 10$. On teste cette méthode pour la fonction f_2. On testera à chaque fois pour $\epsilon = 10^{-3}, 10^{-6}, 10^{-9}$ et 10^{-12}. On prendra comme valeur initiale : $x_0 = -1, x_0 = 0.3, x_0 = 0.5$ puis $x_0 = 3$.

* Comparer les résultats dans les deux cas avec la méthode de Dichotomie.

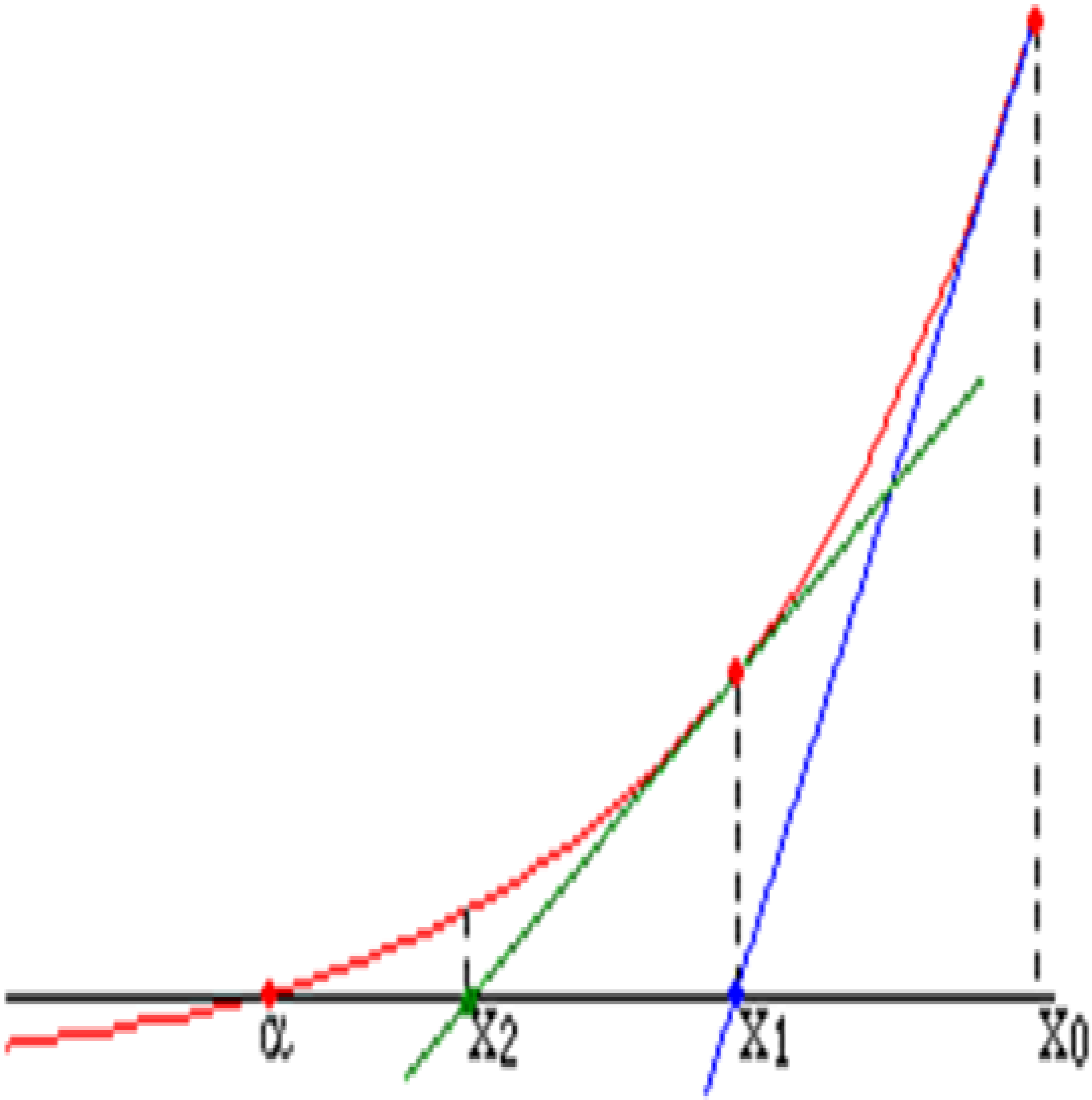

Fig.1. Illustration de la méthode de Newton.