RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ MOHAMED BOUDIAF -M'SILA-

FACULTÉ DE THECHNOLOGIE

N° d'ordre: ....

Cours

Mathématiques 02

Spécialité:

ST

Par:

S.Benmerrouche

Thème

LES INTÉGRALES SIMPLES

Année Universitaire : 2021/ 2022

Table des matières

Introduction

Chapitre 1

Chapitre 1: Les intégrales

1.1 Intégrale indéfinie

1.1.1 Généralités

Définition 1.1.1 *Soit f une fonction continue sur un intervalle I. On appelle Primitive de f toute foncion dérivable F vérifie $F' = f$ sur I.*

Exemple 1.1.1 *La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x$ a pour primitive F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^2$*

Proposition 1.1.1 *Soit f une fonction continue a pour primitive un fonction F, alors toute fonction $F + c$, où c est une constante, est une primitive à f*

Définition 1.1.2 *Soit f une fonction continue sur $I \subseteq \mathbb{R}$. On appelle **Intégrale indéfinie** de f l'ensemble de toutes les primitives de f.*

- L'intégrale indéfinie de f se note $\displaystyle\int f(x)dx$ où $\displaystyle\int$ est le signe d'intégration, $f(x)$ est l'intégrant, et dx est la notation differentielle.

A noter, x est la variable d'intégration. On peut écrire alors

$$\int f(x)dx = F(x) + c \text{ où } F \text{ est une primitive particulière et } c \in \mathbb{R}$$

Exemple 1.1.2 $\displaystyle\int 2xdx = x^2 + c$ *où* $c \in \mathbb{R}$

Remarque 1.1.1 *La variable x est muette, si on remplaçait le x par t, par exemble, cela ne changerait rien au calcul*

$$\int \cos x dx = \sin x + c, \text{ et } \int \cos t dt = \sin t + c, \; c \in \mathbb{R}$$

Properiétés Soit f, et g deux fonctions continues

1. $\int f'(x)dx = f(x) + c, \; c \in \mathbb{R}$
2. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$
3. $\int \left(f(x) + g(x)\right) dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
4. $\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$ pour tout scalaire λ

Les properiétés 3 et 4 donnent la linéarité de l'opérateur intégral.

1.1.2 Techniques de calcule de primitive

Intégration par identification

On regarde si l'on reconnait l'intégrant comme la dérivée d'une fonction (ou fonction composée) connue. Autrement dit

$$\text{Si } f(x) = F'(x) \text{ alors on a directement } \int f(x)dx = F(x) + c$$

Exemple 1.1.3 ***Exemple 2***

1)$\int \cos(x)\, dx = ?$
on a $(\sin(x))' = \cos(x)$
donc $\int \cos(x)\, dx = \int (\sin(x))'\, dx = \sin(x) + c; \; \forall c \in \mathbb{R}.$
2)$\int \cos(x^2)\, 2x dx = ?$
on a $(\sin(x^2))' = (\sin(u))' = u' \cos(u)$
donc $(\sin(x^2))' = 2x \cos(x^2)$ d'ou $\int \cos(x^2)\, 2x dx = \sin(x^2) + c$

Intégration par partie

Proposition 1.1.2 *Soient $f.g \in I \to \mathbb{R}$ deux fonctions de class C^1sur I on a:*

$$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx$$

Preuve. On a la dérivée d'un produit des fonctions $f(x)\, g(x)$

$(f(x)\, g(x))' = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$

$\int (f(x)\, g(x))'\, dx = \int f'(x)\, g(x)\, dx + \int f(x)\, g'(x)\, dx$

$\Longrightarrow \int f(x)\, g'(x)\ dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx$ ■

L'idée est de choisir les fonctions f'et g formant l'intégrant tel que f' et $f\ g'$soient est plus faciles à intégrer.

Exemple 1.1.4 $I = \int x \sin(x)\, dx$

On intégre par partie

nous posons

$f(x) = x$ $\qquad\qquad$ $f'(x) = 1$

$g'(x) = \sin(x)$ $\qquad\qquad$ $g(x) = -\cos(x)$

Alors

$I = -x\cos(x) + \int \cos(x)\, dx$

$I = -x\cos(x) + \sin(x) + c$ tel que c constante d'intégrale

Remarque 1.1.2 *La méthode de l'intégration par partie s'emploie fréquement dans le calcul des intégrales de la forme*

$$\int x^k \sin(x)\, dx, \quad \int x^k \cos(x)\, dx, \quad \int x^k e^{\alpha x} dx, \quad \int x^k \ln(x)\, dx.$$

Intégration par changement de variable

Si le calcul de l'intégrale $\int f(x)\, dx$ s'avére difficile.

On remplace le variable x par $\varphi(t)$ dérivable, et donc $dx = \varphi'(t)\, dt$ et on aura

$$\int f(x)\, dx = \int f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt$$

Exemple 1.1.5 $I = \int \sin(x)\cos(x)\,dx$

On pose $t = \sin(x) \qquad dt = \cos(x)\,dx$

$I = \int t dt = \frac{1}{2}t^2 + c = \frac{1}{2}\cos^2(x) + c$

Remarque 1.1.3 $\int \dfrac{g'(x)}{g(x)}dx = \int \dfrac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln|g(x) + c|$

En effet, on pose: $t = g(x) \Longrightarrow dt = g'(x)\,dx$

Le succès de l'intégration dépend de notre habilité à choisir le changement de variable approprié qui simplifiera les calculs.

1.1.3 Intégration des fonctions rationnelles

Définition 1.1.3 *Une fraction (ou fonction) rationnelle est une fonction de la forme* $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ *ou le numérateur* $p(x)$ *,et le dénominateur* $q(x)$ *. sont deux fonctions polynômes tel que* $(q(x) \neq 0)$

Intégration des fonctions rationnelles

Soit $f(x) = \dfrac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c}$ tel que $(\alpha, \beta, a, b, c) \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$.

On distingue trois cas

Premier cas: si $\triangle = b^2 - 4ac > 0$, le dénominateur $ax^2 + bx + c$ possède deux racines réelles distinctes $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

Alors $f(x)$ s'écrit à la forme:

$$f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{a((x - x_1)(x - x_2))}$$

Alors il existe deux nombres réelles $A, B \in \mathbb{R}$ tel que;

$f(x) = \dfrac{A}{(x - x_1)} + \dfrac{B}{(x - x_2)}$

alors

$$\begin{aligned} \int f(x)\,dx = & \int \tfrac{A}{(x-x_1)}dx + \int \tfrac{B}{(x-x_2)}dx \\ & = A\int \tfrac{dx}{(x-x_1)} + B\int \tfrac{dx}{(x-x_2)} \\ & = A\ln|x - x_1| + B\ln|x - x_2| + c \end{aligned}$$

Exemple 1.1.6 $\int \dfrac{2x+3}{x^2 - x - 2}dx = \int \dfrac{2x+3}{(x+1)(x-2)}dx = \int \dfrac{A}{(x+1)}dx + \int \dfrac{B}{(x-2)}dx$

On doit trouver les coefficients A, B

On détermine Aet B ,on multiplie par $(x - x_{1,2})$ puis on prend $x_{1,2}$

pour trouver A on multiple par $(x + 1)$ puis on prend $x_1 = -1$

on trouve $\dfrac{2x+3}{(x-2)} = A + \frac{B}{(x-2)}(x+1) \Longrightarrow A = \frac{2(-1)+3}{(-1-2)} = \frac{-1}{3}$

pour trouver B on multiplie $(x - 2)$ puis on prend $x_1 = 2$

On trouve $\frac{2x+3}{(x+1)} = \frac{B}{(x+1)}(x-2) + B \Longrightarrow A = \frac{2(2)+3}{(2+1)} = \frac{7}{3}$

$\int \frac{2x+3}{x^2-x-2}dx = -\frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x+1)} + \frac{7}{3}\int \frac{dx}{(x-2)}$

$\qquad = -\frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{7}{3}\ln|x-2| + c.$

Deuxieme cas: Si $\triangle = b^2 - 4ac = 0$. Dans ce cas le dénominateur $ax^2 + bx + c$ possède une racine double $x_0 \in \mathbb{R}$.

Alors $f(x)$ s'écrit à la forme

$$f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{a(x - x_0)^2}$$

Donc il existe deux nombres A et $B \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) = \frac{A}{(x - x_0)^2} + \frac{B}{(x - x_0)}$$

$$\int f(x)\,dx = A\int \frac{dx}{(x - x_0)^2} + B\int \frac{dx}{(x - x_0)} = -\frac{A}{(x - x_0)} + B\ln|x - x_0| + c$$

Exemple 1.1.7 *Calculer* $\int \dfrac{5x+6}{x^2+2x+1}dx$

$\int \dfrac{5x+6}{x^2+2x+1}dx = \int \dfrac{5x+6}{(x+1)^2}dx = \int \dfrac{A}{(x+1)^2}dx + \int \dfrac{B}{(x+1)}dx$

par des calcules, on trouve $A = 1, B = 5$

Alors $\int \dfrac{5x+6}{(x+1)^2}dx = \int \dfrac{1}{(x+1)^2}dx + \int \dfrac{5}{(x+1)}dx = -\dfrac{1}{(x+1)} + 5\ln|x+1| + c$

Troisiéme cas: Si $\triangle = b^2 - 4ac < 0$ Dans ce cas le dénomirateur $ax^2 + bx + c$ ne posséde pas des racines réelles.

Donc la fraction n a pas une fraction rationnelle mais a une fraction irrationnelle de la fome

$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)$

Exemple 1.1.8 $I = \int \frac{x+4}{x^2+2x+5}dx$

Dans un premier temps, on fait apparaître une fraction du type: $\dfrac{f'}{f}$

$I = \frac{1}{2}\int \dfrac{2x+8}{x^2+2x+5}dx = \frac{1}{2}\int \dfrac{2x+2}{x^2+2x+5}dx + 3\int \dfrac{dx}{x^2+2x+5}$

Alors $I = I_1 + I_2$

$I_1 = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+5\right|$

et

$I_2 = \int \dfrac{dx}{x^2+2x+5}$

on remarque que le dénominateur x^2+2x+5 ne possède pas des racines réelles car $\Delta = -16 < 0$.

alors on applique la formule

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)$$

on a $a=1$, $b=2$ et $c=5$ d'ou $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right) = (x+1)^2+4$

$I_2 = \int \dfrac{dx}{(x+1)^2+4} = \frac{1}{4}\int \dfrac{dx}{\left(\dfrac{(x+1)}{2}\right)^2+1}$

On pose $t = \frac{1}{2}(x+1) \Rightarrow dt = \dfrac{1}{2}dx \Rightarrow dx = 2dt$

alors $I_2 = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\arctan(t) = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}(x+1)\right)$

donc

$$I = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+5\right| + \frac{3}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}(x+1)\right) + c$$

Décomposition des fractions rationnelles en éléments simples

Proposition 1.1.3 *Une fraction rationnelle* $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ *se décompose en une partie entière en effectuant la dévision de* $p(x)$ *par* $q(x)$ *si le dégré de* p *est supérieure au dégré de* q*, et une partie des fractions partielles tel que: Chaque facteur irrédictible de dégrée 1 de la forme* $(ax+b)^k$ *au dénominateur engendre dans la décomposition* k *fractions partielles de la forme*

$$\frac{A_1}{(ax+b)} + \frac{A_1}{(ax+b)^2} + ... + \frac{A_1}{(ax+b)^k},\ \textit{avec } A_i \in \mathbb{R}$$

Chaque Chaque facteur irrédictible de dégrée 2 de la forme $(ax^2+bx+c)^k$ au dénominateur engendre dans la décomposition k fractions partielles de la forme

$$\frac{A_1x+B_1}{(ax^2+bx+c)}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+...+\frac{A_kx+B_k}{(ax^2+bx+c)^k},\ \text{avec } A_i,B_i\in\mathbb{R}$$

Exemple 1.1.9 $\dfrac{x}{x(x-1)^2}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{(x-1)}+\dfrac{c}{(x-1)^2}$

$$\frac{2x}{x^2+2x+1}=\frac{2x}{(x+1)^2}=\frac{a}{(x+1)}+\frac{b}{(x+1)^2}$$

$$\frac{x-3}{x(x^2+1)^2}=\frac{a}{x}+\frac{bx+c}{(x^2+1)}+\frac{dx+e}{(x^2+1)}$$

$$\begin{aligned}\frac{x^5}{(x^2-1)(x^2-4x+5)}&=\frac{x^5}{(x-1)(x+1)(x^2-4x+5)}\\&=x+4+\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x+1)}+\frac{Cx+D}{(x^2-4x+5)}\end{aligned}$$

A) Intégration des éléments simples $\frac{A}{(x-x_0)^n}$

Si $n=1$ alors; $\int\dfrac{A}{(x-x_0)^n}dx=A\ln|x-x_0|+c$

Si $n\geq 2$ alors; $\int\dfrac{A}{(x-x_0)^n}dx=\dfrac{A}{(n-1)(x-x_0)^{n-1}}+c$

B) Intégration d'élément simple $\dfrac{Bx+c}{(ax^2+bx+c)^n}$

$$\frac{Bx+c}{(ax^2+bx+c)^n}=\alpha\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^n}+\delta\frac{1}{(ax^2+bx+c)^n}$$

$$\int\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^n}=\int\frac{u'}{u^n}dx=\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}+c$$

$$\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$$

si $n=1\Rightarrow\int\dfrac{dx}{ax^2+bx+c}$ cette intégrale est de type

$$\frac{1}{a}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)}=\int\frac{dt}{t^2+1}=\arctan(t)+c$$

si $n\geq 2\Rightarrow\int\dfrac{dx}{(ax^2+bx+c)}$de type $I_n=\int\dfrac{du}{(1+u^2)^n}$

On intégre par partie permet de passer de I_k à I_{k-1}

Primitive de $p(x)e^{\alpha x}$

On veut calculer $\int p(x)e^{\alpha x}dx$, où p est un polynôme et α un scalaire.

On peut procéder par intégration par parties successives, si deg $p(x)$ n'est pas trop grand. Il est souvent préférable d'utiliser une méthode de coefficients indéterminés, et chercher une primitive de $p(x)\,e^{\alpha x}$ sous la forme $\Phi(x)\,e^{\alpha x}$avec deg $p(x) = \deg \Phi(x)$

Intégration des fonctions trigonomitriques

Intégrale de la forme $\int \sin(\alpha x)\cos(\beta x)\,dx$ L'intégrale qui est un produit de deux fonctions trigonométriques peuvent être transformés en un somme de fonctions

trigonométriques; on utilise des formules suivantes

$\sin(\alpha x)\cos(\beta x) = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x\right)$

$\sin(\alpha x)\sin(\beta x) = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x\right)$

$\cos(\alpha x)\cos(\beta x) = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)x + \cos(\alpha-\beta)x\right)$

Intégrale de la forme $\int \cos^p(x)\cos^q(x)\,dx$ **avec** $p, q \in \mathbb{N}$ **Premier cas**

Si p est impair $(p = 2k+1)\,(k \in \mathbb{N}^*)$

Dans ce cas on pose $y = \sin(x) \Rightarrow dy = \cos(x)\,dx$

$$\begin{aligned}
\int \cos^p(x)\sin^q(x)\,dx &= \int \cos^{(2k+1)}(x)\sin^q(x)\,dx \\
&= \int \left(\cos^2(x)\right)^k \cos(x)\sin^q(x)\,dx \\
&= \int \left(\cos^2(x)\right)^k \sin^q(x)\cos(x)\,dx \\
&= \int \left(1-\sin^2(x)\right)^k \sin^q(x)\cos(x)\,dx
\end{aligned}$$

Changement de variable: on pose $t = \sin(x) \Rightarrow dt = \cos(x)\,dx$

Alors

$\int \left(1-\sin^2(x)\right)^k \sin(x)\cos(x)\,dx = \int \left(1-t^2\right)t^q dt$

Deuxième cas

Si q impaire, $q = 2k+1$

$$\begin{aligned}
\int \cos^p(x)\sin^q(x)\,dx &= \int \cos^p(x)\sin^{(2k+1)}(x)\,dx \\
&= \int \cos^p(x)\left(\sin^2(x)\right)^k \sin(x)\,dx \\
&= \int \cos^p(x)\left(1-\cos^2(x)\right)^k \sin(x)\,dx
\end{aligned}$$

Changement de variable: on pose $t = \cos(x) \Rightarrow dt = -\sin(x)\,dx$

$\int \cos^p(x)\left(1-\cos^2(x)\right)^k \sin(x)\,dx = -\int t^p\left(1-t^2\right)^k dt$

Troisième cas

Si p et q sont pairs

On utilise les formules suivantes
$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$

$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$
alors

$$\begin{aligned} \int \cos^2(x)\sin^2(x)\,dx &= \int \tfrac{1}{2}(1 + \cos(2x))\,\tfrac{1}{2}(1 - \cos(2x))\,dx \\ &= \tfrac{1}{4}\int (1 - \cos^2(2x))\,dx \end{aligned}$$

On'a $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)) \Rightarrow \cos^2(2x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(4x))$

donc
$$\begin{aligned} \int \cos^2(x)\sin^2(x)\,dx &= \tfrac{1}{4}\int 1 - \tfrac{1}{2}(1 + \cos(4x))\,dx \\ &= \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{x}{2} - \tfrac{1}{8}\sin(4x)\right) + c \end{aligned}$$

Transformation en une intégrale de fractions rationnelles Changement de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

Soit une intégrale de la forme $\int f(\sin(x), \cos(x))\,dx$;En effectuant le changement de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$,

les fonctions $\sin(x)$; $\cos(x)$;s'expriment alors sous la forme de fonctions rationnelles

Avec $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ on'a

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2},\quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \tan(x) = \frac{2t}{1-t^2},\quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Exemple 1.1.10 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{2t} = \ln|t| + c = \ln\left|\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right| + c,\ c \in \mathbb{R}$

Les règles de Bioche On note $\Psi(x) = f(x)\,dx$ on a alors

$\Psi(-x) = f(-x)\,d(-x) = -f(-x)$ et

$\Psi(\pi - x) = f(\pi - x)\,d(\pi - x) = -f(\pi - x)\,dx$

si $\Psi(-x) = \Psi(x)$ alors on effectue le changement de variable $u = \cos(x)$ (i.e f est pair) si $\Psi(\pi - x) = \Psi(x)$ alors on effectue le changement de variable $u = \sin(x)$

si $\Psi(\pi + x) = \Psi(x)$ alors on effectue le changement de variable $u = \tan(x)$.

Exemple 1.1.11 $\displaystyle\int \frac{\cos x}{2 - \cos^2 x} dx$

On note $\Psi(x) = \dfrac{\cos x}{2 - \cos^2 x} dx$.Comme $\Psi(\pi - x) = \dfrac{\cos(\pi - x)}{2 - \cos^2(\pi - x)} d(\pi - x) = \dfrac{-\cos(x)}{2 - \cos^2(x)} - d(x) = \Psi(x)$ alors on effectue le changement de variable $u = \sin(x)$ pour lequel $du = \cos x dx$. Ainsi

$\displaystyle\int \frac{\cos x}{2 - \cos^2 x} dx = \int \frac{\cos x}{2 - \left(1 - \sin^2 x\right)} dx = \int \frac{du}{1 + u^2} = \arctan(u) + c = \arctan(\sin x) + c,$ $c \in \mathbb{R}$

1.2 Intégrale définie

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, est soient $a, b \in I$,alors on pose ;

$\int_a^b f(x)\, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

pour que ce nombre représente l'aire comprise entre le graphe de f .

L'axe on,et les droites verticales $x = a, y = b$

Exemple

$\int_0^{\frac{3}{2}} x^2 dx = \left[\dfrac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{3}{2}} = \frac{9}{8} - 0 = \frac{9}{8}$

1.2.1 Intégrale de Riemann

Dans la présentation de l'intégrale de Remann, les fonctions en escalier jouent un role primordial. Nous commençons par donner leurs propriétés et nous définissions leurs intégrales.

Fonctions en escalier

Définition 1.2.1 *On appelle* ***subdivision*** *de l'intérvalle compact (i.e fermé et borné)* $[a, b]$ *de* $\mathbb{R}$ *un ensemble fini de points*

$x_0, x_1, x_2, ...x_n$ tel que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$$

On remarque que $x_i - x_{i-1} > 0, \forall i = 1, ..., n$ .On appelle pas de la subdivision le réel $\max_{1\leq i\leq n}(x_i - x_{i-1})$

Définition 2-2

Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dite *en escalier* .S'il existe une subdivision$\{x_0 \ ,x_1, x_2, ..., x_n\}$de $[a,b]$ tel que f soit constant

sur chaque intervalle$]x_{i-1}, x_i[\,, i = 1, 2, ...n.$

Une fonction est dite en escalier sur $\mathbb{R}$ s'il existe un intervalle $[a,b]$ .tel que f soit nulle en dehors de $[a,b]$ et en escalier sur $[a,b]$

Exemple

1) la foction f définie sur $[0,1]$ par;

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{c} 0 si x = 0 \\ \frac{1}{2} si x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\\ 3 si x = \frac{1}{2} \\ 1 si x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[\end{array} \right|$$

Alors f est une fonction escalier sur $[0,1]$

2) La fonction constante sur $[a,b]$,c'est une fonction escalier sur $[a,b]$.

Intégrale des fonctions en escalier

Définition

Soit f une fonction en escalier sur $[a,b]$.

$f(x) = c_1 \qquad x \in]x_{i-1}, x_i[\,, i = 1, 2, ...n$

On appelle intégrale de f sur $[a,b]$, le nombre

$$I(f) = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} c_1(x_1 - x_0) + c_2(x_2 - x_1) + ... + c_n(x_n - x_{n-1})$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} c_i (x_i - x_{i-1})$$

S_n est appelle la somme de Riemann de f sur $[a,b]$,et on note ce nombre $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$

Remarque

1) Le nombre $I(f)$ ne dépend que de f et nom de la subdivision

2) $I(f)$ ne dépend pas de x.

3) Soit f une fonctionen escalier sur $[a,b]$ et $f \geq 0$ alors

$\int_a^b f(x)\,dx = 0 \nRightarrow f = 0$

4) $\int_a^b f(x)\,dx$ ne dépend pas des valeurs prises pas f aux points de la subdivisions.

Exemple

1)$f : [a,b] \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = c$

alors :$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,c$

2) considérons la fonction f définie sur $[0,1]$ par

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{c} 0 si x = 0 \\ \frac{1}{2} si x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\\ 3 si x = \frac{1}{2} \\ 1 si x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[\end{array} \right|$$

alors $\int_0^1 f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 0\right) + 1\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

Propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier

proposition 1 (linéarité de l'intégrale)

Soient f et g deux fonctions en escalier sur $[a,b]$ et λ une constante réelle donnée .Alors, on a

1)$\int_a^b (\lambda f)(x)\,dx = \lambda \int_a^b (f)(x)\,dx$

2) $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

proposition 2 (croissance de l'intégrale)

Soient f et g deux fonctions en escalier sur $[a,b]$; alors on a

1) $\forall x \in [a,b], f(x) \geq 0 \implies \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

2)$\forall x \in [a,b], f(x) \geq g(x) \implies \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$

3) $\forall u \in [a,b] : \int_u^u f(x)\,dx = 0 \nRightarrow f = 0$

4)$\forall u,v \in [a,b] : u\langle v, \int_u^v f(x)\,dx = -\int_v^u f(x)\,dx$

5) Si c$\in\ ]a,b[$ on a alors: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

Chapitre 2

Chapitre 2: Les équations différentielles

LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES ORDINAIRES $(E.D.O)$

2.1 Définitions et notations

Définition 2.1.1 *Une équations différentielles ordinaires, notée* $(E.D.O)$*, d'ordre* n *est une relation entre la variable reélle* x*, une fonction inconnue* $x \mapsto y(x)$ *et ses dérivées* $y', y'', ..., y^{(n)}$ *au point* x *définie par:*

$$F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0$$

tel que: $y' = \dfrac{dy}{dx}$ et $y^{(n)} = \dfrac{d^n y}{dx^n}$

Si $n = 1$, la fonction $F\left(x, y, y'\right) = 0$ s'appelle **équation différentielle du premier ordre.**

Si $n = 2$, la fonction $F\left(x, y, y', y''\right) = 0$ s'appellé **équation différentielle du deuxiéme ordre**.

$$\begin{aligned} y'(x) - x = 0 : &\quad \text{équation différentielle d'ordre1.} \\ y''(x) - y'(x) = 2x\sin(x) : &\quad \text{équation différentielle d'ordre2.} \\ y^{(4)}(x) + 2y''(x) - y(x) = x : &\quad \text{équation différentielle d'ordre4} \end{aligned}$$

Notation: On note y au lieu $y(x)$, et y'au lieu $y'(x)$

Par exemple: $y' = \cos x$, signifie "$y'(x) = \cos x$"

2.2 Equations différentielles du premier ordre

Définition: une équation de la forme $F(x, y, y') = 0$ où y qui est en fonction de x est l'inconnu, s'appelle équation différentielle du premier ordre.

2.2.1 Equaions différentielles séparables (E.D.S)

Elle sont de la forme

$$y' f(y) = g(x)$$

où f et g sont des fonctions données dont on connaît des primitives F et G, on a

$$\int y' f(y)\, dy = \int g(x)\, dx, (y' = \tfrac{dy}{dx}) \implies F(y) = G(x) + C \quad où C \in \mathbb{R}.$$

Exemple 2.2.1 1. ***Exemple 2.2.2*** *Résoudre l'équation:* $y' = x^2 + 1$

on a $y\prime = x^2 + 1 \implies \int y' dx = \int (x^2+1) dx$

$\implies \int dy = \int (x^2+1) dx$

$\implies y = \frac{x^3}{3} + x + C, \quad \forall C \in \mathbb{R}.$

2 Intégrer l'équation suivante: $y' = xy$

on a $y\prime = xy \implies \dfrac{y'}{y} = x$

$\implies \int \frac{1}{y} dy = \int x dx$

$\implies \ln|y| = \frac{x^2}{2} + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Ainsi, toute solution non nulle est de la forme

$$y(x) = Ke^{\frac{x^2}{2}}, \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}^*.$$

2.2.2 Equations différentielles homogénes(E.D.H)

Elles sont de la forme

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

Pour résoudre cette équation, on pose: $t = \frac{y}{x}, (y = xt \text{ et } y' = t'x + t)$, où t est une fonction de x, on obtient ainsi une équation différentielle à variables séparables.

Exemple 2.2.3 $xy' = x + y$

$xy' = x + y$ est une équation homogène, car elle peut s'écrire: $y' = 1 + \frac{y}{x}$
En posant: $\dfrac{y}{x} = t, (y = xt)$,on obtient l'équation $t'x + t = 1 + t$
d'oú $t' = \frac{1}{x}$(E.D.S)
la solution générale de l'équation proposée est: $t = \ln|x| + C, \quad C \in \mathbb{R}$
et la solution générale de l'équation homogène est

$$y = x \ln|x| + K, \quad K \in \mathbb{R}.$$

2.2.3 Equations différentielles linéaires(E.D.L)

Elles sont de la forme:

$$y' + f(x)\, y = g(x)\,. \tag{(E)}$$

où f et g sont des fonctions données,
L'équation E est dite homogéne (E.H) ou sans second membre (E.S.S.M) si $g = 0$, c'est à dire:

$$y' + f(x)\, y = 0 \tag{(E$_0$)}$$

La solution générale de l'équation complête E est de la forme:

$$y_g = y_0 + y_p$$

Où y_p est une solution particulière de E et y_0 est la solution générale de E_0

Méthode de variation de la constante

La Méthode de variation de la constante est une méthode pour déterminer les solutions d'une équation différentielle avec second membre connaissant la solution de l'équation homogène.

Si y_0 est une solution de l'équation homogène, on cherche une solution particulière sous la forme $y(x) = C(x)y_0(x)$

Exemple: soit à résoudre:

$$xy^{'} - y = x^2e^x, \text{ sur }]0, +\infty[.$$

1. On résoudre l'équation homogène $xy^{'} - y = 0$

$$\begin{aligned} x\tfrac{dy}{dx} - y = 0 \quad &\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \\ &\Rightarrow \ln y = \ln x + \ln C \\ &\Rightarrow y = Cx. \end{aligned}$$

2. On cherche une solution particulière sous la forme $y = C(x)x$, alors $y' = C'(x).x + C(x)$, on remplace dans l'equation complète, on trouve

$$C'(x)x^2 + C(x)x - C(x)x = x^2e^x \Leftrightarrow C^{'}(x) = e^x$$

On en déduit que $C(x) = e^x + \lambda$, et donc

$$y = x(e^x + \lambda)$$

2.2.4 Equation différentielle de Bernoulli

On appelle équation de Bernoulli toute équation différentielle de la forme

$$y' + yf(x) = y^n g(x)$$

si $n = 0$, équation linéaire complète.

si $n = 1$, équation linéaire sans second membre.

$n \neq 0$, $n \neq 1$, $y \neq 0$; on pose $z = y^{1-n}$. On aura, $\frac{1}{1-n}z' + zf(x) = g(x)$. On est dans le cas linéaire.

Exemple 2.2.4 *Intégrer l'équation* $y' + 2y - (x+1)\sqrt{y} = 0$

On pose $z = y^{1-\frac{1}{2}} = \sqrt{y}$

L'équation devient $2z' + 2z = x + 1$.(E.D.L)

2.3 EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU SECOND ORDRE

2.4 Généralités

On appelle équation différentielle du second ordre toute relation de la forme

$F\left(x, y, y', y''\right) = 0$ entre la variable x et la fonction $y(x)$ et ses deux dérivées premières.

Exemple 2.4.1 $y'' + 2y' + y = 0$; $y'' + 4y' + 3y = e^{-2x}$

2.5 Equations différentielles du second ordre incomplètes (ne contenant pas de y):

Elle sont de la forme

$$F(x, y', y'') = 0$$

pour résoudre cette équation on pose: $y' = t$, l'équation devient alors:

$F(x, t, t') = 0$ (E,D, du premier ordre).

Exemple 2.5.1 $xy'' + 2y' = 0, ...(E)$

On pose: $y' = t \implies xt' + 2t = 0$ (E,D du premier ordre séparable)

$$\begin{aligned}
&\implies x\tfrac{dt}{dx} = -2t \\
&\implies \textstyle\int \frac{dt}{t} = -2\int \frac{dx}{x} \\
&\implies \ln|t| = -2\ln|x| + \ln|C| \\
&\implies \ln|t| = \ln\tfrac{C}{x^2} \\
&\implies t = \tfrac{C}{x^2} = y'
\end{aligned}$$

donc

$$y = \frac{-C}{x} + k, k \in \mathbb{R}$$

est une solution de l'équation incomplète (E).

2.5.1 Equations différentielles linéaires du deuxième ordre à coefficients constants

Elle sont de la forme:

$$ay'' + by' + cy = f(x) \qquad ((\text{EC}))$$

Où a, b et c sont des coefficients constants, et $f(x)$ le second membre. A cette équation nous associons l'équation sans second membre$(E.S.S.M)$ ou homogène:

$$ay'' + by' + cy = 0, ...(E_0)$$

La solution générale y de (E) est la somme de la solution générale y_H de (E_0) et d'une solution particuliere y_P de (E) :

$$y = y_H + y_P$$

Résolution:

a) Recherche de y_H solution générale de (E_0) : $ay'' + by' + cy = 0$.

Nous avons trouvé précédemment, les solutions suivant le signe du discriminant de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$. La solution générale est $y_H = C_1y_1 + C_2y_2$ avec les constantes C_1 et C_2 et les deux solutions linéairement indépendantes y_1 et y_2 de (E_0).

On a 3 cas:

1) Si $\Delta > 0$: L'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes $r_1$et r_2 $\left(r_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a},\ r_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$

soit $y_1 = e^{r_1x}$ et $y_2 = e^{r_2x}$; la solution générale de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$ est

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \quad , (C_1, C_2 \ \in \mathbb{R})$$

2) Si $\Delta = 0$: L'équation caractéristique admet une racine double $r = -\frac{b}{2a}$

La solution générale de l'équation homogène est de la forme:

$$y = C_1 x e^{rx} + C_2 e^{rx} = (C_1 x + C_2)\, e^{rx} \quad , (C_1, C_2 \ \in \mathbb{R})$$

3) Si $\Delta < 0$: $r_1$et r_2 sont complexes, $r_1 = \alpha + \beta i$ et $r_2 = \alpha - \beta i$

La solution générale de l'équation homogène est de la forme:

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

Exemple 2.5.2 *Résoudre les équations différentielles suivantes*

1)$y'' + y' - 2y = 0$, 2)$y'' + 2y' + y = 0$ 3)$y'' + y = 0$

1) $y'' + y' - 2y = 0$

l'équation caractéristique: $r^2 + r - 2 = 0$ admet deux racines réelles distinctes $r_1 = 1$ et $r_2 = -2$

Donc la solution générale de l'équation (1) est:

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}, ...(C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

2) $y'' + 2y' + y = 0$

L'équation caractéristique: $r^2 + 2r + 1 = 0$ admet une racine double $r = -1$

donc la solution générale de l'équation (2) est

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} = e^{-x}\,(C_1 + C_2 x)$$

3) $y'' + y = 0$

L'équation caractéristique: $r^2 + 1 = 0$ admet deux racines complexes $r_1 = i$ et $r_2 = -i$

donc la solution générale de l'équation (2) est

$$y = (C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)), ...(C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

Plan

............................Résoudre l'équation: $ay'' + by\prime + cy = 0$

$$\Downarrow$$

E.C: $ar^2 + br + c = 0$

$$\swarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \searrow$$

$$\Delta > 0 \qquad\qquad \Delta = 0 \qquad\qquad \Delta < 0$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \quad , \quad y = (C_1 x + C_2)\, e^{rx} \quad y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

b) Recherche la solution particulière y_P de E

$$ay^{''} + by' + cy = f\,(x)\,, ...(E)$$

b.1) Cas où $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$, où P_n est un polynome de degré n et $\alpha \in \mathbb{R}$.
Alors il existe une solution particulière de E de la forme :
$i).y_P = e^{\alpha x} Q_n(x)$ si α n'est pas une racine de $(E_0).(\alpha \neq r_1$ et $\alpha \neq r_2)$
$ii).y_P = x e^{\alpha x} Q_n(x)$ si α est une racine de $(E_0).(\alpha = r_1$ ou $\alpha = r_2)$
$iii).y_P = x^2 e^{\alpha x} Q_n(x)$ si α est une racine double de $(E_0).(\alpha = r_1 = r_2)$

Où Q_n est un polynôme de meme dégrée de P_n

Exemple 2.5.3 *Résoudre l'équation suivante: $y'' + 2y' + 4y = xe^x$*

$f(x) = xe^x$, $P_1(x) = x$, donc: $Q_1(x) = ax + b$

$$y_G = y_H + y_P$$

1) On comence par résoudre l'équation homogène $y'' + 2y' + 4y = 0$

$E.C$: $r^2 + 2r + 4 = 0$ admet deux solution: $r_1 = -1 + \sqrt{3}i$ et $r_2 = -1 - \sqrt{3}i$

Donc la solution générale de $y'' + 2y' + 4y = 0$ est

$$y_H = e^{-x}(C_1 \cos \sqrt{3}x + C_2 \sin \sqrt{3}x)$$

2) Calcul de y_P :

$f(x) = xe^x$, $P_1(x) = x$, donc: $Q_1(x) = ax + b$

$\alpha = 1$ (n'est pas une racine de $E.C$), on va cherche une solution particuliere sous la forme: $y_P = e^x(ax + b)$ .En dérivant, on trouve

$$y'_P = e^x(ax + b + a),\ y''_P = e^x(ax + b + 2a)$$

et donc a et b sont solutions du système:

$$\begin{cases} 7ax = x \\ 4a + 7b = 0 \end{cases}$$

On résoudre ce système, et on trouve $a = \frac{1}{7}$ et $b = \frac{-4}{49}$

Donc

$$y_P = \frac{1}{7}x - \frac{4}{49}$$

Finalement, la solution générale de l'équation avec second membre est

$$y_G = e^{-x}(C_1 \cos \sqrt{3}x + C_2\sqrt{3}x) + \frac{1}{7}x - \frac{4}{49}$$

b.2) cas où $f(x) = P_n(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + ... + A_nx^n$

Alors il existe une solution particulière de E de la forme

$i.y_P = C_0 + C_1x + C_2x^2 + ... + C_nx^n$ si $c \neq 0$.

$ii.y_P = x(C_0 + C_1x + C_2x^2 + ... + C_nx^n\ )$ si $c = 0, b \neq 0, a \neq 0$

Sinon: $y_P = x^2(C_0 + C_1x + C_2x^2 + ... + C_nx^n\ )$

Exemple 2.5.4 *Résoudre l'équation suivante:* $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 5x + 2$

$f(x) = 2x^2 - 5x + 2 = P_2(x)$

$$y_G = y_H + y_P$$

1) On comonce par résoudre l'équation homogène $y'' - 3y' + 2y = 0$

$E.C$: $r^2 - 3r + 2 = 0$ admet deux solution $r_1 = 1, r_2 = 2$

Donc la solution générale de $y'' - 3y' + 2y = 0$ est de la forme:

$$y_H = C_1 e^x + C_2 e^{2^x}$$

2) Calcul de y_P :

$f(x) = 2x^2 - 5x + 2$ et $c = 2$ ($c \neq 0$), on va cherche une solution particuliere sous la forme: $y_P = C_0 + C_1 x + C_2 x^2$.d'aprés les calcules on trouve

$$y_p = \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{2}x + x^2$$

La solution générale de l'équation $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 5x + 2$ est

$$y_G = C_1 e^x + C_2 e^{2^x} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}x + x^2$$

Méthode générale

Méthode de variation des constantes

Nous devons résoudre une équation différentielle de la forme

$$ay^{''} + by^{'} + cy = f(x) \qquad \text{avec } a \neq 0$$

Lorsque le second membre n'a pas l'une des formes indiquées précédemment, on emploie la méthode dite de variation des constantes.

Soit y_1 et y_2 deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène associée

$$ay^{''} + by^{'} + cy = 0$$

Comme pour les équations différentielles linéaires du premier ordre, on suppose que les constantes C sont des fonctions de x dérivables.

On cherche une solution particulière de l'équation complète sous la forme

$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$ avec $C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0$

Il reste alors $y' = C_1y_1' + C_2y_2'$ et en dérivant

$$y'' = C_1'y_1' + C_2'y_2' + C_1y_1'' + C_2y_2''$$

En reportant dans l'équation complète en tenant compte du fait que y_1 et y_2 sont solutions de l'équation incomplète, aprés simplification il reste

$$a(c_1'y_1' + c_2'y_2') = f(x)$$

D'où le système qui détermine c_1'et c_2'

$$\begin{cases} c_1'y_1' + c_2'y_2' = \dfrac{f(x)}{a} \\ c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0 \end{cases}$$

Exemple: Résoudre l'équation suivante $y'' + y = \cos(x)$

1) l'équation homogène est $y'' + y = 0$

L'équation caractéristique est $r^2 + 1 = 0$:

$$\Delta = -4 < 0 \Rightarrow \pm i$$

La solution générale de l'équation homogène est

$$y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$$

2) On cherche la solution particulière sous la forme $C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)$ avec $y_1(x) = \cos(x)$, et $y_2(x) = \sin(x)$

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x) \\ C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -C_1'(x)\sin(x) + C_2'(x)\cos(x) = \cos(x) \\ C_1'(x)\cos(x) + C_2'(x)\sin(x) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow C_1'(x) = -\sin(x)\cos(x) = -\dfrac{\sin(2x)}{2} \ \Rightarrow C_1(x) = \dfrac{\cos(2x)}{4}$

$C_2'(x) = \cos^2(x) = \dfrac{\cos(2x)+1}{2} \Longrightarrow C_2(x) = \dfrac{\sin(2x)}{4} + \dfrac{x}{2}$

une solution particulière est donc

$$y_P(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) = \frac{\cos(2x)\cos(x) + \sin(2x)\sin(x)}{4} + \frac{x\sin(x)}{2} = \frac{\cos(x)}{4} + \frac{x\sin(x)}{2}$$

La solution générale de l'équation est

$$y(x) = C_1(x)\cos(x) + C_2(x)\sin(x) + \frac{\cos(x)}{4} = \frac{x\sin(x)}{2}$$

Chapitre 3

Chapitre 1: Les Matrices

3.1 Généralités

3.1.1 Définition et notations

Définition 3.1.1 *On appelle matrice à coefficients dans un corps* $\Bbbk$ *la donnée d'un nombre* p *de colonnes, un nombre* n *de lignes, et un ensemble de* np *éléments de* $\Bbbk$ *rangés dans un tableau de* n *lignes et* p *colonnes.*

On numérote les coefficients avec deux indices: le premier indique le numéros de la ligne (on les numérote de haut vers le bas), le second est le numeros de la colonne (on les numérote de gauche vers la droite). Ainsi, le coefficient a_{ij} est le coefficient se situe à l'intersection de la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne. On note alors $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ la matrice.

Taille d'une matrice: Un matrice de n lignes et p colonnes, noté $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$, est dite de taille $n\times p$ (lire "n croix p" en respectant l'ordre de lecture).

Exemple 3.1.1 *Si* $A=(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq 3\\ 1\leq j\leq 2}}=\begin{pmatrix}1&0\\-2&5\\3&6\end{pmatrix}$ *alors* $a_{11}=1$, $a_{21}=-2$, $a_{31}=3$, $a_{32}=6$.

$$(i+2j)_{\substack{1\leq i\leq 2\\ 1\leq j\leq 3}}=\begin{pmatrix}3&5&7\\4&6&8\end{pmatrix}$$

Notation 3.1.1 *On note* $M_{n,p}(\Bbbk)$ *l'ensemble des matrices de taille* $n\times p$ *à coefficients dans* $\Bbbk$.

3.1.2 Matrices particulières

Matrices colonnes

Ce sont les matrices à une colonne: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

Matrices lignes

Ce sont les matrices à une ligne: $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \end{pmatrix}$

Matrices carrées

Ce sont les matrices qui ont le même nombre de lognes et de colonnes. Ce nombre de lignes et de colonnes s'appelle l'ordre de la matrice. Les coefficients ayant même indices de ligne et de colonne (ce sont les élément notés a_{ii}) s'appellent les coefficients diagonaux.

Par exemple $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & 5 \\ 7 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 3. Les éléments diagonaux sont 2, 3 et -4.

On note $M_n(\mathbb{k})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{k}$.

Matrices triangulaires inférieures

Une matrice carrée $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$ est dite triangulaire inférieure si $a_{ij} = 0$ pour tout $j > i$, c'est à dire tous ses coefficients strictement au dessus de la digonale sont nuls

Exemple 3.1.2 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Matrices triangulaires supérieures

Une matrice carrée $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$ est dite triangulaire supérieure si $a_{ij} = 0$ pour tout $i > j$, c'est à dire tous ses coefficients strictement au dessous de la digonale sont nuls

Exemple 3.1.3 $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Matrices diagonales

Ce sont les matrices carrées à la fois triangulaires supérieures et triangulaires inférieures. Les seuls coefficients pouvant être non nuls sont donc ceux de la diagonale.

On note $Diag(a_1, a_2, ..., a_n)$ la matrice diagonale dont les coefficients sont $(a_1, a_2, ..., a_n)$.

Exemple 3.1.4 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Matrices scalaires

Ce sont les matrices diagonales dont tous ses coefficients diagonaux sont égaux.

Exemple 3.1.5 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}$

Matrice identité

C'est la matrice scalaire dont tous ses coefficients diagonaux valent 1. On note I_n la matrice identité d'ordre n.

Exemple 3.1.6 $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matrice nulle

c'est la matrice, non nécessairement carré, dont tous les coefficients sont nuls. On note par $0_{n,p}$ la matrice nulle de n lignes et p colonnes. Par exemple $0_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3.2 Calcul matriciel

3.2.1 Egalité des matrices

Deux matrices $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq q}}$ sont égales, ce qu'on note $A = B$ si

- elles ont même nombre de lignes $(n = m)$.

- elles ont même nombre de colonnes $(p = q)$.

- Les coefficients à la même position sont égaux $(a_{ij} = b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$.

3.2.2 Addition des matrices

Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ deux matrices de $M_{n,p}(\mathbb{k})$, la somme $A+B$ de A et B est la matrice de n lignes et p colonnes dont chaque coefficient est somme des coefficients de même position de A et de B. Alors $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$.

Proposition 3.2.1 *Si A, B et C trois matrices de $M_{n,p}(\mathbb{k})$.*

- L'addition est associative: $(A + B) + C = A + (B + C)$.

- la matrice nulle à n ligne et p colonnes est un élément neutre pour l'addition: $A+0_{n,p} = A$.

- Toute matrice admet un symétrique par rapport la lois de l'addition: Si $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$en posant $-A = (-a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ on a $A + (-A) = 0_{n,p}$.

- L'addition est commutative: $A + B = B + A$.

Remarque 3.2.1 $A - B = A + (-B)$

3.2.3 Produit d'une matrice par un scalaire de $\mathbb{k}$

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ une matrice de $M_{n,p}(\mathbb{k})$, et $\lambda \in \mathbb{k}$. Le produit (externe) de λ par A est la matrice

$$\lambda A = \lambda\,(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} = (\lambda a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}.$$

Exemple 3.2.1 $3\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 12 \\ -6 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$

Proposition 3.2.2 *Soient α, β deux éléments de $\Bbbk$, A et B deux matrices de $M_{n,p}(\Bbbk)$. alors*

1. $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$
2. $(\alpha+\beta)\, A = \alpha A + \beta A$
3. $(\alpha\beta)\, A = \alpha(\beta A)$
4. $1A = A$.

1. $0.A = 0_{n,p}$
2. $(-1)\,.A = -A$

3.2.4 Produit de deux matrices

Produit d'une matrice ligne par une matrice colonne

Soit $A = (a_1, a_2, ..., a_p)$ une matrice ligne de $M_{1,p}(\Bbbk)$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$ une matrice colonne de $M_{p,1}(\Bbbk)$, **noter que A a autant de colonnes que B a de lignes.** Le produit de A par B, noté AB, est l'élément de $\Bbbk$ $AB = (a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_pb_p)$.

Exemple 3.2.2 $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = (2\times 1) + (3\times 4) + (-2\times 3) = (8)$

Produit d'une matrice par une matrice colonne

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}$ une matrice de $M_{n,p}(\Bbbk)$, et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$ une matrice colonne de $M_{p,1}(\Bbbk)$.

Noter que A a autant de colonnes que B a de lignes. Le produit de A par B, noté AB, est la matrice colonne de n lignes dont la ligne n°i est le coefficien du produit de la ligne n°i de A avec la colonne B et ce pour chaque $i = 1, 2, ..., n$.

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & ... & a_{ip} \\ \vdots & ... & \vdots \\ a_{n1} & ... & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + ...a_{1i}b_i + ... + a_{1p}b_p \\ \vdots \\ a_{i1}b_1 + ... + a_{ii}b_i + ... + a_{ip}b_p \\ \vdots \\ a_{n1}b_1 + ... + a_{ni}b_i + ... + a_{np}b_p \end{pmatrix}.$$

Exemple 3.2.3 $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 2 + 2 \times 3 + 0 \times 1 \\ -2 \times 2 + 1 \times 3 + 4 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix}.$

Produit d'une matrice par une matrice

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ une matrice de $M_{n,p}(\mathbb{k})$, et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$ une matrice de $M_{p,q}(\mathbb{k})$.

Noter que A a autant de colonnes que B a de lignes.

Le produit de A par B, noter AB, est la matrice de n lignes et q colonnes ($AB \in M_{n,q}(\mathbb{k})$) dont la colonne n°$j$ est le produit de A par la colonne n°j de B et ce pour chaque numéros de colonne $j = 1, 2, ..., q$

Autrement dit, pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$ et tout $j \in \{1, 2, ..., q\}$ le coefficient d'indice ij de AB est

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}.$$

Exemple 3.2.4 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 4 + 0 \times 2 + 1 \times 1 & 1 \times 3 + 0 \times 0 + 1 \times 2 \\ 2 \times 4 + 3 \times 2 + 4 \times 1 & 2 \times 3 + 3 \times 0 + 4 \times 2 \\ 2 \times 4 + 1 \times 2 + 0 \times 1 & 2 \times 3 + 1 \times 0 + 0 \times 2 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 18 & 14 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}$

Propriétés

1. Le produit des matrices A et B n'est défini que si le nobre de colonnes de A est égal au nombre de ligne de B.

2. Le produit des matrices est associative: Si A une matrice de taille $n \times p$, B une matrice de taille $p \times m$ et C une matrice de taille $m \times q$ (de sorte qu'on peut calculer AB, et BC). Alors $(AB)\,C = A(BC)$.

3. Défaut de commutativité: Le produit matriciel n'est pas commutatif

4. L'élément neutre: Si $A \in M_{n,p}(\mathbb{k})$, on a $AI_p = A$ et $I_n A = A$

5. Distributivité par rapport à l'addition: Si A, B et C telles que A et B ont même nombre de lignes et même nombre de colonnes (de sorte qu'on peut calculer $(A + B)$ et le nombre de lignes de C est égale au nombre de colonnes de A (alors de B). Alors

$$(A + B)\,C = AC + BC.$$

Remarque 3.2.2 *Le produit de deux matrices peut-etre nul alors qu'aucune des matrices n'est nulle. par exemble, si*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \end{pmatrix} \text{ alors } AB = 0_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ mais } A \neq 0$$

et $B \neq 0$.

Puissances

Si $k \geq 0$ est un entier et si $A \in M_n(\mathbb{k})$ une matrice carrée. On définit la puissance k^e de A de la façon suivante:

$$A^k = \begin{cases} I_n & \text{si } k = 0 \\ A^{k-1}A = \underbrace{A...A}_{produit\ de\ k\ fois\ de\ A} & \text{si } k \geq 1. \end{cases}.$$

Proposition 3.2.3 *Soit A une matrice carrée, soit k et l sont deux entiers.*

1. $A^k A^l = A^{k+l}$

2. $\left(A^k\right)^l = A^{kl}$

3. $(\lambda A)^k = \lambda^k A^k$ pour tout $\lambda \in \mathbb{k}$.

4. Si $A = Diag(a_1, a_2, ..., a_n)$ est une matrice diagonale alors $A^k = Diag(a_1^k, a_2^k, ..., a_n^k)$.

3.3 Inverse d'une matrice

3.3.1 Déterminant

Le déterminant d'une matrice n'est défini que si la matrice est carrée

Définition 3.3.1 *Soit* $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{k})$ *une matrice carrée, Le déterminant de* A, *noté* $\det(A)$ *ou* $|A|$, *est l'élément de* $\mathbb{k}$ *définit par "descente" de la façon suivante:*

. Si $n = 1$ alors $A = (a_{11})$ et $\det(A) = a_{11}$

. Si $n \geq 2$ alors $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ et

$$\det(A) = a_{11}\triangle_{11} - a_{21}\triangle_{21} + ... + (-1)^{n-1}\, a_{n1}\triangle_{n1}$$

Où $\triangle_{i1}$ est le déterminant de la matrice de $M_{n-1}(\mathbb{k})$ obtenue en enlevant à A la ligne n°i est la prepière colonne.

Exemple 3.3.1 *On calcule* $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Exemple 3.3.2 *Le déterminant de la matrice* $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ *est*

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-3-10) - 1(12+4) + 0 = -42$$

Proposition 3.3.1 *Si on multiple l'une des lignes d'une matrice par un élément de* $\mathbb{k}$ *alors le déterminant de cette matrice est multiplié par le même élément de* $\mathbb{k}$.

3.3.2 Transposé d'une matrice

Définition 3.3.2 *Si* $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ *est une matrice à* n *lignes et* p *colonnes, on appelle transposée de* A *et on note* A^t *la matrice à* p *lignes et* n *colonnes dont le coefficient de la ligne n°*i *et la colonne n°*j *est* a_{ji}. *Ainsi,* $\left((a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}\right)^t = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq p}}$.

Les colonnes de A^t sont les lignes de A ou, ce que revient au même, les lignes de A^t sont les colonnes de A.

Exemple 3.3.3 *La transposée de* $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ *est* $A^t = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & 5 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 3 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Proposition 3.3.2 *Soit* A *et* B *deux matrices* $\lambda \in \mathbb{k}$.*Alors,*

1. $(A^t)^t = A \quad (A \in M_{n,p}(\mathbb{k}))$
2. $(\lambda.A)^t = \lambda.A^t \quad (A \in M_{n,p}(\mathbb{k}))$
3. $(A+B)^t = A^t + B^t \quad (A, B \in M_{n,p}(\mathbb{k}))$
4. $(AB)^t = B^t.A^t \quad (A \in M_{n,p}(\mathbb{k}), B \in M_{p,q}(\mathbb{k}))$. Il faut prendre garde au changement de l'ordre de la multiplication lorsqu'on prend la transposée d'un produit.

3.3.3 Inverse d'une matrice

Définition et propriétés

Définition 3.3.3 *Soit* $A \in M_n(\mathbb{k})$ *une matrice carrée d'ordre* n. *Une matrice* B *carrée d'ordre* n *est appelée inverse à droite de* A *si* $AB = I_n$ *et inverse à gauche de* A *si* $BA = I_n$. *Où* I_n *est la matrice d'identité d'ordre* n.

Si une matrice A admet un inverse à droite B et un inverse à gauche C alors $B = C$ et on peut donc dire que B est un inverse de A sans ambigüité.

Définition 3.3.4 *Une matrice carrée* A *est dite inversible si elle admet un inverse à droite et à gauche. Cet inverse est alos unique. On note* A^{-1} *l'inverse de la matrice inversible* A. *Si* $A \in M_n(\mathbb{k})$, *on a* $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

Proposition 3.3.3 *Soit A une matrice inversible et $\lambda \in \mathbb{k}^*$.*

1. La matrice A^{-1} est inversible d'inverse A.
2. La matrice λA est inversible d'inverse $\frac{1}{\lambda}A^{-1}$.

Preuve. (Exercice) ■

Théorème 3.3.1 *Soit A et B deux matrices carrées iversibles de même taille. Alors le produit AB est inversible et son inverse est $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Théorème 3.3.2 *Si A une matrice carrée alors $\det(A) \neq 0 \Longleftrightarrow A$ est inversible. De plus si A est inversible alors $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(A)}$*

Calcule d'inverse

Il existe diverses méthodes pour calculer l'inverse d'une matrice A.

Méthode des cofacteurs

Définition 3.3.5 *On appelle matrice des cofacteurs, $C = com(A)$, la matrice de coefficients*

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det\left(A_{ij}\right)$$

Où A_{ij} est la matrice obtenue en elelvant de la matrice A la ligne n°i et la colonne n°j

Exemple 3.3.4 *Si* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

$$com(A) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -7 & 12 \\ 5 & 2 & -6 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Théorème 3.3.3 *Si A est inversible alors*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(comA)^t$$

Exemple 3.3.5 *Si* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

$\det(A) = 2\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times (-4) - 3 \times (-5) + 2 \times (1) = 9$

$\det(A) \neq 0$ alors la matrice A est inversible.

$$com(A) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -7 & 12 \\ 5 & 2 & -6 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Donc $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(comA)^t = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -4 & -7 & 12 \\ 5 & 2 & -6 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 \\ -7 & 2 & 4 \\ 12 & -6 & -3 \end{pmatrix}.$

Il est claire que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Chapitre 4

Résolution d'un système d'équations linéaires

4.1 Système de Cramer

Chapitre 5

Fonction de plusieurs variables

5.1 Rappels des notions topologiques dans $\mathbb{R}^n$

Pour un entier non nul n, on définit $\mathbb{R}^n$ comme le produit cartésien de $\mathbb{R}$ par lui même n fois. $\mathbb{R}^n$ alors est l'ensemble des vecteurs à n composants réelles. Que se soit en Analyse théorique ou numérique comme en informatique on manipule essentiellement des vecteurs, et on doit leurs appliquer des traitement analogues à ce qu'on faisait avec les nombres. On doit savoir mesurer la proximité de deux vecteurs, pour pouvoir parler de limite, continuité et dérivabilité d'une fonction dont l'ensemble de départ n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$ mais un ensemble de vecteurs.

Distance

Dans $\mathbb{R}$; la distance entre deux réels x et y est donnée par $d(x, y) = |x - y|$

Dans $\mathbb{R}^2$; la distance entre deux points $X = (x_1, x_2)$ et $Y = (y_1, y_2)$ est donnée par $d(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$.

Dans $\mathbb{R}^n$; la distance entre deux points $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ et $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ est donnée par $d(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}$.

Norme

Définition 5.1.1 *Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on appelle norme sur E toute application N de E dans $\mathbb{R}^+$ telle que*

- $\forall x \in E, N(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in E, N(\alpha x) = |\alpha| N(x)$
- $\forall x \in E, \forall y \in E, N(x+y) \leq N(x) + N(y)$ (Inégalité triangulaire

Un espace normé est un espace vectoriel muni d'une norme.

Remarque 5.1.1 *La norme d'un élément X de $\mathbb{R}^n$ est sa distance à l'origine (Notons que $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel normé)*

Normes usuelles de $\mathbb{R}^n$ Pour tout élément $X = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$

- **La norme euclidienne** notée $N_2(X) = \|X\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$
- **La norme du max** notée $N_\infty(X) = \|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$
- **La norme "somme"** notée $N_1(X) = \|X\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

Ces trois normes sont équivalentes. (Deux normes N_1 et N_2 dans un espace E sont dites équivalentes si et seulement s'il existe deux réels positif a et b vérifiant $\forall x \in E, aN_1(x) \leq N_2(x) \leq bN(x)$)

Boules ouvertes et boules fermées de $\mathbb{R}^n$

Définition 5.1.2 *On appelle boule ouverte de centre $X_0 \in \mathbb{R}^n$ et de rayon $r > 0$, notée $B(X_0, r)$, l'ensemble des points de $\mathbb{R}^n$ dont la distance à X_0 est strictement inférieur à r, autrement dit*

$$B(X_0, r) = \{X \in \mathbb{R}^n, \|X - X_0\| < r\}$$

- Les normes usuelles étant confondues dans $\mathbb{R}$ avec la valeur absolue, donc la boule ouverte $B(x_0, r)$ dans $\mathbb{R}$ n'est autre que l'intervalle ouvert $]x_0 - r, x_0 + r[$
- Dans $\mathbb{R}^n$, et en utilisant la norme euclidienne, la boule $B(X_0, r) = \Big\{X = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \sqrt{(x - x_0)^2 + (y$ est le disque ouvert centré en X_0 et de rayon r.

- La boule ouverte pour la norme du max dans $\mathbb{R}^2$ est un carré. En effet

$$\|X - X_0\|_\infty < r \Longleftrightarrow \max(|x - x_0|, |y - y_0|) < r \Longleftrightarrow |x - x_0| < r \text{ et } |y - y_0| < r$$

Or $|x - x_0| < r$ caractérise une bande verticale de largeur $2r$, limitée par les deux droites $x = x_0 - r$ et $x = x_0 + r$. L'intersection de ces bandes est un carré dont le centre est X_0.

Définition 5.1.3 *On appelle boule fermée de centre $X_0 \in \mathbb{R}^n$ et de rayon $r > 0$, notée $\overline{B}(X_0, r)$, l'ensemble des points de $\mathbb{R}^n$ dont la distance à X_0 est inférieur ou égale à r, autrement dit*

$$\overline{B}(X_0, r) = \{X \in \mathbb{R}^n, \|X - X_0\| \leq r\}$$

Voisinage d'un point Le voisinage d'un point $X_0 \in \mathbb{R}^n$ est toute partie de $\mathbb{R}^n$ contenant une boule ouverte centrée en X_0.

Un voisinage de l'infinie sera une couronne $\{X \in \mathbb{R}^n, \|X\| > r$ avec $r > 0$ est très grand$\}$

Ouvert ou partie ouverte de $\mathbb{R}^n$ Une partie U de $\mathbb{R}^n$ est dite ouverte, l'orsqu'elle est voisinage de chacun de ses points. Autrement dit

$$U \text{ ouvert} \Longleftrightarrow (\forall X_0 \in U; \exists r > 0, B(X_0, r) \subset U)$$

- Par convention, l'ensemble vide $\emptyset$ et $\mathbb{R}^n$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$.

- La réunion quelconque des ouverts est un ouvert

- L'intersection finie des ouverts est un ouvert.

Exemple 5.1.1 *L'ensemble $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > y\}$ est un ouvert, c'est le demi plan situé au dessous de la première bissectrice (privé de la droite).*

Partie fermée de $\mathbb{R}^n$ Une partie F de $\mathbb{R}^n$ si son complémentaire dans $\mathbb{R}^n$ est un ouvert.

Exemple 5.1.2 *L'ensemble $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y\} = \mathbb{R}^2 \setminus U$ est un fermé.*

- L'ensemble vide $\emptyset$ est un ouvert, son complémentaire dans $\mathbb{R}^n$ est $\mathbb{R}^n$, donc $\mathbb{R}^n$ est un fermé. De même, puisque $\mathbb{R}^n$ est un ouvert son complémentaire $\emptyset$ est fermé.

- $\mathbb{R}^n$ et $\emptyset$ sont les seules parties de $\mathbb{R}^n$ ouvertes et fermées en même temps.
- Une partie quelconque de $\mathbb{R}^n$ n'a aucune raison d'être ouverte ou fermée, on peut trouver des parties qui ne sont ni ouverte ni fermée; l'intervalle semi ouvert n'est ni ouvert ni fermé, l'ensemble $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ n'est ni ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}^2$.

Partie bornée Une partie A de $\mathbb{R}^n$ est bornée lorsqu'elle est incluse dans une boule. Autrement dit, A est bornée$\Longleftrightarrow \exists r > 0, \forall x \in A$, on a $\|X\| \leq r$.

Compact de $\mathbb{R}^n$ Toute partie K de $\mathbb{R}^n$ non vide, fermée et bornée est dite compacte.

5.2 Fonctions réelles de plusieurs variables

Définition 5.2.1 *Une fonction réelle de plusieurs variables est une application*

$$\begin{aligned} f : D \subseteq \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ X = (X_1, X_2, ..., X_n) &\longmapsto \end{aligned}$$

D est le domaine de définition de f.

- $f(x, y) = 2(x + y)$ est la fonction de deux variables qui représente le périmètre d'un rectangle de longueur x et largeur y, et définie sur $\mathbb{R}^2$
- $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, fonction à deux variable définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
- $f(P, V, T) = PV - nRT$ fonction de trois variables qui représente la loi du gaz parfait avec n est la quantité de matière, R est une constante, V est le volume, P la pression et T est températeur.

Représentation graphique

Pour $n = 1$; $y = f(x)$ se présente par une courbe dans le plan $\mathbb{R}^2$.

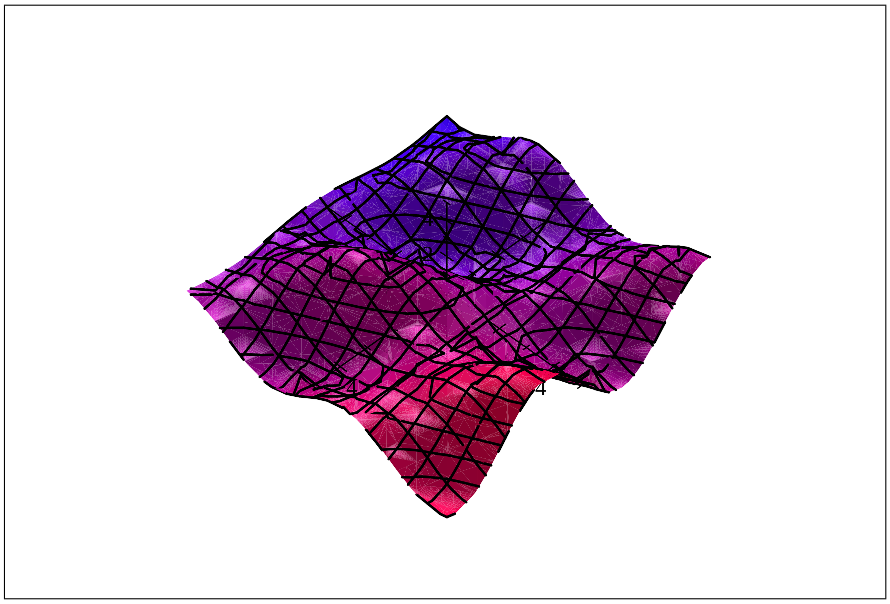
Pour $n = 2$; $z = f(x, y)$ se présente par une surface dans l'espace $\mathbb{R}^3$

Pour $n \geq 3$; la représentation graphique est difficile à visualiser.

Remarque 5.2.1 *En fixant la valeur de $z = f(x, y) = k$, on obtient des courbes dites ligne de niveau de la fonction f; notée $L_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = k \ \ (k \text{ réel})\}$. Ce terme reflète une réalité physique:*

- Sur une carte topographique on les emploie pour indiquer l'altitude
- Sur une carte marine, elle indique la profondeur (dite ligne sonde);
- Sur une carte météorologique, les isobares qui relient les points d'égale pression atmosphérique...

Exemple 5.2.1 $z = \sin x + \cos(x + y)$



5.3 Continuité d'une fonction réelle de plusieurs variables

Définition 5.3.1 *Soit f une fonction définie au voisinage d'un point $A \in \mathbb{R}^n$, on dit que f est continue au point A lorsque* $\lim\limits_{X \to A} f(X) = f(A)$ *i.e* $\forall \varepsilon > 0; \forall X \in D_f; \exists \alpha > 0; \|X - A\| < \alpha \Longrightarrow |f(X) - f(A)| \leq \varepsilon$

X et $A \in \mathbb{R}^n$ donc $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ et $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$; alors $X \longrightarrow A$ signifie

$$\begin{cases} x_1 \longrightarrow a_1 \\ x_2 \longrightarrow a_2 \\ \quad\vdots \\ x_n \longrightarrow a_n \end{cases}$$

Noter que, dans $\mathbb{R}$, f est continue en $A \Longleftrightarrow \lim\limits_{X \overset{\geq}{\to} A} f(X) = \lim\limits_{X \overset{\leq}{\to} A} f(X) = f(A)$; il y a une seul chemin à parcourir pour joindre X à A. Mais dans $\mathbb{R}^n$, $X \longrightarrow A$ signifie que toutes les coordonnées de X tendent vers les coordonnées de A à la fois (simultanément) et indépendamment; il y a une infinité de chemins à parcourir pour fair tendre X vers A, donc la définition n'est pas toujours facile à appliquer (par exemple $\lim\limits_{(x,y) \longrightarrow (a,b)} f(X) = \lim\limits_{x \longrightarrow a} \lim\limits_{y \longrightarrow b} f(X)$ généralement).

Techniques utilisées dans la pratique