CHAPITRE I

TRANSFERT DE CHALEUR PAR CONDUCTION

Le **transfert de chaleur par conduction** est un mode de transfert thermique provoqué par une **différence de température** entre **deux régions** d'un même milieu, ou entre deux milieux en contact, et se réalisant sans déplacement global de matière.

I.1 Définitions :

I.1.1 Champs de température

Pendant l'échauffement ou le refroidissement d'un corps, la température va varie d'un point à un autre et à chaque instants. Pour cela, la température (fonction scalaire) dans un point M peut être écrire sous la forme : T=T(M, t) tel que, M est un point quelconque dans le corps définit par les coordonnées (x,y,z).

L'ensemble des températures (***distribution des températures***) dans tous les points du corps s'appelle champ de température.

Lorsque la température varie avec la position et avec le temps t , on dit que la conduction est **instationnaire** (**régime variable**) et si le champ de température est **uniforme** par rapport au temps on dit que la conduction est **stationnaire** (**régime permanant**).
Dans les deux cas, (instationnaire et stationnaire), la température peut dépendre de :

- des **trois** coordonnées T=T(x,y,z,t) : conduction tridimensionnelle
- des **deux** coordonnées par exemple T=T(x,y,t) : conduction bidimensionnelle
- une **seule** coordonnée par exemple T=T(x,t) : conduction unidirectionnelle

dans le cas stationnaire (T ne dépend pas du temps), la température peut être T(x,y,z), T(x,y) ou T(x)

I.1.2 Surfaces isothermes

Les points ayant à chaque instant la même température sont appelés **surface isothermes (T(M)=constante)**. En régime variable, les surfaces isothermes sont **mobiles est déformables** et en régime permanant, elles sont **invariantes**.

I.1.3 Gradient de température

Dans les coordonnées cartésiennes, le gradient de température est définit par :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ T = \frac{\partial T}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial T}{\partial k}\vec{k} \qquad (1)$$

Tel que : (∂T/∂x), (∂T/∂y) et (∂T/∂z) sont appelé les dérivés partielles de T par rapport à x, y et z

La dérivé totale de T est donnée par ; $dT = \frac{\partial T}{\partial x}dx + \frac{\partial T}{\partial y}dy + \frac{\partial T}{\partial k}dz \qquad (2)$

Si on pend un élément de déplacement $\overrightarrow{dl}$ sur le corps, on a ;

$$\overrightarrow{dl} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k} \qquad (3)$$

De les équations (1) ,(2) et (3), on peut écrire dT sous la forme:

$$dT = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ T \, . \, \overrightarrow{dl} \qquad (4)$$

Si $\overrightarrow{dl}$ est situe sur la surface isotherme alors :

$T(M)=cost \rightarrow dT= 0$ et $\overrightarrow{grad}\, T \cdot \vec{dl}=0$ ce qui implique que $\overrightarrow{grad}\, T$ est perpendiculaire à $\vec{dl}$ et à la surface isotherme et donc parallèle à la normale $\vec{n}$.

I. 1.4 Flux thermique (Flux de chaleur)

Le flux thermique noté (**Φ**) est la quantité de chaleur (**Q**) qui traverse (ou échangé) la surface du corps dans l'unité de temps et s'écrit sous la forme :

$$\Phi = \frac{dQ}{dt} \quad (\text{Joule/s}) = [\text{watt}] \qquad (5)$$

On peut dire que le flux thermique représente la **puissance** échangée par la surface de ce corps ;

I .1.5 Densité de flux thermique

La densité de flux thermique notée (**q**) est la puissance échangée par **unité** de surface.

$$q = \frac{\Phi}{S} \quad (\text{W/m}^2) \qquad (6)$$

I. 2. Loi de Fourier (1822)

Enoncé

Il existe une relation linéaire entre la **densité de flux thermique** (**q**) et le **gradient de température** en tout point d'un milieu **isotrope** (c.à.d, il possède les mêmes caractéristiques physiques). La densité de flux thermique instantané est proportionnelle à la **conductivité thermique** du milieu et le gradient de température :

$$\vec{q} = -\lambda .\, \overrightarrow{grad}\; T \qquad (7)$$

q s'exprime en $w.m^{-2}$

Dans les coordonnées cartésiennes : $\vec{q} = -\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\vec{k}\right)$ (8)

la conductivité thermique **λ** est une grandeur scalaire positive, caractéristique du milieu elle dépend de la nature, la forme et la température de la matière ; Pour un milieu **isotrope** (**λ=constante**),

Le **signe moins** désigne que la densité de flux de chaleur est dans le sens de la décroissance de la température. C'est-à dire que la chaleur se déplaçant du **milieu chaud vers le milieu froid**.

Dans le cas des matières **isotropes**, les composantes de la densité de flux thermique dans les coordonnées cartésiennes peuvent être écrire sous la forme :

$$q_x = -\lambda_{.x} \frac{\partial T}{\partial x} \;;\; q_y = -\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \;;\; q_z = -\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z}$$

Dans le cas où la matière est **anisotrop**e, la conductivité thermique varie selon les axes x, y, z comme le suivant :

$$q_x = -\lambda_x . \frac{\partial T}{\partial x} \;;\; q_y = -\lambda_y . \frac{\partial T}{\partial y} \;;\; q_z = -\lambda_z . \frac{\partial T}{\partial z}$$

Remarque 1: Dans les matériaux solides (notamment les métaux), la conductivité thermique varie avec la température selon la relation suivante :

$$\lambda = \lambda_0 \, [(1+b(T-T_0)\,] \qquad (9)$$

tel que :

λ_0 : conductivité thermique à la température T_0
b : est une constante dépend d'une matière à une autre
T_0 : température référentielle
Selon la loi de Fourier, l'unité de la conductivité thermique est : ($W.m^{-1}.K^{-1}$)
On remarque de l'équation (7), lorsque la conductivité thermique est élevée, la densité de flux de chaleur qui travers la surface du corps est grande, (cas des métaux).

Remarque 2 : La conductivité thermique d'un mélange (alliage) ne varie pas linéairement avec la composition du mélange. Il est donc impossible de prévoir la conductivité thermique d'un alliage en connaissant sa composition et la conductivité des différents éléments constituant cet alliage. Il faut donc mesurer expérimentalement cette conductivité.

I.2.1 Quelque grandeurs de la conductivité thermiques de quelque matériaux à la température T=20°C

Tableau 1 ; Conductivité thermique des différents matériaux

matériaux	**Conductivité thermique (W.m^{-1} .K^{-1})**
Gaz (sous la pression normale)	0.006 – 0.18 (exp, air : 0.024)
Matériaux Isolants thermiques	0.025 – 0.25 (exp, polystyrène : 0.209)
Liquides non métaux	0.1 –1 (exp, eau : 0.59)
Liquides métaux	8.5 – 85 (exp, sodium à 200°C :81.2)
Solides non métalliques	0.025 – 3 (exp, Biton : 1.7)
Alliages	10 – 150
Métaux pures	20 – 400 (exp, Cuivre : 386, Aluminium : 200)

I.3 CONDUCTION UNIDIMENTIONNELLE EN REGIME PERMANENT

I.3.1 Expression du flux thermique

Supposons que le flux thermique traversant un mur d'une surface S et d'épaisseur e par conduction est unidirectionnelle en régime permanant suivant l'axe ox dans un milieu isotrope son conductivité est **λ ,** (Fig.1) **.**

Le flux thermique traversant par conduction une mince paroi d'épaisseur **dx** située à une distance ***x*** de la face (1) et dont les faces sont respectivement aux températures **T** et **T +dT,** est donné par la loi de Fourier

$$\Phi = -\lambda.S\frac{dT}{dx} \qquad (10)$$

De cette relation on peut écrire :

$$\Phi.dx = -\lambda\,S.dT$$

Dans le cas où le régime est permanant (ne dépends pas de temps), le flux thermique est constant, donc on peut intégrer cette relation entre les deux faces , on obtient :

$$\Phi\int_0^e dx = -\lambda.S\int_{T1}^{T2} dT \qquad (11)$$

ce qui donne :

$$\Phi.e = \lambda.S(T1 - T2)$$

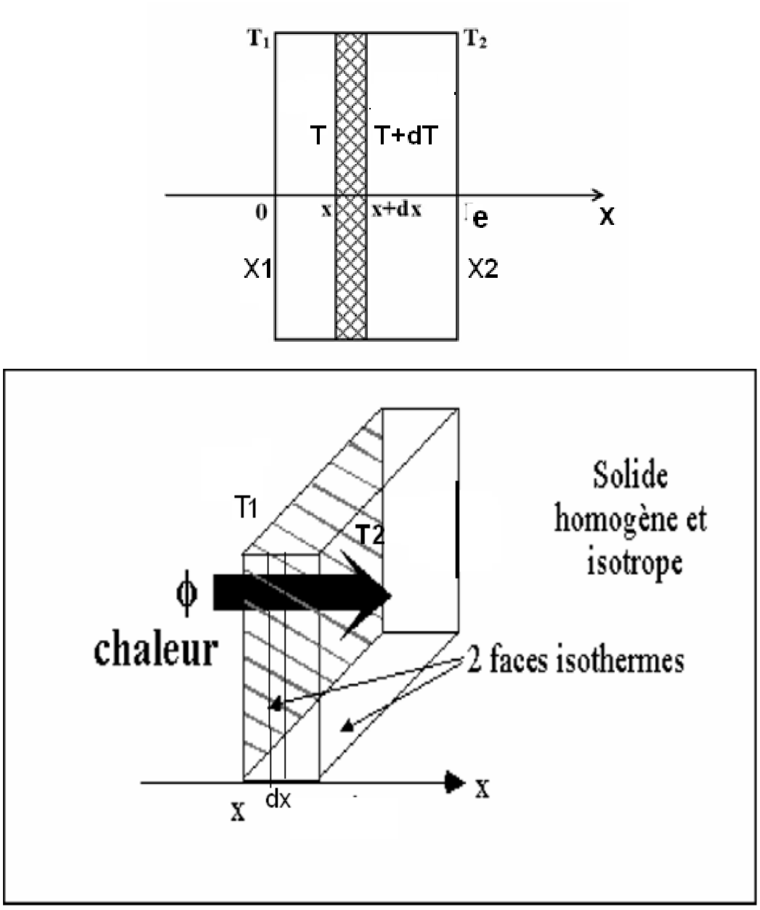

Figure.1 Conduction à travers un mur plan

D'où : l'expression **du flux thermique** est : $\Phi = \dfrac{\lambda S(T1 - T2)}{e}$ (12)

- Densité de flux thermique

Comme la densité de flux thermique (**q**) est le flux rapporté à l'unité de surface donc:

$$q = \frac{\Phi}{S} \Rightarrow q = \frac{\lambda(T1 - T2)}{e} \qquad (13)$$

I.3.2 Expression de la résistance thermique de conduction d'un mur plan

En électricité, **la résistance** est le rapport entre la différence de potentiel et le courant électrique **I** (**R= ΔV/I**). En thermique, **la résistance** thermique est le rapport entre la différence de température et **le flux thermique,** d'où l'expression suivante de **la résistance thermique :**

$R_{the} = \frac{T1 - T2}{\Phi}$ et $R_{élec} = \frac{V1 - V2}{I}$

De la relation (12), la résistance thermique est donc : $R_{the} = \frac{e}{\lambda S}$ (14)

I.3.3 Expression de la température à l'intérieur de mur

La température dans un point d'abscisse **x** (Fig.1) est donnée par la relation :

$T_1 - T_{(x)} = R_x . \Phi$, où $R_x = x / \lambda . S$

D'où : $T_x = T_1 - (x/ \lambda . S). \Phi$ (20)

T(x) est sous la forme : $T(x) = - ax+b$

On déduit que la température diminue linéairement entre les deux faces. La **chute** de température est d'autant plus grande que la conductivité thermique du matériau constituant le mur.

Application 1

Calculer le flux traversant une plaque d'une vitre de 20 cm de longueur, de 10 cm de largeur et de 5 mm d'épaisseur. La température de la face interne de la vitre est égale à 20°C, celle de la face externe est égale à 15° C.

En déduire la résistance thermique de la vitre et la densité de flux thermique.
Conductivité thermique du verre: $\lambda v = 0,7\ W.m^{-1}.K^{-1}$

I.3. Loi de Newton

Dans le cas de la convection où le fluide est en contacte avec un corps solide, l'expression de flux thermique échangé entre le fluide et le corps solide est donnée par:

$$\Phi = -h.S.\Delta T \quad (16)$$

tel que :
h : coefficient de transfert thermique par convection ($W/m^2.K$)
S : surface d'échange entre le fluide et le corps solide
ΔT : différence de température entre le fluide et le solide
Dans ce cas, la résistance thermique est : $R_{the} = \frac{1}{h.S}$

I.3.1 Cas d'un mur simple en contacte avec deux fluides

Considérons un mur de surface S en contacte avec deux fluides de températures constantes T_{f1} et T_{f2} tel que T_{f1} est supérieur à T_{f2} et des coefficients d'échanges thermiques par convection h1 et h2 , Fig. (2) .

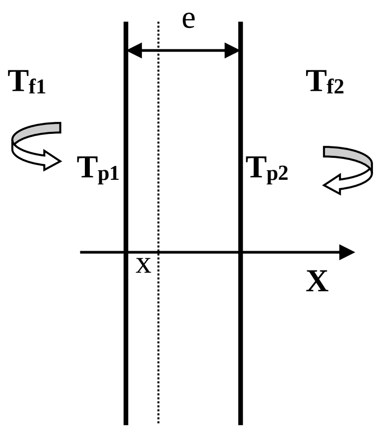

Fig.2: mur simple en contacte avec deux fluides

Entre les parois du mur et les fluides s'établit un échange convectif.
La conservation de flux se traduit par l'égalité des flux (Φ=Constante) donc :

$\Phi = \Phi 1 = \Phi 2 = \Phi 3$ (17.a)

Tel que :

$\Phi 1 = h1.S.(T_{f1}-T_{p1})$: flux cédé par le fluide chaud au mur

$\Phi 2 = \lambda.S.(T_{P1}-T_{p2})$: flux traversant le mur

$\Phi 2 = h2.S.(T_{P2}-T_{F2})$: flux reçu par le fluide froid.

ou encore

$$T_{f1} - T_{p1} = \frac{\phi}{h1.s} \qquad (17.b)$$

$$T_{P1} - T_{P2} = \frac{\phi}{\lambda.s} \qquad (17.c)$$

$$Tp_2 - T_{f2} = \frac{\phi}{h2.s} \qquad (17.d)$$

Et en additionnant les équations (17.b)- (17.d) membre à membre on obtient :

$$\Phi = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{R_{f1} + R + R_{f2}} \qquad (18)$$

avec : $R_{f1}=1/h_1.S$, $R=e/\lambda.S$, $R_{f2}=1/h_2.S$

L'équation (18) permet d'exprimer le flux d'échange entre les deux fluides en fonction de leurs températures, et des caractéristiques du mur et des coefficients d'échange convectifs :

Cette relation traduit **la loi d'Ohm** pour des résistances en série

I.3.2 Le Coefficient d'échange (de transfert thermique) global :

On définit le **coefficient global d'échange k** entre un parois solide et deux fluides par l'expression :

$$k = \frac{1}{R_{éq}.S} \quad \text{ou} \quad k = \frac{1}{(R_{f1} + R + R_{f2}).S} \qquad (19)$$

Remplaçons l'équation (19) dans (18) on obtient: $\mathbf{\Phi = k.S.(T_{f1} - T_{f2})}$ (20)

I.3.3 Plusieurs murs plans homogènes, en série en contacte avec deux fluides

Considérons maintenant plusieurs murs simples accolés, d'épaisseur e_i et de conductivité λ_i, en contacte parfaite. Les faces extrêmes sont en contacte avec deux fluides de températures T_{f1} et T_{f2} (Fig.3).

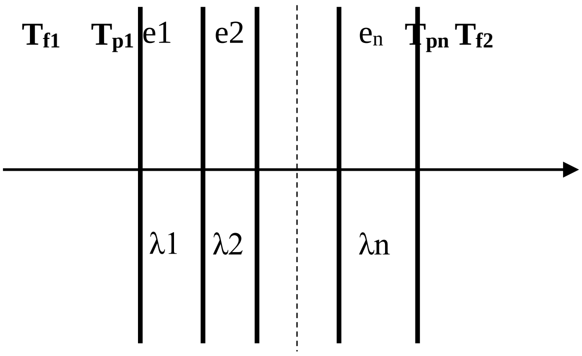

Fig.3: plusieurs murs accolés

Par un raisonnement identique au précédent (mur simple) on obtient de même :

$$\Phi = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{R_{f1} + \sum_{i=1}^{n} R_i + R_{f2}} \quad \text{avec} \quad R_i = \frac{e_i}{\lambda_i.S} \qquad (21)$$

Application 2

Le mur d'un four est composé de deux couches. La première est en brique réfractaire d'épaisseur e1= 20cm , conductivité λ1=1.4 W/(m°C), la deuxième est en brique isolante e2= 10cm , conductivité λ2=0.2 W/(m°C).

La température à l'intérieure du four est T1 est de 1600°C et le coefficient d'échange h1 sur la paroi intérieure vaut 70 W/(m°C) . La température à l'extérieure (air ambiant) est T2 est de 20 °C et le coefficient d'échange h2 sur la paroi extérieure est 0.25 W/(m°C) .

1. Déterminer la densité du flux thermique (perte thermique) entre l'intérieure et l'extérieure du four.
2. Déterminer les températures de la paroi interne, entre les deux couches et la température de la face externe.
3. Déterminer la température situe à une distance x de la paroi intérieure dans la première couche.

I.3.4 Conduction à travers plusieurs murs plans homogènes en parallèle

Supposons des différents éléments solides soient juxtaposés et que la température soit uniforme sur chacune de leurs deux faces (fig.3). (**exemple** : mur +fenêtre+porte ,ect..)
La différence de température **(T1-T2)** est donc la même pour chacun des éléments traversé respectivement par les flux thermiques **Φ1 , Φ2 , Φ3.** (Fig.4).

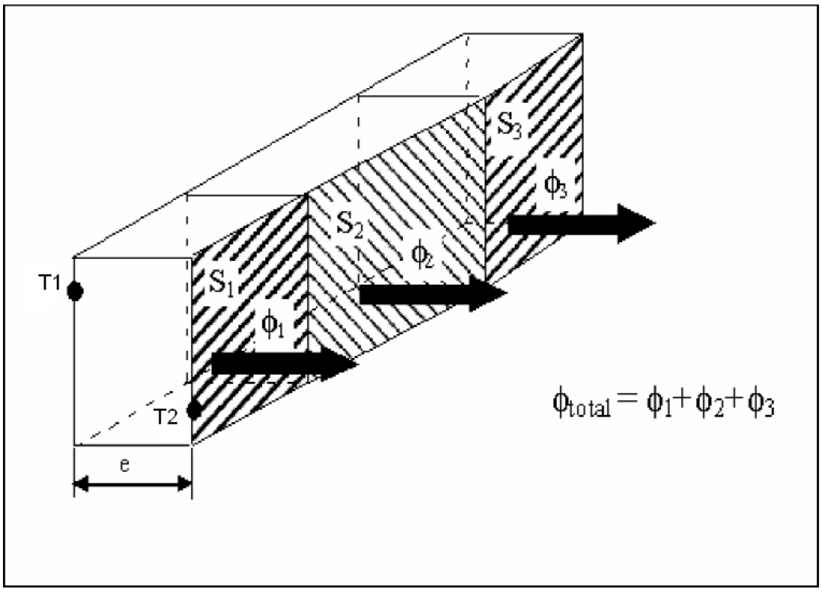

Fig. 4 plusieurs murs plans homogènes, en parallèle

Le flux thermique total à travers l'ensemble est

$$\Phi = \Phi 1 + \Phi 2 + \Phi 3$$

Si **R1, R2, R3** représentent les résistances thermiques de chacun des éléments, alors les flux traversant chaque mur sont donnés par:

$$\Phi 1 = \frac{T1 - T2}{\text{R1}}; \qquad \Phi 2 = \frac{T1 - T2}{\text{R2}}; \qquad \Phi 3 = \frac{T1 - T2}{\text{R3}}$$

Avec :

$$\text{R1} = \frac{e}{\lambda_1 . S1}; \quad \text{R2} = \frac{e}{\lambda_2 . S2} \quad .; \quad \text{R3} = \frac{e}{\lambda_3 . S3}$$

$$\Phi = \Phi 1 + \Phi 2 + \Phi 3 = (T1 - T2)\left[\frac{1}{R1} + \frac{1}{R2} + \frac{1}{R3}\right] \qquad (22)$$

Si les différents éléments en parallèle n'ont pas la même épaisseur. Le raisonnement précédent s'applique à condition de pouvoir négliger les échanges thermiques par les faces latérales des bandes juxtaposées.

$$\text{R1} = \frac{e_1}{\lambda_1 . S1}; \quad \text{R2} = \frac{e_2}{\lambda_2 . S2} \quad .; \quad \text{R3} = \frac{e_3}{\lambda_3 . S3}$$

Application 3

Calculer le flux traversant une façade d'une maison de 40 m^2, la maison est constituée d'un mur de brique de 25 cm d'épaisseur. La façade est perçue de 4 fenêtres en vitre de 1 m^2 de surface de chaque fenêtre et de 4 mm d'épaisseur et une porte en bois de 4 mm d'épaisseur et de 2 m^2 de surface.
On suppose que la température interne est de 20 °C pour tous les matériaux constituant la façade , de même pour la température la paroi externe est de 5°C.
Conductivité thermique du verre : $\lambda v=0.7$ W/(m°C)
Conductivité thermique du brique : $\lambda b=0.5$ W/(m°C)
Conductivité thermique du bois: $\lambda bois=0.21$ W/(m°C)

I.3.5 Conduction à travers d'un tube cylindrique

On considère un cylindre creux de conductivité thermique λ, de rayon intérieur R1, de rayon extérieur R2 et de longueur L . Les surfaces cylindriques sont à des températures T1 et T2 uniformes et constantes (surfaces isothermes), (figure 5.). On suppose aussi que le gradient longitudinal de température est négligeable devant le gradient radial.

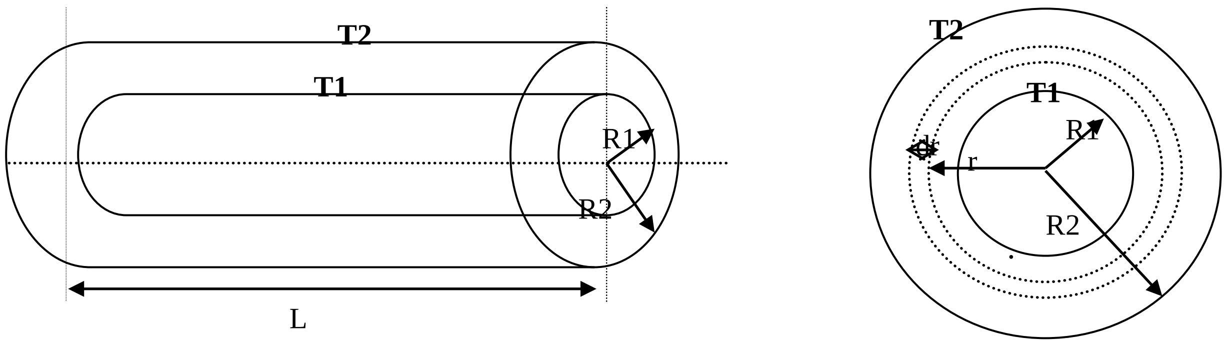

Figure **5**. Cylindre creux traversé par un flux de conduction

Le flux thermique à travers ce cylindre est donné par la loi de Fourier:

$$\Phi = -\lambda.S\frac{dT}{dr}$$

S est surface latérale du cylindre de rayon r : S=2πrL

Donc $\Phi = -\lambda.2\pi rL\dfrac{dT}{dr}$ ou encore $dT = -\dfrac{\phi}{\lambda.2\pi L}\dfrac{dr}{r}$ (23)

Comme Φ est constant à travers tout cylindre coaxial de rayon **r** compris entre **R1** et **R2** , l'équation précédente peut donc s'intégrer de l'intérieur à l'extérieur du cylindre de la manière suivante :

$$\int_{T1}^{T2} dT = -\frac{\Phi}{\lambda.2\pi L}\int_{R1}^{R2}\frac{dr}{r}$$

D'où : $T1 - T2 = \dfrac{\Phi}{\lambda.2\pi L}Ln(R2/R1)$ (24)

Et on déduit l'expression du flux thermique : $\Phi = \dfrac{\lambda.2\pi L}{Ln(R2/R1)}(T1 - T2)$ (25)

A partir de la relation (25) on déduit la résistance thermique d'un tube

$$R = \frac{T1 - T2}{\Phi} = \frac{Ln(R2/R1)}{\lambda.2\pi L} \qquad (26)$$

La densité de flux q est :

$$q(r) = \lambda \frac{T1 - T2}{Ln(R2/R1)} \cdot \frac{1}{r} \qquad (27)$$

I.3.5.1 Distribution des températures :

La distribution radiale des températures peut être obtenue à partir de la relation (23),

$$\int_{T1}^{T} dT = -\frac{\Phi}{\lambda.2\pi L} \int_{R1}^{r} \frac{dr}{r}$$

$$T(r) - T1 = -\frac{\Phi}{\lambda.2\pi L} Ln(r/R1)$$

$$T(r) = T1 - \frac{\Phi}{\lambda.2\pi L} Ln(r/R1) \qquad (26)$$

Remplaçons l'équation (25) dans (26), on a :

$$T(r) = T1 - \frac{T1 - T2}{Ln(R2/R1)} Ln(r/R1) \qquad (27)$$

Application 4.

Soit un tube d'acier 12/14 dont la température de la paroi interne est 100 °C et celle de la paroi externe est **95°C**.

1. Calculer la résistance thermique du tube pour une longueur de 2 m. et le flux correspondant.
2. Déterminer la distribution de température à l'intérieure de ce tube.
   Conductivité thermique de l'acier est 50 $W.m^{-1}.°C^{-1}$