جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

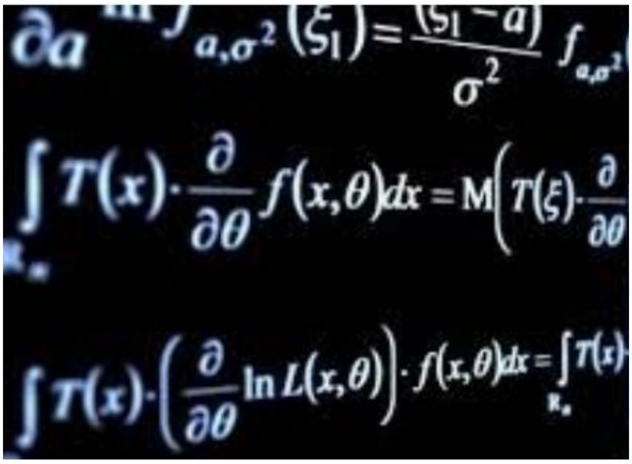
جامعة المسيلة

كلية العلوم الاقتصادية و التجارية و علوم التسيير

الدوال ذات متغيرين

ألأستاذ: جياب سمية

قسم علوم التسيير



السنة الدراسية 2023/2024

قائمة المحتويات

الدوال ذات متغيرين

تعتبر الدوال متعددة المتغيرات اداة مهمة في فهم وتحليل الظواهر الاقتصادية. تُستخدم هذه الدوال لوصف العلاقات بين متغيرات متعددة في الاقتصاد.

آ. تعريف دالة ذات متغيرين

تعريف :

هي كل دالة تنطلق من متغيرين اثنين (x,y) من $\mathbb{R}^2$ (او جزء منه) نحو عدد حقيقي من $\mathbb{R}$ و تكتب من الشكل

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \rightarrow & f(x,y) \end{array}$$

مجموعة تعريف الدالة هي مجموعة تعريف مجالي انطلاق الدالة f من مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$) مجموعة المنطلقات) يرمز له ب $_f$.

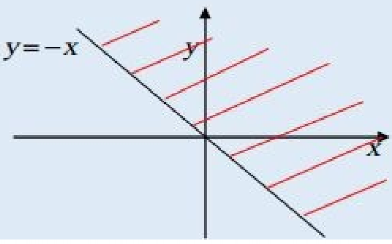
امثلة

وهي تمثل كل نقاط المستوي ماعدا محور الفواصل $y=0$ (الجزء المشطب بالأحمر).

- لتكن f دالة حقيقية لمتغيرين حيث $f(x,y)=\sqrt{x+y}$ فإن

$$D_f=\{(x,y)\in IR^2 / x+y\geq 0\}=\{(x,y)\in IR^2 / y\geq -x\}$$

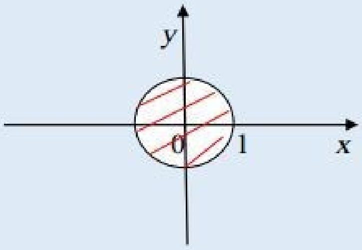
يمكن تمثيلها بيانيا كالتالي



- لتكن f دالة حقيقية لمتغيرين حيث $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ فإن

$$D_f=\{(x,y)\in IR^2 / 1-x^2-y^2\geq 0\}=\{(x,y)\in IR^2 / x^2+y^2\leq 1\}$$

يمكن تمثيلها بيانيا كالتالي



وهي تمثل كل نقاط القرص المغلق الذي مركزه المبدأ $(0,0)$ ونصف قطره يساوي 1 (الجزء المشطب بالأحمر).

ب. الاشتقاق الجزئي من الرتبة الأولى لدالة ذات متغيرين

المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى لدالة ذات متغيرين

• المشتقة الجزئية للدالة **f** بالنسبة للمتغير **x** : هي المشتقة الاعتيادية للدالة f بالنسبة ل x باعتبار أن y ثابت و تكتب $\frac{\partial f}{\partial x}$ أو f_x

• المشتقة الجزئية للدالة **f(x,y)** بالنسبة للمتغير **y** : هي المشتقة الاعتيادية للدالة f بالنسبة ل y باعتبار أن x ثابت و تكتب $\frac{\partial f}{\partial y}$ أو f_y

مثال :

مثال: أوجد كل من $f(0,0)$، $f(1,0)$، $f(0,1)$، $\frac{\partial f}{\partial x}$، $\frac{\partial f}{\partial y}$ في كل حالة.

/1 $f(x,y)=x^2+y^2$ /2 $f(x,y)=e^{2x}+3y-5$

/3 $f(x,y)=\ln(x^2+y^3+1)$ /4 $f(x,y)=\frac{1}{x+1}+2yx-1$

الحل:

/1 لما $f(x,y)=e^{2x}+3y-5$

$$f(0,0)=e^0+3.0-5=1-5=-4,\quad f(1,0)=e^{2.1}+3.0-5=e^2-5,\quad f(0,1)=e^0+3.1-5=-1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2e^{2x},\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=3$$

/2 لما $f(x,y)=x^2+y^2$

$$f(0,0)=0^2+0^2=0,\quad f(1,0)=1^2+0^2=1,\quad f(1,0)=0^2+1^2=1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y$$

/3 لما $f(x,y)=\ln(x^2+y^2+1)$

$$f(0,0)=\ln(1)=0,\quad f(1,0)=\ln(2),\quad f(0,1)=\ln(2)$$

فرنسية

ب. الاشتقاق الجزئي من الرتبة الثانية لدالة ذات متغيرين

المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية لدالة ذات متغيرين

إذا كانت f لها مشتقات جزئية $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ فإن هي نفسها دوال ويمكن اشتقاقها جزئيا مرة اخرى ونرمز لها ب:

$$f_{xy}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\ f_{yx}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

$$f_{xx}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ f_{yy}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

مثال :

$f(x,y)$	x^2+xy^2	$\ln(x-y^2)$
f_x	$2x+y^2$	$\frac{-1}{x-y^2}$
f_{xx}	2	$\frac{-1}{(x-y^2)^2}$
f_y	$2xy$	$\frac{-2y}{x-y^2}$
f_{yy}	$2x$	

f_{xy}	$2y$	$\dfrac{2y}{(x-y^2)^2}$
f_{yx}	$2y$	$\dfrac{2y}{(x-y^2)^2}$

ت. التكاملات المضاعفة لدالة ذات متغيرين

يكتب التكامل المضاعف لدالة f ذات متغيرين x و y على مجال تعريفها D من الشكل

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy \quad \text{او} \quad \iint_D f(x,y)\,dydx$$

مثـــال : امثلة

مثال احسب التكامل المضاعف الأتي :

$$I=\iint_{\Omega} x^2+y\,dxdy\,,$$
$$\Omega=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / 0\le x\le 1 \quad et \quad 0\le y\le 1-x\}.$$

الحل :

$$I=\iint_{\Omega} x^2+y\,dxdy\,,$$
$$I=\int_0^1\left(\int_0^{1-x} x^2+y\,dy\right)dx\,,$$
$$I=\int_0^1\left[yx^2+\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x}dx\,,$$
$$I=\int_0^1(1-x)x^2+\frac{(1-x)^2}{2}\,dx\,,$$
$$I=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{(1-x)^3}{6}\right]_0^1,$$
$$I=\frac{-1}{12}.$$

مثال ليكن $D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ -1\le y\le 0 \ \text{و}\ 0\le x\le 2\}$ احسب التكامل المضاعف للدالة $f(x,y)=e^{x-y}$

الحل

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_{-1}^{0}\int_0^2 e^{x-y}dxdy=\int_{-1}^{0}e^{-y}dy\times\int_0^2 e^x dx=[-e^{-y}]_{-1}^{0}\times[e^x]_0^2=(e-1)(e^2-1)$$

مثال ليكن $D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ -1\le y\le 1 \ \text{و}\ 0\le x\le 1\}$ احسب التكامل المضاعف للدالة $f(x,y)=ye^{xy}$

الحل

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_{-1}^{1}\int_0^1 ye^{xy}dxdy=\int_{-1}^{1}[e^{xy}]_0^1dy=\int_{-1}^{1}(e^y-1)dy$$
$$=[e^y-y]_{-1}^{1}=(e-1)-(e^{-1}+1)=e-e^{-1}-2$$

مثال ليكن $D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ -1\le y\le 0 \ \text{و}\ 0\le x\le 1\}$ احسب $\iint_D(x^2y-3xy^2)dxdy$

ث. واجب منزلي و تمارين

واجب منزلي و تمارين

واجب منزلي قم ببحث لا يتعدى 2 صفحة حول الدوال ذات متغيرين وتطبيقاتها في الميادين الاقتصادية ،و يسلم في حصة العمال الموجهة

تمرين f, g, h دوال ذات متغيرين معرفة ب

1) $f(x;y) = 2x^3y^2$ ، 2) $h(x;y) = \frac{-1}{2}x^{\frac{3}{2}}.y^{\frac{5}{2}}$ ، 3) $g(x;y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$

أ)-عين كلا من : D_f ، D_h ، D_g .

ب)-أحسب كل المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى والثانية للدوال: f ،g ،h .

تمرين

الجزء الاول

1 - باستعمال التكامل بالتجزئة احسب $\int_{-1}^{1} ye^y\,dy$

2 - احسب $I = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{y} e^y\,dx\,dy$

الجزء الثاني

1 - باستعمال التكامل بالتجزئة احسب $\int_{0}^{1} x\ln x\,dx$ ، $\int_{0}^{1} \ln x\,dx$

2 - احسب $J = \int_{0}^{1}\int_{x}^{1} \ln x\,dy\,dx$