

Chapitre IV : Hydrodynamique

Introduction

L'hydrodynamique étudie le mouvement des liquides en tenant compte des forces qui lui donnent naissance. Elle consiste à étudier le mouvement des particules fluides soumises à un système de forces. Les forces de compressibilité sont négligées.

L'hydrodynamique se divise généralement en deux parties :

- ✓ l'hydrodynamique des liquides parfaits. Lorsque les forces dues à la viscosité ne se manifestent pas, il n'y a donc pas de mouvement relatif entre les particules liquides.
- ✓ l'hydrodynamique des liquides réels. La présence de la viscosité induit une perte de charge qui est une transformation irréversible de l'énergie mécanique en énergie thermique. on dit qu'il est newtonien.

IV.1 Objectifs

On s'intéresse aux équations fondamentales qui régissent la dynamique incompressibles parfaits, en particulier :

- l'équation de continuité (conservation de la masse) ;
- le théorème de Bernoulli (conservation de l'énergie).
- le théorème d'Euler (conservation de la quantité de mouvement) à partir duquel on établit les équations donnant la force dynamique exercée par mouvement (exemple les jets d'eau).

IV.2 Ecoulement permanent, ligne de courant, tube de courant

- La ligne de courant (L.C) est une courbe suivant laquelle se déplace un élément de fluide. Elle correspond aux trajectoires des particules qui la constituent (Fig 1).
- On dit un tube de courant (T.C) l'ensemble des L.C s'appuyant sur un contour fermé (Fig 1).
- l'écoulement d'un fluide est dit permanent si la vitesse des particules fluides est constante dans le temps. Pour un écoulement permanent, une ligne de courant est une courbe invariante dans le repère R.

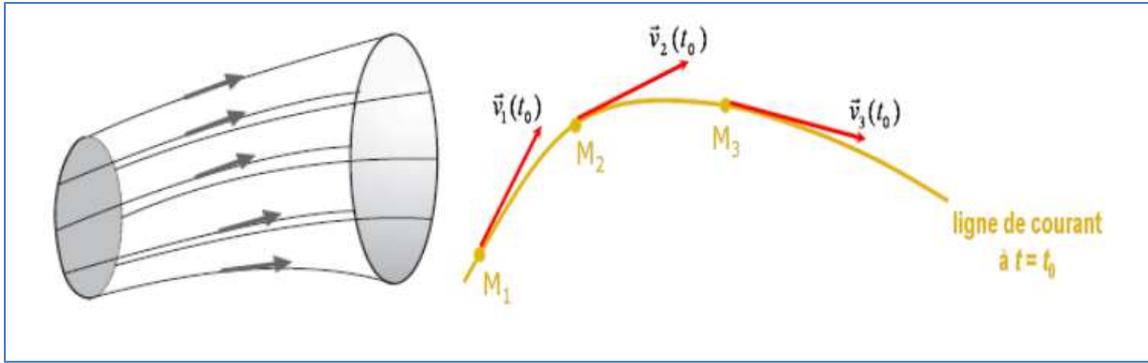


Figure 1.Tube de courant et ligne de courant

IV.3 Principes de Base

IV.3.1 Principe de Conservation de Masse ou Equation de Continuité

Le principe de continuité exprime la conservation de masse, ce qui signifie qu'aucun fluide ne peut être créé ni disparaître dans un volume donné :

Soit une veine fluide de diamètre (D) située entre les sections S1 et S2 d'un écoulement permanent. Pendant le temps (dt), les sections S1 et S2 se déplacent respectivement de dl1 et dl2 aux vitesses moyennes débitantes V1 et V2.

La masse se conserve entre le temps (t) et le temps (t+dt) :

$$dm_1 = dm_2$$

$$\rho_1 S_1 dl_1 = \rho_2 S_2 dl_2$$

En divisant par dt :

$$\frac{dl_1}{dt} = V_1 \text{ et } \frac{dl_2}{dt} = V_2$$

On obtient

$$\rho_1 S_1 V_1 = \rho_2 S_2 V_2$$

Le principe de conservation de masse

conduit l'expression :

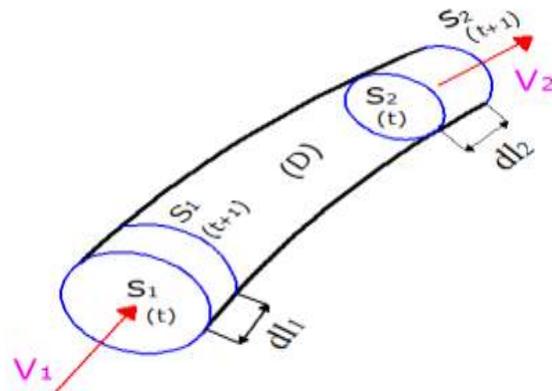
$$\rho S V = Q = C^{ste}$$

Puisque le fluide est incompressible :

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho \text{ On peut simplifier et aboutir}$$

l'équation de continuité suivante :

$$S_1 V_1 = S_2 V_2$$



$$S_1 \cdot V_1 = S_2 \cdot V_2$$

IV.3.2 Notion de débit d'écoulement

Le **débit** est le quotient de la quantité de fluide qui traverse une section droite de la conduite par la durée de cet écoulement. Le débit d'écoulement s'exprime par les relations suivantes :

Débit-masse

Si dm est la masse de fluide qui a traversé une section droite de la conduite pendant le temps dt , par définition le débit-masse est : unité : $\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$

$$q_m = \frac{dm}{dt}$$

Débit-volume

Si dV est le volume de fluide qui a traversé une section droite de la conduite pendant le temps dt , par définition le débit-volume est : unité : $\text{m}^3\cdot\text{s}^{-1}$

$$q_v = \frac{dV}{dt}$$

$Q = S \cdot V$: Débit volumique (volume par unité de temps), Unité SI = m^3/s

Relation entre q_m et q_v

$q_m = \rho q_v \rightarrow Q_m = \rho \cdot Q_v$ Q_m : Débit massique, Unité SI = Kg/s

IV.4. Théorème de Bernoulli

Lorsque le fluide est en mouvement, la pression en tout point du fluide est dépendante de l'altitude et de la masse volumique du fluide mais aussi de la vitesse du fluide. La pression est donc la somme d'une pression motrice et d'une pression dynamique. La pression et la vitesse dans un écoulement de fluide parfait et réel sont liées par la relation de Bernoulli.

La relation de Bernoulli permet de calculer la pression et la vitesse sur une ligne de courant dans la configuration d'un fluide parfait et les fluides visqueux.

IV.4.1 Représentation graphique de l'équation de Bernoulli pour un fluide parfait

On appelle fluide parfait est un fluide de viscosité nulle n'ayant aucune adhérence sur la paroi d'une conduite (fluide inexistant dans la nature).

L'équation fondamentale de l'hydrodynamique pour un fluide parfait est représentée graphiquement par la figure.

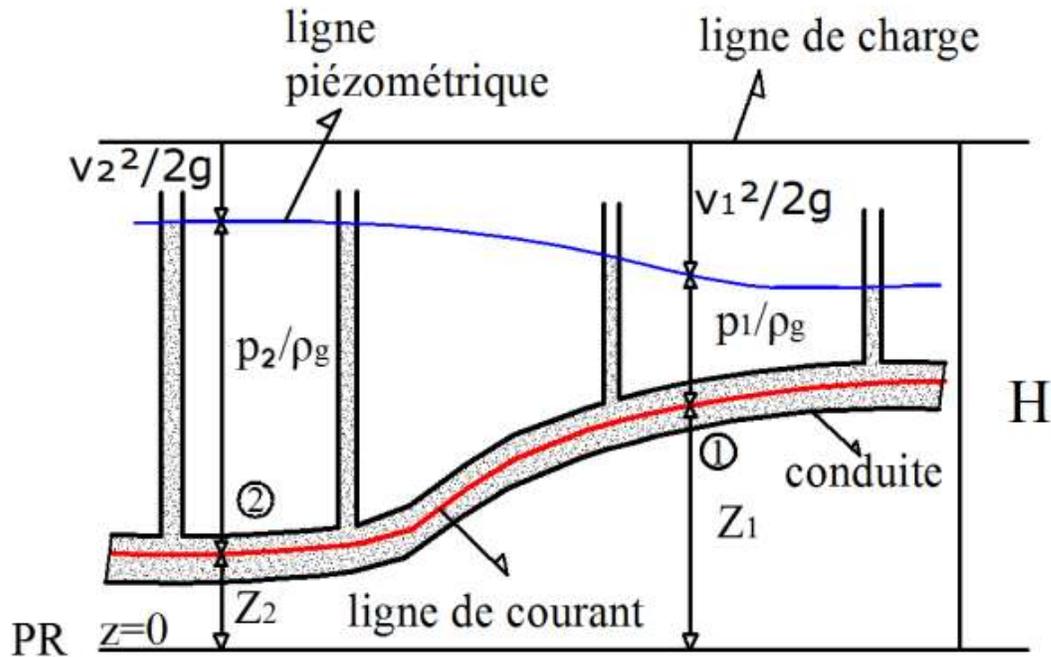


Figure 3. Représentation graphique de théorème de Bernoulli (fluide parfait)

L'équation de Bernoulli exprime que, tout le long d'un filet liquide en mouvement permanent, l'énergie totale par unité de poids du liquide reste constante ($dH/dl = 0$, perte de charge qui se produit le long de dl). D'après le schéma, on peut donc écrire que :

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + Z_2 = H = C^{ste}$$

Cette équation s'écrit donc dans le cas général :

$$\frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + Z = H = \frac{P_t}{\rho g} = C^{ste} = \frac{W}{mg} = \frac{E}{g}$$

$\frac{v^2}{2g}$: Hauteur due à la vitesse

$\frac{p}{\rho g}$: Hauteur due à la pression

Z : Cote du point

$H = \frac{P_t}{\rho g}$: Charge totale

❖ En terme de pression :

$$\rho gh + p + \rho \frac{v^2}{2} = p_t = C^{ste} = \frac{W}{V_{volume}}$$

$\rho \frac{v^2}{2}$: Pression dynamique

$\rho gh + p$: Pression statique pression totale

p_t : Pression totale

❖ Interprétation énergétique

$$p^* + \rho \frac{v^2}{2} = p_t = C^{ste} = \frac{W}{V_{volume}}$$

$\rho \frac{v^2}{2}$: Energie cinétique

p^* : Energie potentielle

p_t : Energie mécanique totale

IV.4.2 Représentation graphique de l'équation de Bernoulli pour un fluide réel (visqueux)

L'équation fondamentale de l'hydrodynamique pour un fluide réel est représentée graphiquement par la figure.

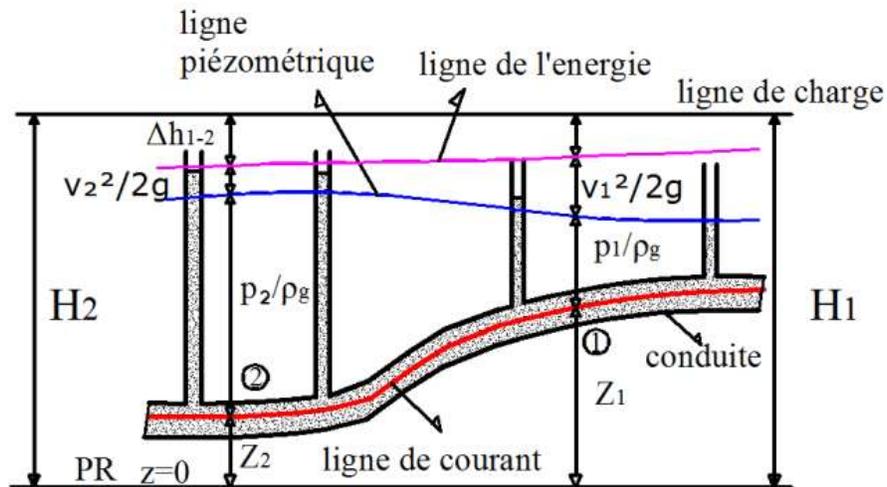
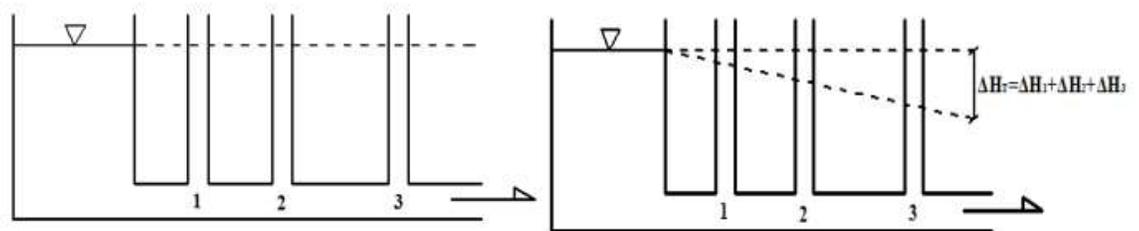


Figure 4. Représentation graphique de théorème de Bernoulli (fluide réel)

La charge H pour un fluide réel visqueux diminue dans la direction de l'écoulement ($dH/dx = H_1 - H_2/dl < 0$ = perte de charge qui se produit le long de dl , due principalement à la viscosité, ou pente hydraulique). D'après le schéma, on peut donc écrire que :

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + Z_1 = H_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + Z_2 + \Delta h_{1-2} = H_2$$

Le terme Δh_{1-2} représente la somme des pertes de charge, ΔH_L , linéaires ou uniformément réparties, dues à la viscosité (fonction de la température), aux frottements et ΔH_s singulières ou locales provoquées par les chargement et obstacles le long de l'itinéraire.



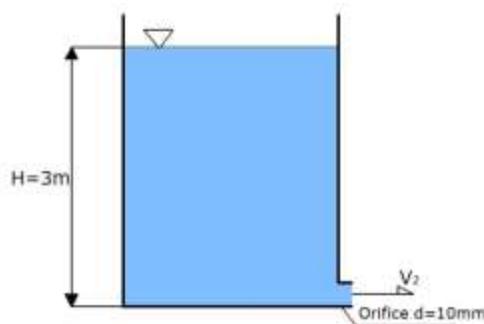
1) Fluide parfait 2) Fluide réel

Figure 5. Différence entre fluide parfait et un fluide réel.

Ce terme ΔH est celui qui fait la différence entre un écoulement de fluide parfait et un écoulement d'un fluide réel.

Application : On considère un réservoir rempli d'eau à une hauteur $H = 3$ m, muni d'un petit orifice à sa base de diamètre $d = 10$ mm.

- 1) Appliquer le théorème de Bernoulli pour calculer la vitesse V_2 d'écoulement d'eau.
- 2) En déduire le débit volumique Q_v en (l/s) en sortie de l'orifice. On suppose que $g = 9,81$ m/s.



Réponse :

On applique le théorème de Bernoulli avec les hypothèses suivantes : $V_1 \approx 0$ car le niveau dans le réservoir varie lentement et $P_1 = P_2 = P_{atm}$,

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2 \text{ on obtient}$$

$$V_2 = \sqrt{2g(Z_2 - Z_1)} = \sqrt{2gH}$$

$$A.N V_2 = \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 3} = 7.67 \text{ m/s}$$

2- Débit volumique Q_v

$$Q_V = V_2 \cdot S = 7.67 \cdot \frac{\pi(10 \cdot 10^{-3})^2}{4} = 0.6 \text{ l/s}$$

IV.4.3 Application de l'équation de Bernoulli à la mesure de débit

a- Tube de venturi

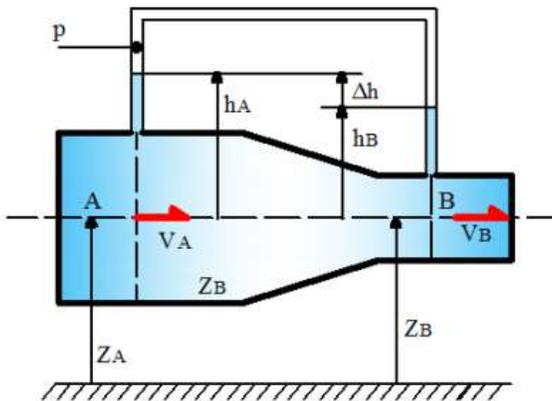


Figure 6. Venturi

Equation de continuité

$$Q_v = S_A V_A = S_B V_B$$

Theoreme de Bernoulli de plan A - B

$$\frac{p_A}{\rho g} + \frac{v_A^2}{2g} + Z_A = \frac{p_B}{\rho g} + \frac{v_B^2}{2g} + Z_B$$

si le venturi est horizontale $Z_A = Z_B$

Theoreme de Pascal :

$$p_A = p + \rho g h_A$$

$$p_B = p + \rho g h_B$$

$$P_A - P_B = \rho g(h_A - h_B) = \rho g \Delta h$$

et comme

$$V_B = \frac{Q_v}{S_B} \text{ et } V_A = \frac{Q_v}{S_A} \rightarrow V_B^2 - V_A^2 = \frac{Q_v^2}{S_A^2} \left[\left(\frac{S_A}{S_B} \right)^2 - 1 \right]$$

$$\frac{1}{2} \frac{Q_v^2}{S_A^2} \left[\left(\frac{S_A}{S_B} \right)^2 - 1 \right] - g \Delta h = 0 \rightarrow Q_v = S_A \sqrt{\frac{2g \Delta h}{\left(\frac{S_A}{S_B} \right)^2 - 1}} \text{ en } m^3/s$$

Avec un venturi , il donc possible de calculer le débit volumique dans un circuit hydraulique.

IV.5. Les régimes d'écoulement des liquides

IV.5.1 Dans les conduites fermées

IV.5.1.1 Nombre de Reynolds (Re)

Les écoulements sont classés en 03 régimes principaux : **Laminaire** et **Turbulent** séparés par une phase **transitoire** appelée **régime critique**.

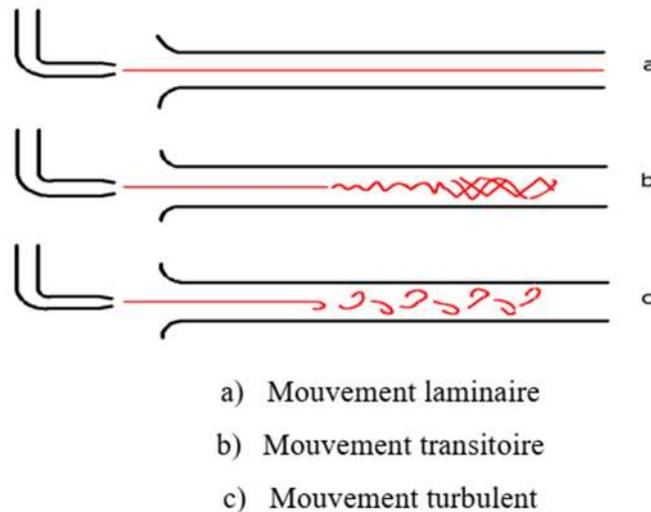


Figure 7. Expérimentale de Reynolds

Pour caractériser ces régimes d'écoulement, on introduit un nombre adimensionnel, appelée Nombre de Reynolds, noté Re et calculé par la formule :

$$Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{4VD}{\mu}$$

Avec :

V = Vitesse moyenne d'écouleme

D = Diamètre de la section d'écou

ν = Viscosité cinématique du fluid

μ = viscosité dynamique du fluide

En général, la section de conduites est circulaire, donc $A = \frac{\pi \cdot D^2}{4}$

En introduisant l'expression du débit et de la section d'écoulement (circulaire), le nombre de Reynolds s'écrit :

$$Re = \frac{4Q}{\pi Dv} = \frac{4\rho Q}{\pi D\mu}$$

IV.5.1.2 Limite du nombre de Reynolds

Les limites du Nombre de Reynolds définissant les différents régimes d'écoulement peuvent être résumés comme suit :

- $Re < 2000$: Le régime est Laminaire
- $2000 < Re < 4000$: Le régime est Critique ou Transitoire
- $Re \geq 4000$: Le régime est Turbulent.

IV.5.1.3 Profil des vitesses dans une section circulaire en charge

Dans le cas des conduites en charge où l'écoulement est laminaire, seules les forces de viscosité interviennent ; le profil des vitesses est parabolique et est donné par la figure suivante :

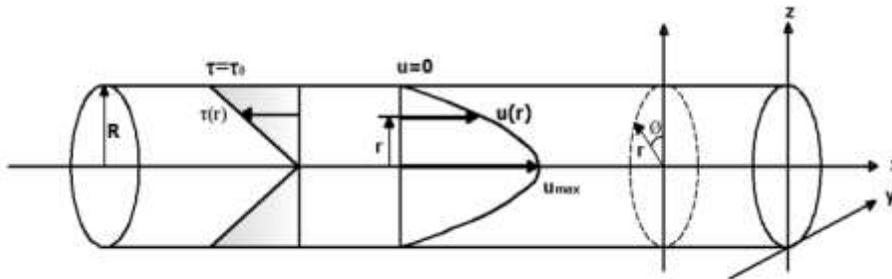


Figure 8. Profil des vitesses (écoulement est laminaire)

Dans le cas où l'écoulement est turbulent, le profil des vitesses tend à être uniformisé et est du type logarithmique.

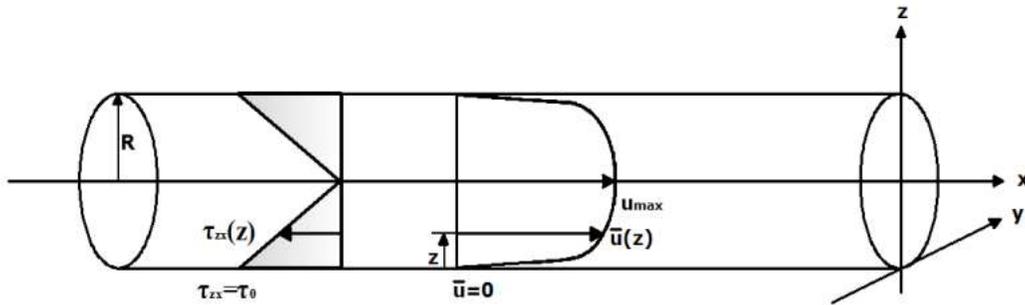


Figure 9. Profil des vitesses (écoulement turbulent)

La vitesse maximale en régime laminaire est au centre de la canalisation. Par contre, le profil de vitesse turbulent varie beaucoup plus au voisinage de la paroi. Cette zone de fort gradient de vitesse est appelée couche limite (fig 10).

La caractéristique principale d'un mouvement turbulent vient du fait que les vitesses et pression en un point fluctuent avec le temps de façon aléatoire.

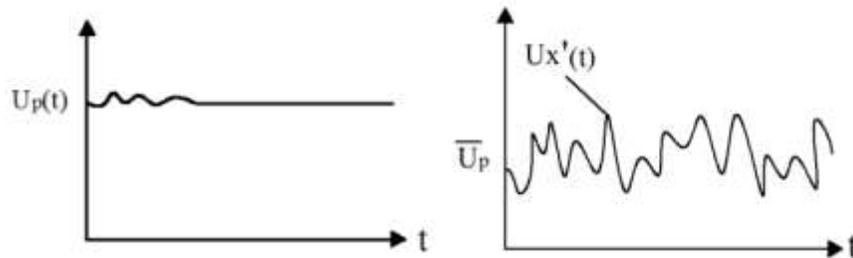


Figure 10: couche limite en écoulement laminaire et turbulent

IV.5.2 Dans les conduites ouvertes

IV.5.2.1 Nombre de Froude (F)

Posons $F = \sqrt[3]{\frac{Q^2 L}{g S^3}}$, appelé nombre de Froude.

IL s'écrit aussi $F = \frac{v}{\sqrt{g \cdot y_m}}$ ou $y_m = S/L$ est le tirant d'eau moyen dans la section.

Si $F=0 \Rightarrow$ Régime critique

Si $F < 1 \Rightarrow$ Régime fluvial

Si $F > 1 \Rightarrow$ Régime torrentiel

IV.6 Les pertes de charge

IV.6.1 Définition

Les pertes de charge sont des chutes d'énergie mesurées en différence de pression dues à la résistance que rencontrent les fluides en écoulement : les actions de cisaillement occasionnent en effet des pertes énergétiques.

IV.6.2 Types de pertes de charge

Il y a deux types de pertes de charge :

- ❖ Les pertes de charge régulières ΔH_L (linéaires) qui proviennent des frottements de fluide sur la paroi et se répartissent le long de la conduite.
- ❖ Les pertes de charge singulières ΔH_s concentrées au voisinage d'une singularité (coude, rétrécissement, élargissement, venturi, vanne etc....).

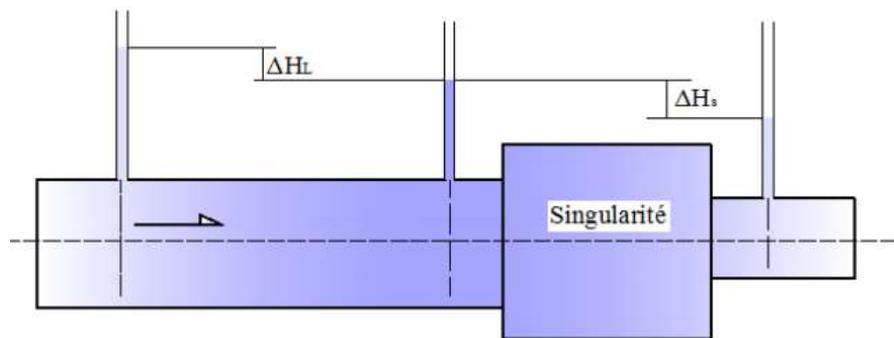


Figure 11. Types de pertes de charge

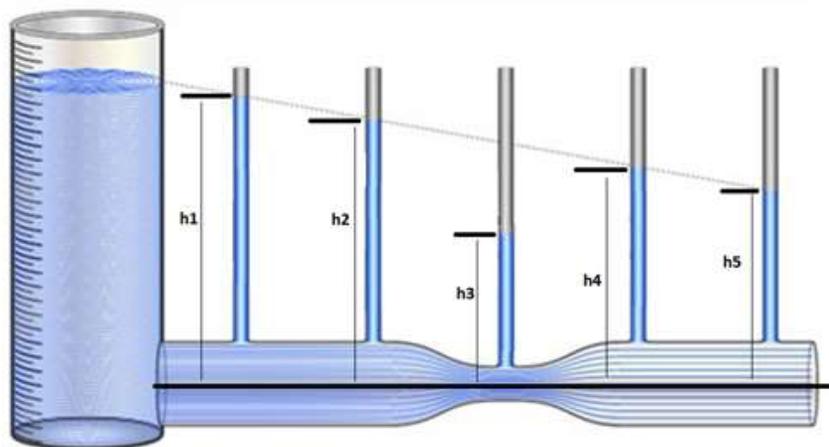


Figure 12. Venturi et pertes de charge

IV.6.2.1 Perte de charge linéaire ΔH_L

Il est causé par le frottement intérieur qui se produit dans les liquides ; il se rencontre dans les tuyaux lisses aussi bien que dans les tuyaux rugueux. Entre deux points séparés par une longueur L, dans un tuyau de diamètre D apparaît une perte de pression p.

$$\Delta H_L = \frac{\lambda \cdot L}{D} \cdot \frac{V^2}{2g}$$

λ : Coefficient de frottement.

IV.6.2.2 Perte de charge singulière ΔH_s

Elles apparaissent lors de changement de direction d'écoulement, de changement de diamètre, et lorsque des dispositifs (vannes, raccords et manchons, coudes, tés, etc.) sont disposés sur la ligne d'écoulement.

IV.6.3 La rugosité (k)

La rugosité qui est la propriété de la surface de contact du matériau de la canalisation avec le liquide, influence grandement la viscosité.

Surface lisse, une surface rugueuse implique un état de surface dont les irrégularités ont une action directe sur les forces de frottements. Surface rugueuse peut être considérée comme étant constituée par une série de protubérances élémentaires caractérisées par une hauteur, notée k, et appelée " Rugosité " :

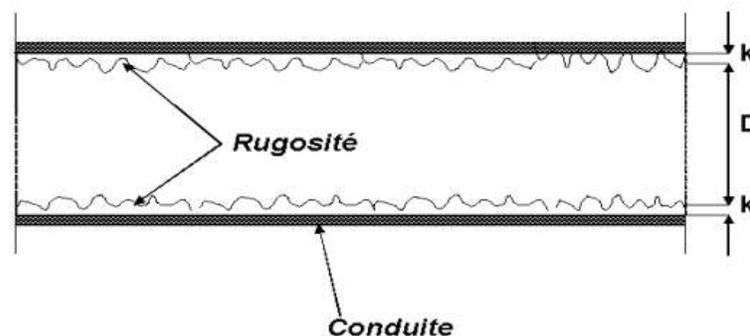


Figure 13. Surface de contact

La rugosité peut être mesurée par rapport au diamètre de la conduite. On parle alors de

rugosité absolue: $\varepsilon = \frac{k}{D}$

Tableau 1. Rugosité absolue de conduits en fonction du type de matériau.

Matériau	Condition	ε	Matériau	Condition	ε
Acier	Feuille de métal nouvelle	0,05	Cuivre	Tube étiré	0,002
	Acierinoxydable	0,002	Plastique	Tube étiré	0,0015
	Commercial, nouveau	0,046	Verre	Lisse	0,0001
	Rivé	3	Béton	Lisse	0,04
	Rouillé	2		Rugueux	2
Fer	Fonte, nouvelle	0,26	Caoutchouc	Lisse	0,01
	Forgé, nouveau	0,046	Bois	Défoncé	0,5
	Galvanisé, nouveau	0,15			
	Fonteaphaltée	0,12			

IV.6.4 Coefficient de frottement λ

appelé coefficient de Darcy-Weisbachou est sans dimension. Il est défini comme coefficient de perte de charge régulière, pour l'écoulement dans un conduit droit, de longueur L et de diamètre D, par :

$$\lambda = \frac{\Delta p}{\frac{L}{D} \frac{\rho V^2}{2}}$$

IV.6.4.1 Coefficient de frottement en régime laminaire

Le coefficient de perte de charge régulière λ pour l'écoulement laminaire d'un fluide dans une conduite est indépendant de la *rugosité* de la paroi et sa valeur est donnée par la relation :

$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

IV.6.4.2 Coefficient de perte de charge régulière en régime turbulent

En écoulement turbulent, la rugosité de paroi joue un rôle déterminant sur la valeur du coefficient de perte de charge régulière. En effet, le niveau de turbulence sera directement associé à l'état de surface de la paroi solide. On définit la rugosité relative de la paroi par (ε/D).

Dans cette relation, ε est la *rugosité absolue* dépendant de la hauteur moyenne des rugosités ainsi que de leur forme, de leur nombre et de leur répartition surfacique.

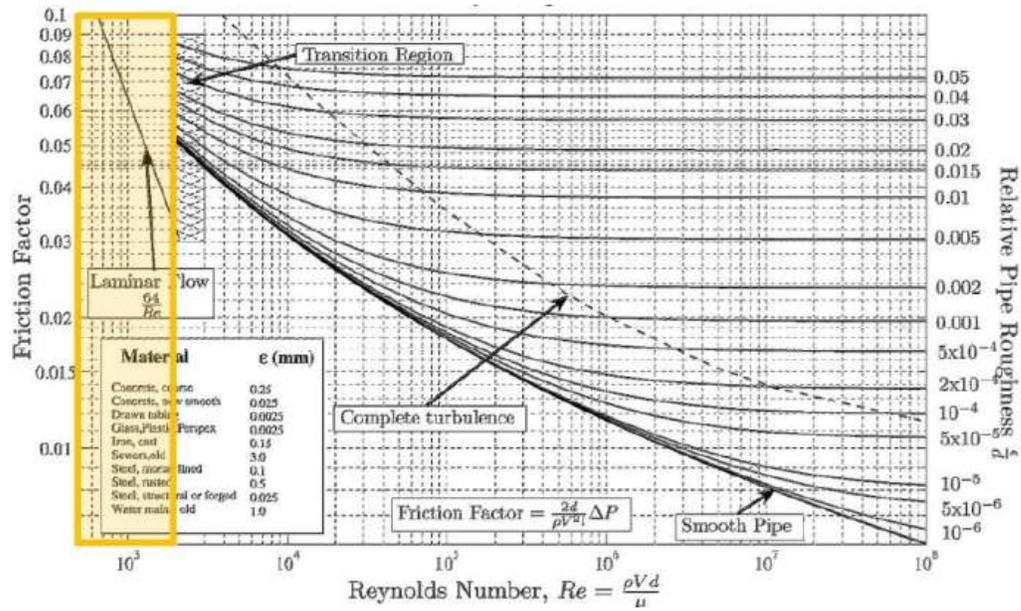
$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log_{10} \left(\frac{\varepsilon/D}{3.71} + \frac{2.51}{Re\sqrt{\lambda}} \right) \text{Colebrook - White (1938)}$$

Tableau 2. Différentes lois de corrélation en fonction du nombre de Reynolds et du type de rugosité.

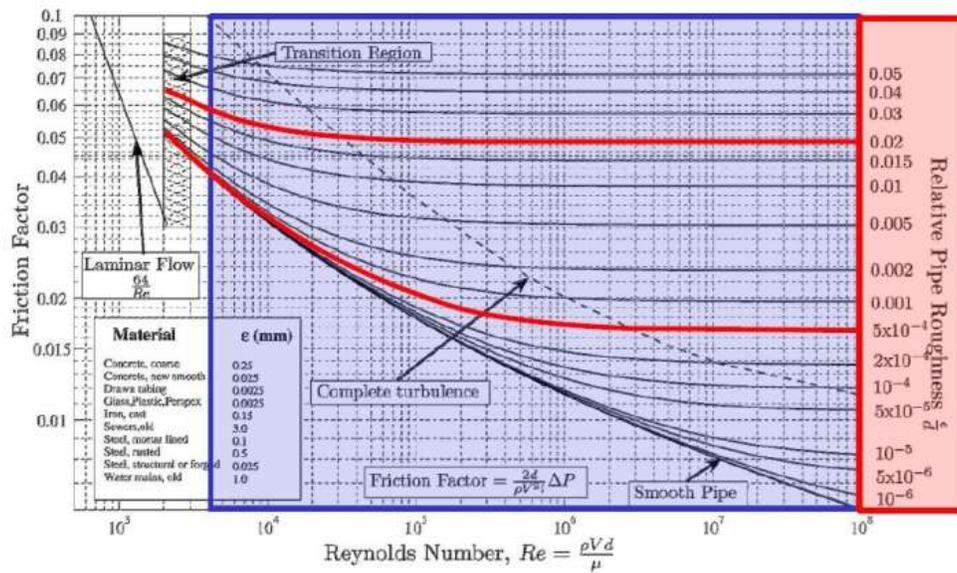
Conduite			Régime d'écoulement	Relation
Lisse	Rugueuse homogène	Rugueuse hétérogène		
+			Laminaire $Re < 2000$	<i>Poiseuille</i> $\lambda = \frac{64}{Re}$
+			Turbulent $2000 < Re < 5.10^5$	<i>Blasius</i> $\lambda = 0.316 Re^{-0.25}$
+			Turbulent $Re > 5.10^5$	<i>Karman</i> $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2\log_{10} \left(\frac{Re\sqrt{\lambda}}{2.51} \right)$
	+	+	Turbulent Rugueux	<i>Karman-Prandtl</i> $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log_{10} \left(\frac{\varepsilon/D}{3.71} \right)$
		+	Turbulent Rugueux et semi-rugueux	<i>Colebrook</i> $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log_{10} \left(\frac{\varepsilon/D}{3.71} + \frac{2.51}{Re\sqrt{\lambda}} \right)$

IV.6.4.3 Diagramme de Moody-Stanton reliant le coefficient de perte de charge régulière L au nombre de Reynolds Re et à la rugosité relative(ε/D).

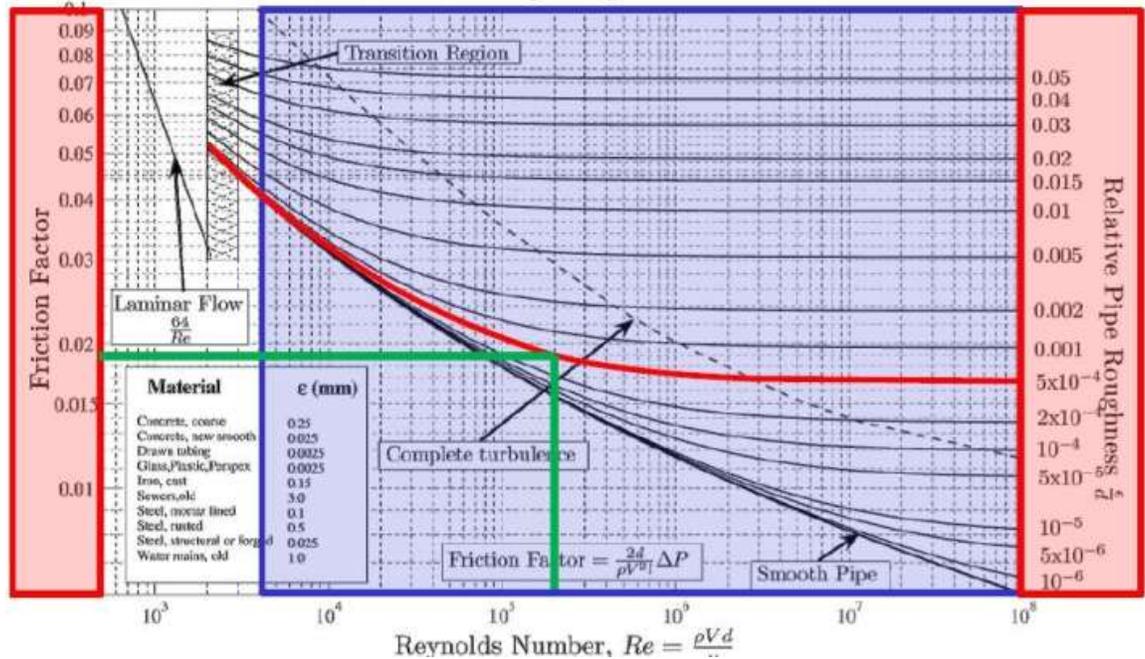
1- Utilisation en régime laminaire (Le coefficient se lit directement à partir de la droite 64/Re)



2- Utilisation en régime turbulent ; On calcule la rugosité relative et on sélectionne la courbe correspondante (0.02 ou $5 \cdot 10^{-4}$)



On détermine le nombre de Reynolds et on lit λ à l'intersection de la courbe et de la verticale



- ✓ On voit qu'au-delà de la courbe « Complete turbulence », le coefficient λ ne dépend plus que de la rugosité et est indépendant du nombre de Reynolds.
- ✓ La ligne « Smooth Pipe » correspond à la limite du diagramme en régime turbulent : les conduites ne sont plus rugueuses sur cette ligne.

IV.6.5 Les pertes de charge singulière

Ces pertes sont typiquement exprimées par la relation :

$$\Delta H_s = \sum_i \xi \frac{V_i^2}{2g}$$

Où V_i est la vitesse moyenne dans le tronçon ;

ξ est fonction des caractéristiques géométriques et du nombre de Reynolds. La valeur de ξ est donnée pour les différents cas les plus classiques dans les tableaux suivants :

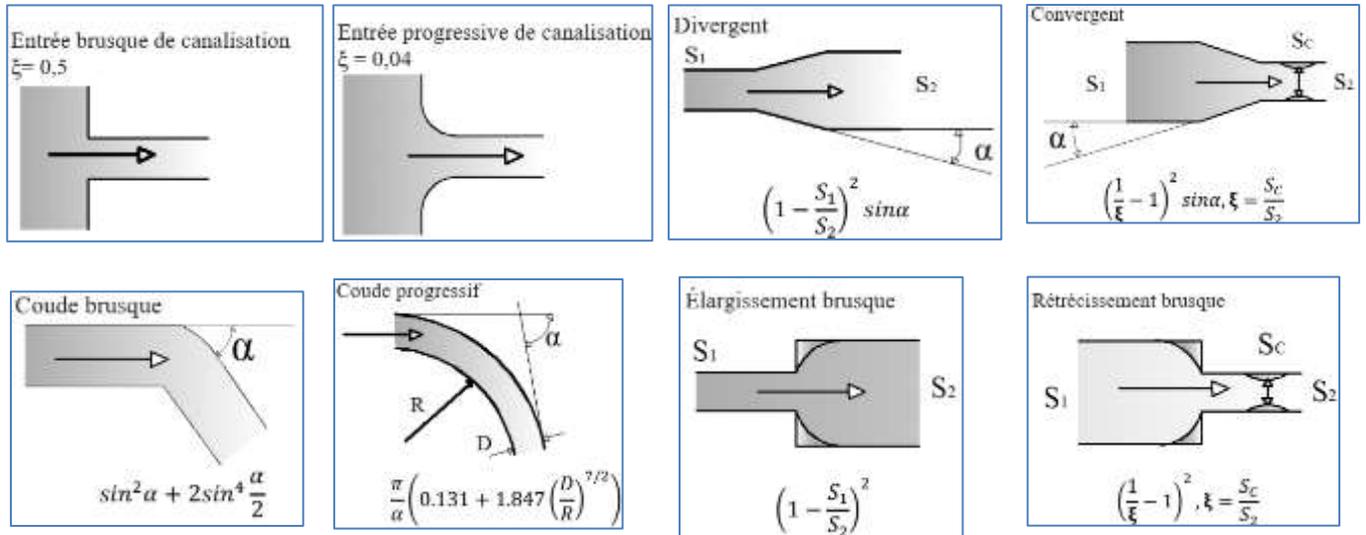
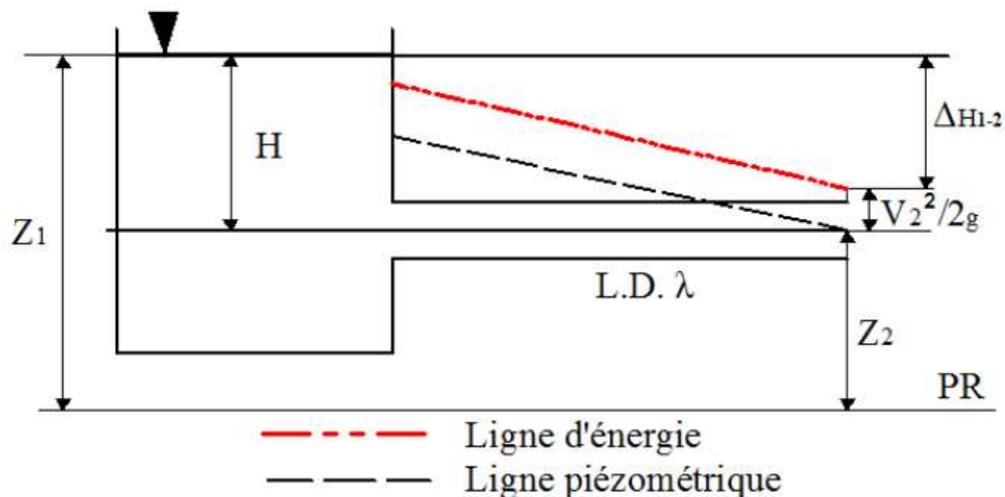


Figure 14. Quelques expressions du coefficient de pertes de charge singulières ξ pour des géométries d'écoulements couramment utilisées.

IV.7 Application de tracé de perte de charge

1- Conduite à Section Constante (Conduite simple)

1-1 Sortie à l'air libre



Application de l'équation de Bernoulli

$$p_1 = p_{atm}$$

$$v_1 \cong 0$$

$$p_2 = p_{atm}$$

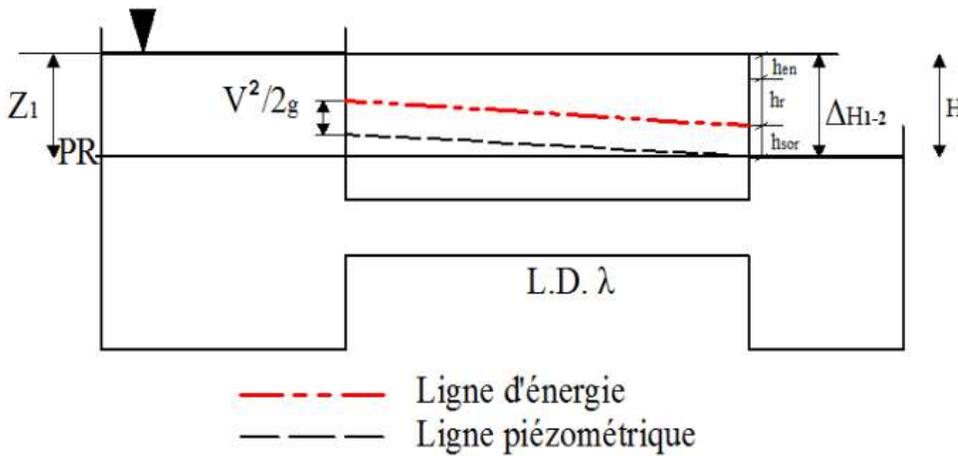
$$\frac{p_1}{\rho g} + 0 + Z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2 + \Delta h_{1-2}$$

$$Z_1 - Z_2 = H = \frac{V_2^2}{2g} + \Delta h_{1-2}$$

$$H = \frac{V_2^2}{2g} + \lambda \frac{LV_2^2}{2gD} + \xi_{en} \frac{V_2^2}{2g}$$

$$V_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda \frac{L}{D} + \xi_{en}}} \sqrt{2gH}$$

1-2 Sortie immergée



$$Z_1 = H$$

$$Z_2 = 0$$

$$p_1 = p_{atm}$$

$$v_1 \cong 0$$

$$p_2 = p_{atm}$$

$$v_2 \cong 0$$

$$\frac{p_1}{\rho g} + 0 + H = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + 0 + \Delta h_{1-2}$$

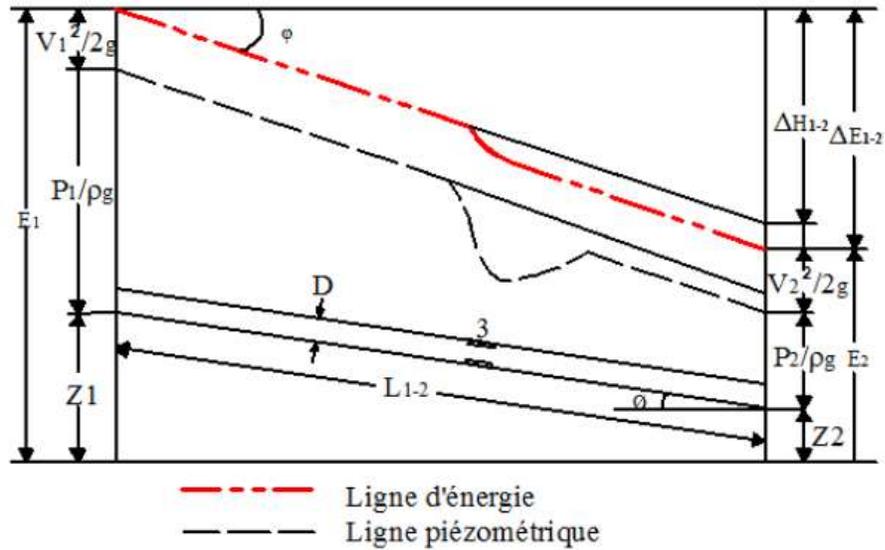
$$H = \Delta h_{1-2}$$

$$H = \lambda \frac{LV_2^2}{2gD} + \xi_{sor} \frac{V_2^2}{2g} + \xi_{en} \frac{V_2^2}{2g}$$

et donc:

$$V_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda \frac{L}{D} + \xi_{en} + \xi_{sor}}} \sqrt{2gH}$$

Considérons une conduite de longueur L1-2. On dispose en point 3 d'un rétrécissement brusque.



Supposons deux conduites horizontales avec une liaison du type élargissement ou rétrécissement brusque.

