الجمهوريـــة الجزائـريـــة الـديمقـراطيـــة الشعبيـــــة

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohammed Boudiaf M'sila

Institut De Gestion Des Techniques Urbaines

Département : Architecture

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة محمد بوضياف المسيلة

معهد تسيير التقنيات الحضرية

قسم: الهندسة المعمارية

PHYSIQUE DU BÂTIMENT

année universitaire
2023 / 2024

PLAN DE COURS

Contenu de la matière

- Vecteurs
- Forces
- Equilibre
- Centres de gravité

CHAPITRE 01

• Vecteurs

1. Définition scalaire et vecteur
2. Composantes d'un vecteur
3. Module d'un vecteur
4. Addition de vecteurs
    1. Méthode graphique
    2. Méthode analytique
5. Produit scalaire de deux vecteurs
6. Produit vectoriel de deux vecteurs
7. Produit mixte
8. Propriétés du produit scalaire et vectoriel
9. Règle des sinus dans un triangle

INTRODUCTION

Le calcul vectoriel, c'est un peu comme utiliser des flèches magiques dans l'espace pour comprendre et résoudre des problèmes dans le monde de l'architecture. Vous pouvez imaginer ces flèches, appelées vecteurs, comme des indications spéciales pour les déplacements, les forces et même la lumière dans vos créations architecturales. Par exemple, une flèche vers le haut peut représenter une force soutenant une structure, et en utilisant ces flèches, vous pouvez comprendre comment votre bâtiment réagit aux forces du vent ou supporte des charges. De plus, les vecteurs sont vos alliés pour résoudre des puzzles géométriques et aligner parfaitement les éléments de vos plans. En somme, le calcul vectoriel est comme votre boîte à outils magique qui rend la conception architecturale plus simple et plus cool. Une fois que vous maîtrisez ces flèches, vous serez prêts à construire des structures solides et impressionnantes !

Calcul vectoriel dans le domaine d’architecture ?

Pour les architectes, le calcul vectoriel est également un outil très utile pour plusieurs raisons :

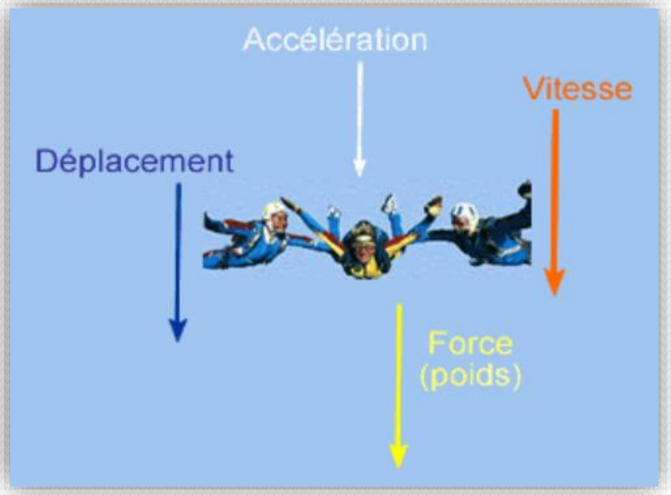
1. **Représentation de l'espace tridimensionnel** : Les vecteurs permettent de décrire les dimensions et les orientations des différents éléments architecturaux dans l'espace tridimensionnel. Cela inclut la modélisation des formes, des surfaces, des lignes et des points dans un système de coordonnées tridimensionnel.
2. **Analyse des forces et des charges** : En utilisant des vecteurs pour représenter les forces et les charges appliquées aux structures architecturales, les architectes peuvent analyser la stabilité, la résistance et la durabilité des bâtiments. Cela est essentiel pour concevoir des structures capables de supporter les contraintes physiques auxquelles elles seront soumises.
3. **Calcul des distances et des angles** : Le calcul vectoriel est utilisé pour calculer les distances entre différents points dans un plan ou dans l'espace, ainsi que pour déterminer les angles entre différentes surfaces, lignes ou axes. Cela permet aux architectes de concevoir des bâtiments avec des proportions et des angles précis.

4. **Conception assistée par ordinateur (CAO)** : Les logiciels de CAO utilisent souvent des concepts de calcul vectoriel pour créer des modèles architecturaux virtuels, les manipuler, les visualiser et les analyser. Les outils de CAO permettent aux architectes de travailler de manière efficace et précise lors de la conception de bâtiments et de structures.
5. **Optimisation des conceptions** : En utilisant des techniques de calcul vectoriel, les architectes peuvent optimiser les conceptions pour maximiser l'utilisation de l'espace, minimiser les coûts de construction, améliorer l'efficacité énergétique et répondre aux besoins esthétiques et fonctionnels des clients.

En somme, le calcul vectoriel est un outil essentiel pour les architectes car il leur permet de représenter, d'analyser, de concevoir et d'optimiser efficacement les structures architecturales dans un environnement tridimensionnel complexe.

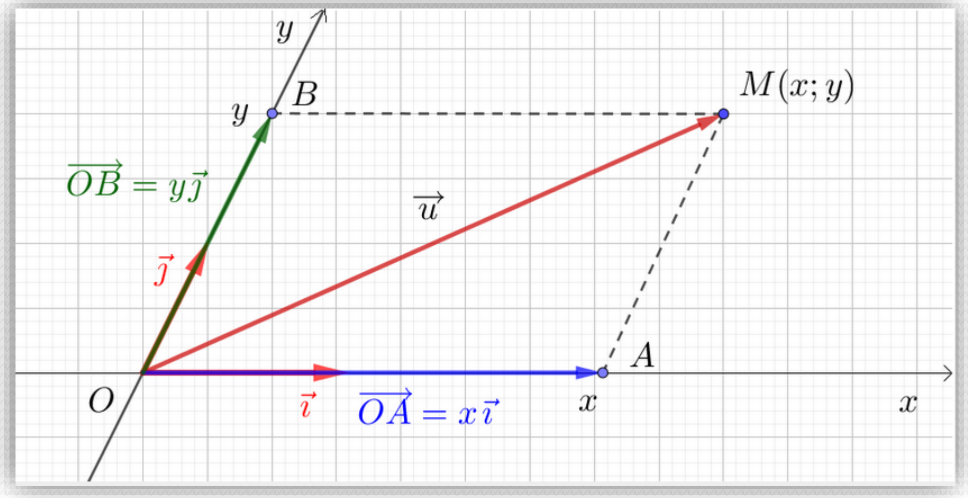
1. DEFINITION SCALAIRE ET VECTEUR

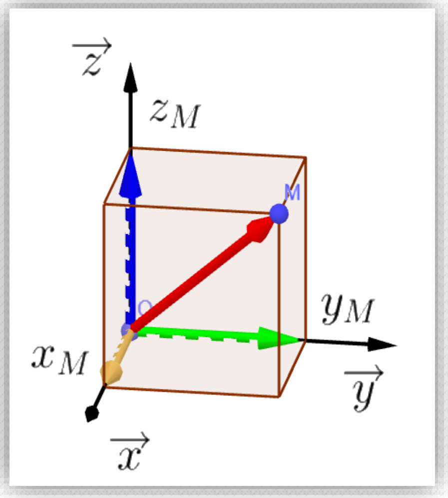
Un vecteur est une quantité qui a une taille (longueur) et une direction. Cela peut être quelque chose comme la vitesse d'un objet, le déplacement d'une position à une autre, ou même la force exercée sur un objet. On le représente souvent par une flèche où la longueur de la flèche représente la taille du vecteur, et la pointe de la flèche indique la direction.



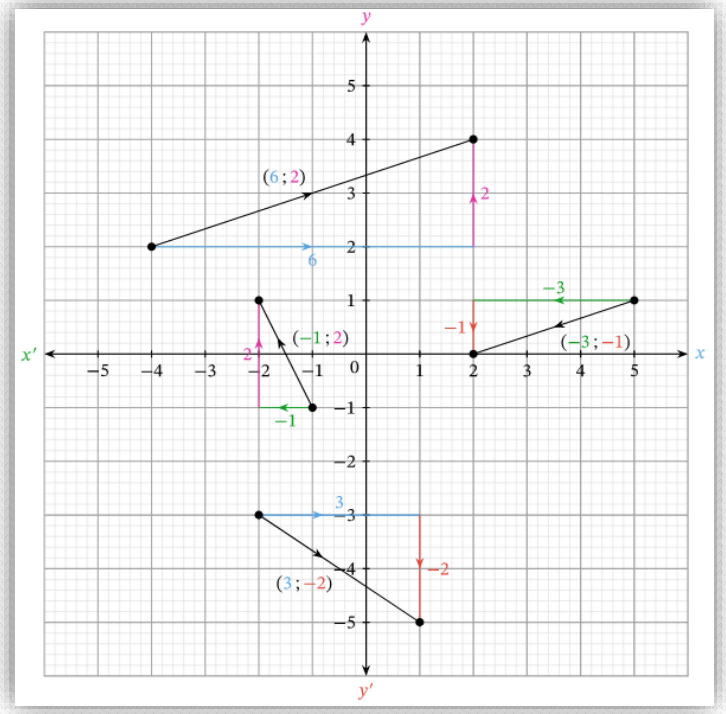
2. COMPOSANTES D'UN VECTEUR

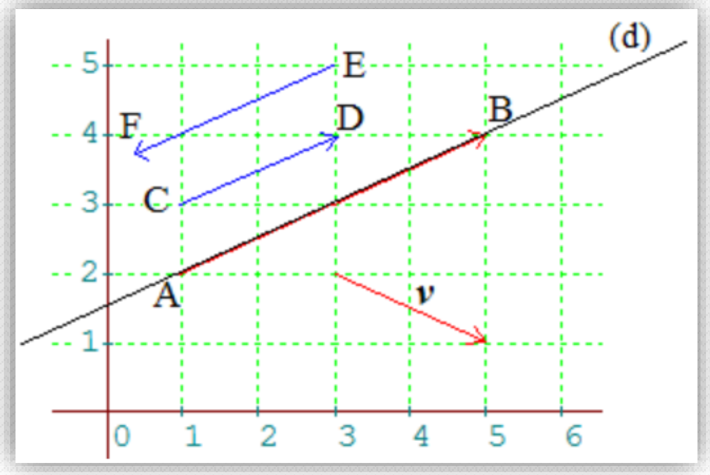
Les composantes d'un vecteur sont les valeurs qui décrivent la magnitude (ou grandeur) du vecteur dans différentes directions. En général, on peut décomposer un vecteur en deux ou trois composantes, selon la dimension de l'espace dans lequel il est défini.





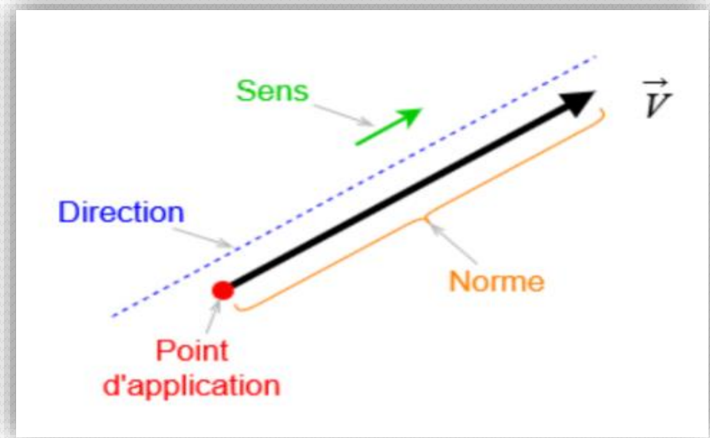
Les composantes d'un vecteur peuvent être positives, négatives ou nulles, selon la direction et la magnitude du vecteur dans chaque dimension. Cette décomposition permet souvent de simplifier les calculs et d'analyser le comportement du vecteur dans un système donné.





3. MODULE D'UN VECTEUR

Le module d'un vecteur, aussi appelé norme ou magnitude, est simplement la longueur du vecteur. Il représente la grandeur du vecteur indépendamment de sa direction. Le module d'un vecteur est toujours un nombre positif ou nul.



Direction : C'est la route ou le chemin que suit le vecteur. Si vous regardez une carte, la direction pourrait être nord, sud, est, ou ouest.

Sens : C'est la façon dont la flèche du vecteur pointe le long de sa direction. Deux vecteurs avec la même direction mais des sens opposés pointent dans des directions différentes.

En résumé, la direction est comme le chemin que vous suivez, et le sens est la façon dont vous suivez ce chemin. Cela aide à décrire où quelque chose va et comment il s'y rend.

Si vous avez un vecteur dans un espace à deux dimensions, disons $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ vy \end{bmatrix}$, alors le module | $\vec{v}$ | se calcule en utilisant le théorème de Pythagore : $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + vy^2}$

Dans un espace à trois dimensions, avec un vecteur $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ vy \\ vz \end{bmatrix}$, le module se calcule de manière similaire : $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

En général, pour un espace à n dimensions, la formule serait : $|v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots v_n^2}$

Le module d'un vecteur fournit une mesure de sa "taille" indépendamment de sa direction, ce qui est utile dans de nombreuses applications en mathématiques, en physique et en ingénierie.

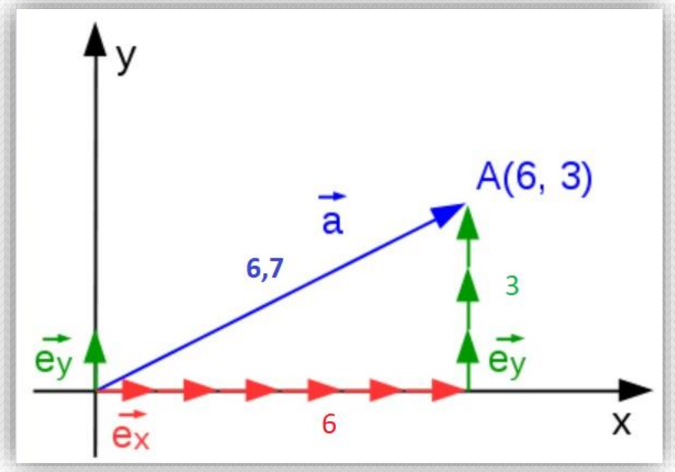
Exemple

Prenons un exemple numérique pour calculer le module d'un vecteur. Supposons que nous ayons un vecteur $\vec{v}$=⟨6,3⟩. Le module de ce vecteur, noté $|\vec{v}|$, peut être calculé en utilisant la formule : $||\vec{v}|| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ Donc, le module du vecteur $\vec{v}$= (6,3) est égal à 6,7.

Cela représente la longueur ou la grandeur du vecteur dans l'espace. En d'autres termes, si vous imaginez ce vecteur comme une flèche, sa longueur serait de 6,7 unités.

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$\|(6,3)\| = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} \simeq 6.70$$



4. ADDITION DES VECTEURS

L'addition de vecteurs consiste à combiner deux vecteurs pour obtenir un nouveau vecteur, appelé vecteur somme. Il existe deux principales méthodes pour ajouter des vecteurs : la méthode graphique et la méthode composant par composant.

1. *Méthode Graphique* **:**

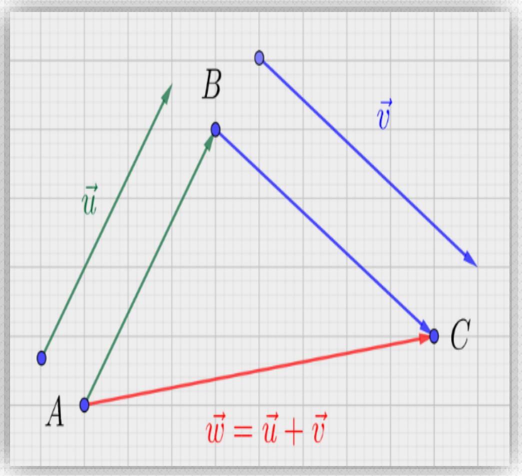
   - Dessinez les vecteurs à une échelle convenable, à partir d'un point commun (l'origine).
   - Placez le vecteur suivant à la fin du premier vecteur.
   - Le vecteur somme est alors le vecteur qui va du début du premier vecteur au bout du dernier.

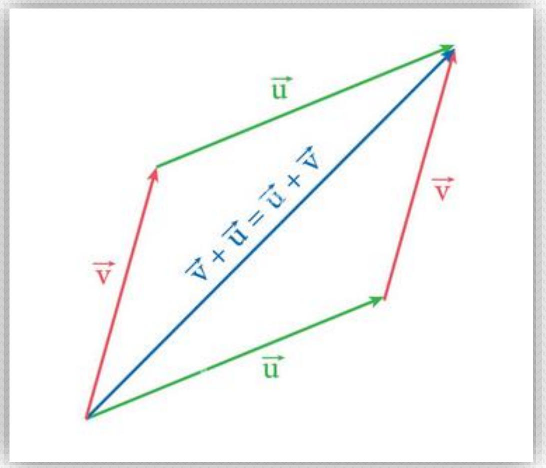
2. *Méthode Analytique (Composant par Composant) :*

   - Si vous avez les composantes des vecteurs (par exemple, $\vec{v}=\langle v_x, v_y\rangle$), ajoutez simplement les composantes correspondantes.
   - La composante x du vecteur somme sera la somme des composantes x des vecteurs d'origine, et la composante y sera la somme des composantes y.

Par exemple, si $\vec{u}=(ux, uy)$ et $\vec{v}=(vx, vy)$, alors la somme $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$ serait $(ux+vx\ , uy+vy)$.

L'addition de vecteurs suit les règles de la géométrie vectorielle, et il est important de noter que l'ordre dans lequel vous ajoutez les vecteurs peut influencer le résultat final. Cependant, la propriété commutative (l'ordre n'a pas d'importance) s'applique à l'addition vectorielle, ce qui signifie que $\vec{u}+\vec{v}= \vec{v}+\vec{u}$





Exemple 01

Prenons un exemple numérique pour illustrer l'addition de vecteurs. Supposons que nous ayons deux vecteurs $\vec{u}= (3, 4)$ et $\vec{v}= (-1, 2)$. Utilisons la méthode composant par composant pour trouver le vecteur somme $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$

$\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}=(3+(-1), 4+2)=(2,6)$ Donc, la somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est $\vec{w}= (2,6)$.

Exemple 02

Supposons que nous ayons deux vecteurs dans un système de coordonnées bidimensionnel, représentés par des flèches. Les vecteurs sont définis comme suit : **Vecteur A :** $\vec{A}= 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ **Vecteur B :** $\vec{B}= -1\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$

Ici, $\vec{\imath}$ représente la composante en direction de l'axe x, et $\vec{\jmath}$ représente la composante en direction de l'axe y. Pour additionner ces vecteurs, il suffit de sommer les composantes correspondantes. Ainsi, le résultat de l'addition $\vec{A}+\vec{B}$, serait : $\vec{A}+\vec{B}= (3+(-1))\ \vec{\imath}+ (2+4)\ \vec{\jmath}$ simplifiant cela, on obtient : $\vec{A}+\vec{B}=2\ \vec{\imath}+6\vec{\jmath}$. Donc, le vecteur résultant $\vec{A}+\vec{B}$ a une composante de 2 en direction de l'axe x et une composante de 6 en direction de l'axe y.

Graphiquement, cela signifie que si vous placez la pied du vecteur $\vec{B}$ à la tête du vecteur $\vec{A}$, le vecteur résultant $\vec{A}+\vec{B}$ serait la flèche qui pointe du début de $\vec{A}$ à la fin de $\vec{B}$.

5. PRODUIT SCALAIRE DE DEUX VECTEURS

Le produit scalaire de deux vecteurs, noté U.V, est une opération mathématique qui produit un nombre réel en multipliant les composantes correspondantes des deux vecteurs et en sommant ces produits.

Si vous avez deux vecteurs $U=[u_1,u_2,\ldots,u_n]$ et $V=[v_1,v_2,\ldots,v_n]$ en dimension n, alors le produit scalaire $u \cdot v$ est donné par la formule suivante : $U.V=u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2+\ldots+u_n\cdot v_n$

Cela peut également être écrit de manière plus concise en utilisant la notation sigma (∑) : $U.V = \sum_{n=1}^{n} ui.vi$

Supposons que nous ayons deux vecteurs :

$\vec{U}=(2,3,-1)$, $\vec{V}=(1,-2,4)$

Le produit scalaire serait calculé comme suit :

$\vec{U}\cdot\vec{V} =(2\cdot 1)+(3\cdot(-2))+((-1)\cdot 4) =2-6-4= -8$

PROPRIÉTÉS DU PRODUIT SCALAIRE ENTRE DEUX VECTEURS $\vec{U}$ ET $\vec{V}$

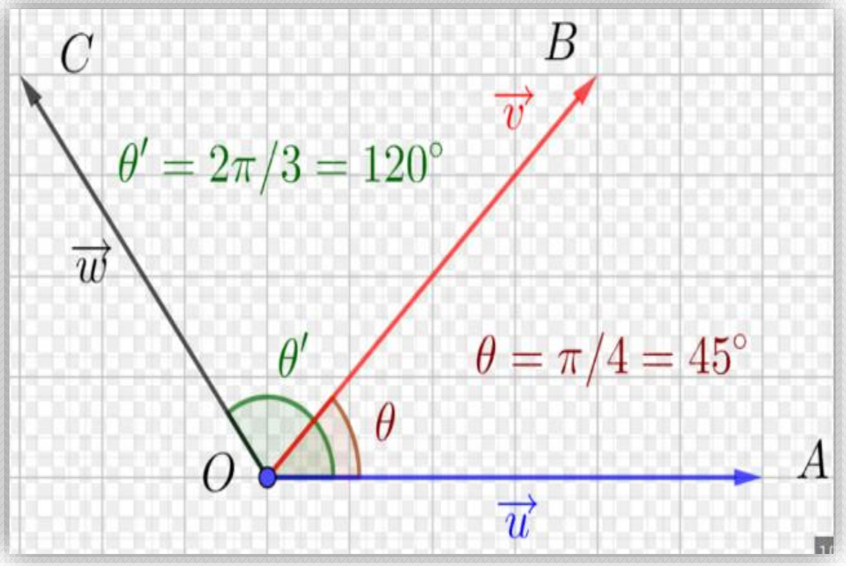
- **Commutativité** : $\vec{U}\cdot\vec{V}=\vec{V}\cdot\vec{U}$
- **Distribution par rapport à l'addition** : $\vec{U}\cdot(\vec{V}+\vec{K}) =\vec{U}\cdot\vec{V}+\vec{A}\cdot\vec{K}$
- **Multiplication par un scalaire** : $(k\vec{U})\cdot\vec{V}=k(\vec{U}\cdot\vec{V}) =\vec{U}\cdot(k\vec{V})$

  Ici, k est un scalaire.
- **Orthogonalité** : Deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont orthogonaux (perpendiculaires) si et seulement si leur produit scalaire est nul. $\vec{U}\cdot\vec{V}=0$
- **Identité du produit scalaire pour les vecteurs unitaires** :

  Si : $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, et $\vec{k}$ sont les vecteurs unitaires dans un espace tridimensionnel, alors : $\vec{\imath}\cdot\vec{\imath}= \vec{\jmath}.\vec{\jmath}= \vec{k}.\vec{k} = 1$ et $\vec{\imath}\cdot\vec{\jmath} = \vec{\jmath}.\vec{k} = \vec{k}\ \vec{\imath}= O$

Cela indique que le produit scalaire est maximal lorsque les vecteurs sont parallèles, nul lorsque les vecteurs sont orthogonaux, et négatif lorsque les vecteurs ont un angle supérieur à 90 degrés entre eux.

En termes géométriques, le produit scalaire est lié à l'angle θ entre deux vecteurs par la formule : U.V =‖u‖·‖v‖·cos(θ).



6. PRODUIT VECTORIEL DE DEUX VECTEURS

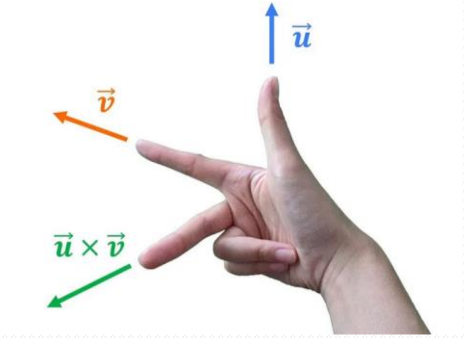
Le produit vectoriel, aussi appelé produit croisé, est une opération entre deux vecteurs en trois dimensions. Le résultat du produit vectoriel est un nouveau vecteur qui est orthogonal (perpendiculaire) aux deux vecteurs d'origine. La notation courante pour le produit vectoriel de deux vecteurs U et V est U×V.

Si $U=\langle U_1,U_2,U_3\rangle$ et $V=\langle V_1,V_2,V_3\rangle$, alors le produit vectoriel U×V est calculé comme suit : $U\times V=\langle U_2V_3-U_3V_2,\ U_3V_1-U_1V_3,\ U_1V_2-U_2V_1\rangle$

En d'autres termes, les composantes du résultat sont obtenues en soustrayant les produits croisés des composantes correspondantes des vecteurs d'origine.

Il est également possible de représenter cela sous forme matricielle avec le déterminant d'une matrice 3x3 :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2 \\ x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3 \\ x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 \end{pmatrix}$$



Exemple

Supposons que nous ayons deux vecteurs $A=\langle 2,3,1\rangle$ et $B=\langle -1,4,5\rangle$. Calculons leur produit vectoriel $A\times B$.

$A\times B=\langle (3\times 5-1\times 4),(1\times(-1)-2\times 5),(2\times 4-3\times(-1))\rangle = \langle 15-4,-1+(-10),8+3\rangle = \langle 11,-11,11\rangle$

Ainsi, le produit vectoriel $A\times B$ dans cet exemple est $\langle 11,-11,11\rangle$. Ce résultat est un nouveau vecteur orthogonal aux vecteurs A et B.

7. PRODUIT MIXTE

Le produit mixte, également appelé produit mixte triple ou produit scalaire triple, est une opération qui implique trois vecteurs. Il donne un scalaire comme résultat. Le produit mixte des vecteurs A, B, et C est noté $(A \times B) \cdot C$, et il est calculé comme suit : $(A \times B) \cdot C = D \cdot C$ où $D = A \times B$. La composante D est le résultat du produit vectoriel de A et B.

Si $A = \langle A_1, A_2, A_3 \rangle$, $B = \langle B_1, B_2, B_3 \rangle$, et $C = \langle C_1, C_2, C_3 \rangle$, alors le produit mixte est calculé comme suit : $(A \times B) \cdot C = \langle A_2B_3 - A_3B_2, A_3B_1 - A_1B_3, A_1B_2 - A_2B_1 \rangle \cdot \langle C_1, C_2, C_3 \rangle$

$= (A_2B_3 - A_3B_2)C_1 + (A_3B_1 - A_1B_3)C_2 + (A_1B_2 - A_2B_1)C_3$

En termes de déterminants, cela peut être exprimé comme : $\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix}$

En d'autres termes, le produit mixte mesure le volume du parallélépipède formé par les trois vecteurs. Si le volume est nul, cela signifie que les trois vecteurs sont coplanaires, c'est-à-dire qu'ils résident dans le même plan. Si le volume est positif, les vecteurs forment une orientation spécifique, et s'il est négatif, ils forment une orientation opposée.

Exemple

Supposons que nous ayons trois vecteurs $A=\langle 2,3,1\rangle$, $B=\langle -1,4,5\rangle$ et $C=\langle 0,-2,3\rangle$. Calculons leur produit mixte $(A\times B)\cdot C$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$= 2\times(4\times3-5\times(-2))-3\times(-1\times3-5\times0)+1\times(-1\times(-2)-4\times0),$

$= 2\times(12+10)+3\times(3)+1\times(2), \ =48+9+2 \ = 59$

Ainsi, dans cet exemple, le produit mixte $(A\times B)\cdot C$ est égal à 59. Cela représente le volume du parallélépipède défini par les vecteurs A, B, etC.

8. PROPRIETES DU PRODUIT SCALAIRE ET VECTORIEL

Le produit scalaire et le produit vectoriel sont deux opérations fondamentales dans l'algèbre linéaire et la géométrie vectorielle. Voici un aperçu des propriétés de chacun :

Produit Scalaire :

Définition : Le produit scalaire de deux vecteurs u et v est défini comme la somme des produits de leurs composantes respectives. $\mathbf{u \cdot v} = u_1v_1+u_2v_2+\ldots+u_nv_n$

Produit Vectoriel :

Définition : Le produit vectoriel de deux vecteurs **u** et **v** est un vecteur **w** dont la norme est le produit de la norme des deux vecteurs par le sinus de l'angle entre eux, et la direction est donnée par la règle du tire-bouchon. $w = u \times v$

Le produit scalaire et le produit vectoriel sont deux opérations importantes en algèbre linéaire et en géométrie vectorielle. Voici un aperçu de leurs propriétés :

Produit Scalaire :

1. **Symétrie** : $u \cdot v = v \cdot u$
2. **Distributivité sur l'addition** : $u \cdot (v+w) = u \cdot v + u \cdot w$
3. **Multiplication par un scalaire** : $(cu) \cdot v = c(u \cdot v) = u \cdot (cv)$
4. **Produit par un vecteur nul** : $0 \cdot v = 0$
5. **Produit par un vecteur avec lui-même** : $v \cdot v = \|v\|^2$, où $\|v\|$ est la norme de v.
6. **Orthogonalité** : Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

Produit Vectoriel :

1. **Anti-symétrie** : $u \times v = -v \times u$
2. **Distributivité sur l'addition** : $u \times (v+w) = u \times v + u \times w$
3. **Multiplication par un scalaire** : $(cu) \times v = c(u \times v) = u \times (cv)$
4. **Produit par un vecteur nul** : $0 \times v = 0$
5. **Produit par un vecteur avec lui-même** : $v \times v = 0$, car le résultat est un vecteur parallèle à v.
6. **Orthogonalité** : Le produit vectoriel de deux vecteurs non nuls est un vecteur orthogonal aux deux vecteurs originaux.

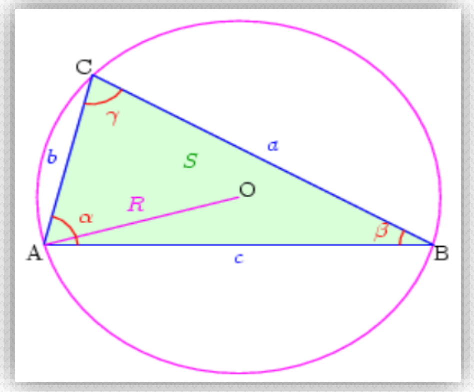
Ces propriétés sont fondamentales pour manipuler des vecteurs dans divers contextes mathématiques et physiques.

9. REGLE DES SINUS DANS UN TRIANGLE

La règle des sinus dans un triangle concerne la relation entre les longueurs des côtés d'un triangle et les mesures de ses angles. Elle s'exprime de la manière suivante :

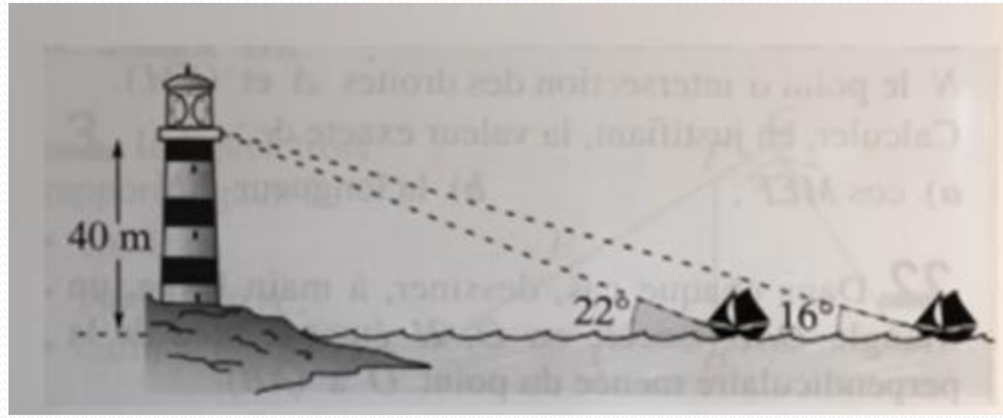
Dans un triangle ABC, où a, b et c sont les longueurs des côtés opposés respectivement aux angles A, B et C, et R est le rayon du cercle circonscrit au triangle, la règle des sinus est donnée par :

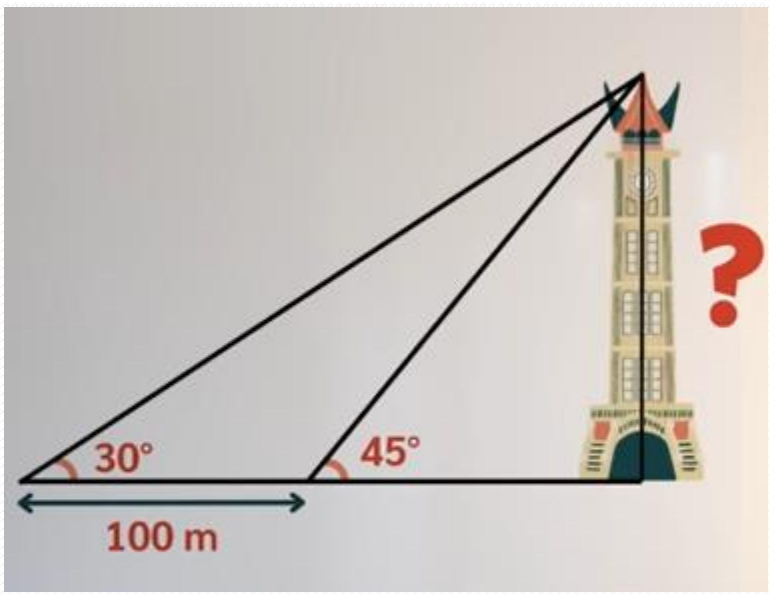
$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)} = 2R$$



Cette formule permet de calculer la longueur d'un côté ou la mesure d'un angle d'un triangle si les longueurs des deux autres côtés et les mesures des angles correspondants sont connues. Elle est utile dans la résolution de triangles quelconques, pas seulement ceux qui sont rectangles.

Exemple





Calculé la hauteur H de la tour ?