Université de M'sila	Interogation-Correction	Faculté : Maths-informatique
L 2 Mathématiques- G 2 et 5		Année : 2023/2024
Module Analyse 4	Semestre-4	Durée : $35m$

Barème

Exercice : 1 8pt

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3}{x^2+y^2} & : (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : (x,y) = (0,0) \end{cases}$

2 (1) Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2 (2) Étudier la dérivabilité de f en point $(0,0)$.

2 (3) f est elle differentiable en point $(0,0)$.

1.5 (4) (a) Donner le développement limité de f à l'ordre un au point $(1,-1)$.

0.5 (b) Déduire une valeur approchée de $f(1.1,-0.9)$.

Barème

Correction d'exercice 1: 8pt

(1) On étude la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}^2$.

(a) f est clairement continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Car, elle est une fonction rationnelle.

0.5 (b) On étude la continuité de la fonction f en point $(0,0)$.

0.5 Posons : $\begin{cases} x = r\cos\theta & : r > 0,\ \theta \in]0,\ 2\pi[\\ y = r\sin\theta. \end{cases}$

0.5 Donc, $|f(x,y)| = \left|\dfrac{2x^3}{x^2+y^2}\right| = \left|\dfrac{2(r\cos\theta)^3}{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}\right| = |2r\cos^3\theta| \leq 2r \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0,$

0.5 d'où $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, c'est à dire f est continue en point $(0,0)$.

(2) f est dérivable en point $(0,0)$ ssi $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ sont existent. Alors,

1 (a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} 2 = 2.$

1 (b) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim\limits_{y\to 0} 0 = 0.$

D'où f est dérivable en point $(0,0)$, et $\nabla f(0,0) = (2,0)$.

(3) f est différentiable en point $(0,0)$ ssi

0.5 $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\partial_x f(0,0)(x-0)-\partial_y f(0,0)(y-0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

On a bien

0.5 $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\partial_x f(0,0)x-\partial_y f(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-2xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \neq 0.$$

Université de M'sila		**Faculté : Maths-informatique**
L 2 Mathématiques- G 2 et 5	**Interogation-Correction**	**Année : 2023/2024**
Module Analyse 4	**Semestre-4**	**Durée : 35m**

0.5 Car $\left|\dfrac{-2xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right| = \left|\dfrac{2(r\cos\theta)(r\sin\theta)^2}{((r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2)^{\frac{3}{2}}}\right| = 2|\cos\theta\sin^2\theta|,$ (dépend de θ).

0.5 Donc f n'est pas différentiable en point $(0,0)$.

0.5 4 a f est différentiable en point $(1,-1)$ car une fonction fractionnelle dont le dénominateur ne s'annule pas, donc, développable.

0.5 Alors, le développement limité de f à l'ordre un au point $(1,-1)$ est

$$f(1+h,-1+k) = f(1,-1) + h\partial_x f(1,-1) + k\partial_y f(1,-1) + o\Big(\|(h,k)\|\Big).$$

0.5 + 0.25 Comme, $f(1,-1) = 1$ et $\begin{cases} \partial_x f(x,y) = \dfrac{2x^2(1+3y^2)}{(x^2+y^2)^2} \\ \partial_y f(x,y) = \dfrac{-4x^3y}{(x^2+y^2)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \partial_x f(1,-1) = 2 \\ \partial_y f(1,-1) = 1 \end{cases}$

0.25 Donc, par conséquent, $f(1+h,-1+k) = 1 + 2h + k + o\Big(\|(h,k)\|\Big)$.

b La valeur approchée de $f(1.1,-0.9)$.

On sait que $f(1+h,-1+k) \approx 1+2h+k$ si (h,k) au voisinage de $(0,0)$.

Comme, $\begin{cases} 1.1 = 1+0.1 \\ -0.9 = -1+0.1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = 0.1 \\ k = 0.1 \end{cases}$

0.5 D'où, $f(1.1,-0.9) = 1 + 2(0.1) + (0.1) = 1.3$.

Fin **Dr. Bouafia Dahmane** **Bon chance**