CORRIGE TD N° 4 RESOLUTION DES EQUATTIONS DIFFERENTIELLES ORDINAIRES (PROBLEME DE CAUCHY)

Exercice 1 :

1/Calcul la solution approximative de l'équation différentielle en $t=1$ par la méthode d'Euler :

On a: $f(t,y) = y + t$

L'intervalle est $[0,1] \Rightarrow h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{10} = 0.1$

La méthode d'Euler est donnée par :

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h\,f(t_i, y_i) = y_i + h\,(y_i + t_i), & i = 0, 1, \ldots, 10 \\ t_i = t_0 + i\,h, & y_0 = y(0) = 1 \end{cases}$$

En utilisant cette méthode on obtient successivement des approximations de $y(0.1)$, $y(0.2)$, $y(0.3)$, ... notées y_1, y_2, y_3, ...

Pour $i=0$: $y_1 = y_0 + h(y_0 + t_0) = 1 + 0.1(1+0) = 1.1$

Pour $i=1$: $y_2 = y_1 + h(y_1 + t_1) = 1.1 + 0.1(1.1 + 0.1) = 1.22$

Le tableau suivant rassemble les résultats des dix premières itérations :

i	t_i	y_i
0	0	1.0000
1	0.1	1.1000
2	0.2	1.2200
3	0.3	1.3620
4	0.4	1.5282
5	0.5	1.7210
6	0.6	1.9431
7	0.7	2.1974
8	0.8	2.4871
9	0.9	2.8158
10	1.0	3.1874

Alors l'approximation de $y(t)$ en $t=1$ par la méthode d'Euler est :

$$y_{10} = y(1) = 3.1874$$

2/ Comparaison du résultat obtenu avec la solution exacte :

La solution exacte est : $y(t) = 2\,e^{t} - t - 1$

$y_{exacte}(1) = 2\,e^{1} - 1 - 1 = 3.4365$

Donc l'erreur commise est :

$E = |y_{exacte}(1) - y(1)| = |3.4365 - 3.1874| = 0.2491$

Exercice 2 :

1/ Calcul la solution approximative de l'équation différentielle en $t=1$ par la méthode Runge-Kutta d'ordre 2 :

On a: $f(t, y) = y - \dfrac{2t}{y}$, $y(0) = 1$

L'intervalle est $[0, 0.2]$, $h = 0.2$

La méthode de *RK2* est donnée par :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2),$$
$$k_1 = h\,f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = h\,f(x_i + h, y_i + k_1)$$

En utilisant cette méthode on obtient les approximations successives $y_1, y_2, \ldots, y_5$.

Pour $i=0$:

$y_1 = y_0 + \dfrac{1}{2}(k_1 + k_2),$

$k_1 = h\,f(t_0, y_0) = 0.2$

$k_2 = h\,f(t_0 + h, y_0 + k_1) = h\,f(0.2, 1.2) = 0.8666$

Alors : $y_1 = 1 + \dfrac{h}{2}(k_1 + k_2) = 1.1866$

Alors l'approximation de $y(t)$ en $t=0.2$ par la méthode de *RK2* est :

$$y_1 = y(0.2) = 1.1866.$$

2/ Comparaison du résultat obtenu avec la solution exacte :

La solution exacte est : $y(t) = \sqrt{2\,x + 1}$

La solution exacte en $t=0.2$ donne : $y_{exacte}(0.2) = \sqrt{1.4} = 1.1832.$

Donc l'erreur commise est :

$E = |y_{exacte}(0.2) - y(0.2)| = |1.1866 - 1.1832| = 0.0034$