Intégration Numérique

3.1 Introduction

On veut évaluer l'intégrale d'une fonction f sur un intervalle $[a,b]$. Si l'on connait sa primitive *F*, on peut calculer directement I : $I(f)=\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$

Mais dans de nombreux cas, la fonction f ne dispose pas d'expression analytique pour sa primitive où elle est trop compliquée (problème physique).

Exemples : $\int_a^b e^{-x^2}dx,\ \int_a^b \sqrt{1+\cos^2 x}\,dx,\ \int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-\sin x}}dx,\ \int_a^b \frac{1}{\log x}dx$

Pour cette raison, on fait appel à des méthodes numériques, afin de calculer une approximation de l'intégrale $I(f)$. Dans ces méthodes d'intégration, l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle borné $[a,b]$ est remplacée par une somme finie. Dans ce chapitre, on va étudier quelques méthodes usuelles (rectangle, trapèze et Simpson) dédiées à l'intégration numérique.

3.2 Formule de quadrature de type interpolation

Pour approcher la valeur nombre exacte de l'intégrale $I(f)=\int_a^b f(x)\,dx$ par une formule de quadrature globale, l'idée est la suivante :

1) On remplace (x) par son polynôme d'interpolation (x).
2) On calcule $I_n(f)=\int_a^b P_n(x)\,dx$
3) On estime l'erreur du résultat $E_n(f)=|I(f)-I_n(f)|$

Supposons qu'il y en ait *n + 1* points d'interpolation tel que $a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_n \le b$ et que *P(x)* soit le polynôme d'interpolation unique de f en ces points.

On peut utiliser le formulaire de Lagrange pour ce polynôme d'interpolation afin d'obtenir :

$$I(f)=\int_a^b f(x)\,dx \approx I_n(f)=\int_a^b P_n(x)\,dx=\int_a^b \sum_{i=0}^n f(x_i)L_i(x)\,dx=\sum_{i=0}^n f(x_i)\left(\int_a^b L_i(x)\,dx\right)=\sum_{i=0}^n w_i\, f(x_i)$$

Avec $$w_i=\int_a^b L_i(x)\,dx$$

En générale, une méthode d'intégration numérique s'écrit :

$$I(f) = I_n(f) + E_n(f)$$

Où $$I_n(f) = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$$

Avec :

x_i , $i = 0,1,2,.....,n$: Nœuds ou points d'intégration numérique.

w_i , $i = 0,1,2,.....,n$: Poids de la formule de quadrature (d'intégration numérique).

$E_n(f)$: L'erreur d'intégration

On peut calculer l'erreur comme suit :

$$E_n(f) = I(f) - I_n(f) = \int_a^b \left(f(x) - P_n(x)\right)dx = \int_a^b \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\,dx$$
$$= \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}\int_a^b \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\,dx, \qquad c \in [a,b]$$

3.3 Formules de Newton-Cotes

Les formules de quadrature de type interpolation les plus simples sont les formules de Newton-Cotes. Elles sont basées sur une interpolation polynomiale équidistante.

Théorème

Soient $a \le x_0 < x_1 < ... < x_n \le b$ *n+1* points équidistants avec $x_i = x_0 + i\,h,\ i = 0,1,...,n$, $h = \frac{b-a}{n}$. Alors la formule générale de quadrature de Newton-Cotes est donnée par :

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)\sum_{i=0}^{n} w_i^{(n)} f(x_i)$$

Où $$w_i^{(n)} = \frac{1}{b-a}\int_a^b L_i(x)\,dx$$

3.3.1 Formule des rectangles (n = 0)

3.3.1.1 Formule de base

Cette formule est obtenue en remplaçant *f* par un polynôme constant égale à la valeur de *f* en un point $\alpha \in [a,b]$: $P_0(x) = f(\alpha)$ (polynôme qui interpole *f* en le point $(\alpha, f(\alpha))$ et donc de degré

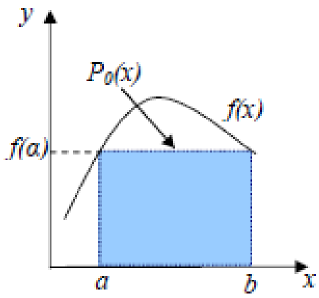

Figure 1: méthode simple de rectangle

0) (Fig.1), ce qui donne :

$$I_R(f) = I_0(f) = \int_a^b P_0(x)\,dx = \int_a^b f(\alpha)\,dx = (b-a)\,f(\alpha)$$

Donc $w_0^{(0)} = 1$

Formule du rectangle à gauche : $I_{RG}(f) = (b-a)\,f(a)$

Formule du rectangle à droite : $I_{RD}(f) = (b-a)\,f(b)$

Dans le cas particulier où le point α est le milieu de $[a,b]$ $\alpha = \dfrac{a+b}{2}$, on obtient :

$$I_{PM}(f) = I_0(f) = \int_a^b P_0(x)\,dx = (b-a)\,f(\frac{a+b}{2})$$

C'est la formule simple du *rectangle Point-Milieu.*

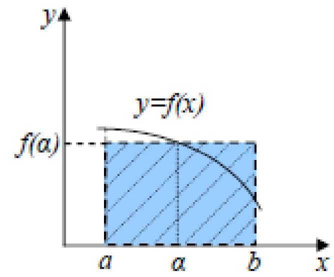

Figure 2: méthode simple du rectangle Point-Milieu

3.3.1.2 Formule composite :

On décompose l'intervalle d'intégration $[a,b]$ en n sous-intervalles de même longueur $h = \dfrac{b-a}{n}$ et on pose $x_i = x_0 + i\,h,\ i = 0,1,\ldots,n$. En appliquant la formule du rectangle à chaque sous intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ (Fig. 2), on obtient la formule composite des rectangles :

$$I_{R_C}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(\alpha_i)\,dx = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(\alpha_i)$$

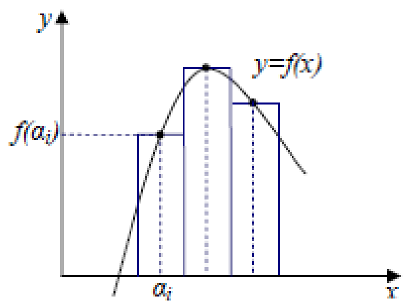

Figure 3: méthode composée des rectangles

Dans le cas des rectangles point-milieu :

$$I_{PM_C}(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(\frac{x_i + x_{i+1}}{2})$$

3.3.1.3 Formule des erreurs d'intégration :

a- Erreur de Rectangles :

L'erreur d'intégration de la méthode des rectangles est :

$$E_R(f) = I(f) - I_R(f) = f'(c)\int_a^b (x-a)\,dx = \frac{f'(c)}{2}(b-a)^2$$

$$|E_R(f)| \le \frac{(b-a)^2}{2}M \quad \text{et} \quad |E_{R_C}(f)| \le \frac{(b-a)^2}{2n}M$$

où $M = \underset{c\in[a,b]}{Max}|f'(c)|$

b- Erreur du Point-Milieu :

$$E_{PM}(f) = I(f) - I_{PM}(f) = f''(c)\int_a^b (x-\frac{a+b}{2})\,dx = \frac{f''(c)}{24}(b-a)^3$$

$$|E_{PM}(f)| \le \frac{(b-a)^3}{24}M \quad et \quad |E_{PM_C}(f)| \le \frac{(b-a)^3}{24n^2}M$$

où $M = \underset{c\in[a,b]}{Max}|f''(c)|$

Exemple :

On veut calculer l'intégrale suivant : $I = \int_0^{1/2} e^{-x^2}\,dx$

1/ Donner une valeur approchée de I en utilisant la méthode du point-milieu.

2/ Calculer I par la formule du rectangle à gauche en décomposant l'intervalle d'intégration en trois parties. Evaluer l'erreur commise.

Solution **:**

On pose $f(x) = e^{-x^2}$

1) Formule simple :

$$a = 0,\ b = \frac{1}{2},\ \alpha = \frac{a+b}{2} = \frac{1}{4}.$$

La formule de l'intégration par la méthode simple du rectangle Point-Milieu est :

$$I_{PM}(f) = (b-a)\,f(\frac{a+b}{2})$$

$$= \left(\frac{1}{2}-0\right)f(\frac{1}{4}) = 0.469707$$

2) Formule composite :

La formule d'intégration par la méthode composée du rectangle est :

$$I_{R_C}(f)=\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f(\alpha_i),\ h=\frac{b-a}{n}=\frac{1/2}{3}=\frac{1}{6}$$

a_i	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
$f(a_i)$	1	0,972583	0,894849	0,778801

La formule du rectangle à gauche :

$$I_{R_C}(f)=\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{2}f(\alpha_i)=\frac{b-a}{n}\left(f(\alpha_0)+f(\alpha_1)+f(\alpha_2)\right)$$

$$=h\left(f(0)+f\left(\frac{1}{6}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)\right)=\frac{1}{6}(1+0.972583+0.894849)=0.477905$$

L'erreur de la méthode des rectangles est : $\left|E_{R_C}(f)\right|\leq\frac{(b-a)^2}{2n}M$ où $M=\underset{c\in[a,b]}{Max}\left|f'(c)\right|$

On a :

$$f(x)=e^{-x^2}\ \Rightarrow\ f'(x)=-2xe^{-x^2}$$

Sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, $M=\left|f'(\frac{1}{2})\right|=0.778801$

$$\left|E_{R_C}(f)\right|\leq\frac{1/4}{6}(0.77881)=0.03245$$

3.3.2 Formule des Trapèzes (n =1)

3.3.2.1 Formule de base

On remplace la fonction *f* par le polynôme d'interpolation $P_1(x)$ qui passe par les deux points d'extrémité $(a,f(a))$ et $(b,f(b))$ (Fig. 4). On obtient :

$$I_T(f)=I_1(f)=\int_a^b P_1(x)\,dx=\int_a^b\left[f(a)\frac{x-b}{a-b}+f(b)\frac{x-a}{b-a}\right]dx$$

$$=f(a)\left(\frac{b-a}{2}\right)+f(b)\left(\frac{b-a}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{b-a}{2}\right)(f(a)+f(b))$$

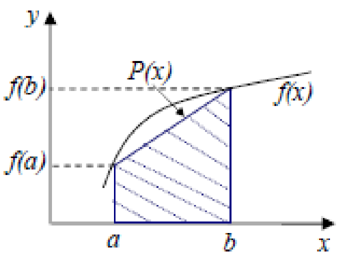

Figure 4: méthode simple des Trapèzes

$w_0^{(1)} = w_1^{(1)} = \frac{1}{2}$

L'intégrale est donc remplacée par la surface du trapèze :

$$I_T(f) = \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$$

3.3.2.2 Formule composite

On généralise la formule de Trapèze à chaque sous intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ (Fig. 5), on obtient :

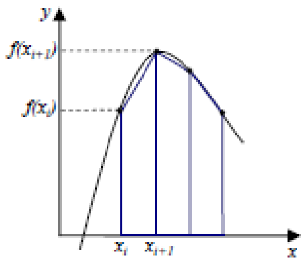

Figure 5: méthode composée des Trapèzes

$$I_{T_C}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i)\,dx = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(f(x_i) + f(x_{i+1}))}{2}$$
$$= \frac{b-a}{n}\left[\frac{1}{2}(f(a) + f(b)) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]$$

3.3.2.3 Formule des erreurs d'intégration des Trapèzes :

$$E_T(f) = I(f) - I_T(f) = \frac{f''(c)}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx = \frac{f''(c)}{2}\left(-\frac{(b-a)^3}{6}\right) = -\frac{f''(c)}{12}(b-a)^3$$

$$|E_T(f)| \le \frac{(b-a)^3}{12}M \quad et \quad |E_{T_C}(f)| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2}M$$

où $M = \underset{c\in[a,b]}{Max}|f''(c)|$

Exemple :

On veut calculer l'intégrale suivant : $I = \int_0^{1/2} e^{-x^2}\,dx$

Utiliser la formule simple puis la formule composite des Trapèzes avec trois sous-intervalles. Evaluer l'erreur commise.

Solution :

On pose $f(x) = e^{-x^2}$

1) Formule simple :

La formule d'intégration par la méthode des Trapèzes est :

$$I_T(f) = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) = \frac{1}{4}\left(f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = 0.4447$$

2) Formule composite :

$$I_{T_C}(f)=\frac{b-a}{n}\left[\frac{1}{2}(f(a)+f(b))+\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)\right],\ h=\frac{b-a}{n}=\frac{1}{6}$$

$$I_{T_C}(f)=\frac{b-a}{n}\left[\frac{1}{2}(f_0+f_3)+f_1+f_2\right]=h\left(\frac{1}{2}\left(f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)\right)+f\left(\frac{1}{6}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)\right)=0.459472$$

L'erreur de la méthode des Trapèzes est : $\left|E_{T_C}(f)\right|\leq\frac{(b-a)^3}{12n^2}M$ où $M=\underset{c\in[a,b]}{Max}\left|f''(c)\right|$

On a :

$$f(x)=e^{-x^2},\quad f'(x)=-2x\,e^{-x^2},\quad f''(x)=(4x^2-2)e^{-x^2}$$

Sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, $M=\left|f''(0)\right|=2$

On obtient : $\left|E_{R_C}(f)\right|\leq\frac{1/8}{108}(2)=0.0023$

3.3.3 Formule de Simpson (n = 2)

3.3.3.1 Formule de base

La méthode de Simpson consiste à remplacer la fonction f par le polynôme d'interpolation $P_2(x)$ qui passe par les trois points équidistants: $x_0=a, x_1=\frac{a+b}{2}, x_2=b$, avec $h=\frac{b-a}{2}$ (Fig. 6)

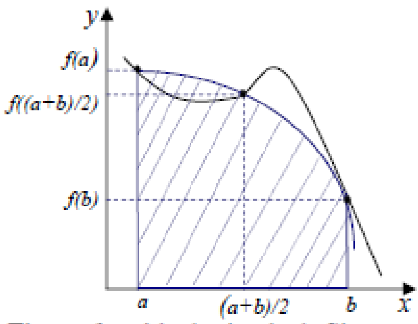

Figure 6: méthode simple de Simpson

ce qui donne :

$$I_S(f)=I_2(f)=\int_a^b P_2(x)\,dx$$

$$=\int_a^b\left[f(a)\frac{(x-\frac{a+b}{2})(x-b)}{h^2}+f(b)\frac{(x-a)(x-\frac{a+b}{2})}{h^2}+f\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{(x-a)(x-b)}{h^2}\right]dx$$

La formule de Simpson s'écrit :

$$I_S(f)=\left(\frac{b-a}{6}\right)\left(f(a)+4f\left(\frac{b-a}{2}\right)+f(b)\right)$$

Donc

$$w_0^{(2)}=w_2^{(2)}=\frac{1}{6}\ \text{et}\ w_1^{(2)}=\frac{4}{6}$$

3.3.3.2 Formule composite :

On généralise la formule de Simpson pour $2n$ sous intervalles égaux de longueur $h = \frac{b-a}{2n}$, on a alors :

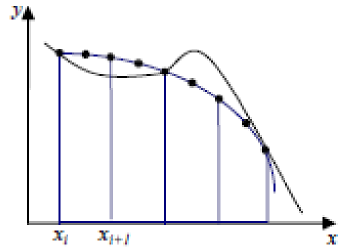

Figure 7: méthode composée de Simpson

$$I_{S_c}(f) = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + f(x_{2n}) + 4\sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) \right)$$

$$= \frac{h}{3}\left(f(a) + f(b) + 4\sum_{i\,impair} f(x_i) + 2\sum_{i\,pair} f(x_i) \right)$$

3.3.3.3 Formule des erreurs d'intégration de Simpson :

La méthode de Simpson est caractérisée par l'erreur :

$$E_S(f) = I(f) - I_S(f) = \frac{f'''(c)}{6}\int_a^b (x-a)(x-\frac{a+b}{2})(x-b)\,dx = \frac{f''(c)}{2}\left(-\frac{(b-a)^3}{6} \right) = -\frac{f^{(4)}(c)}{90}(b-a)^5$$

$$|E_S(f)| \le \frac{(b-a)^5}{90} M \quad \text{et} \quad |E_{S_c}(f)| \le \frac{(b-a)^5}{180\,n^4} M \quad \text{où}$$

$$M = \underset{c\in[a,b]}{Max}\left| f^{(4)}(c) \right|$$

Exemple :

Calculer l'intégrale $I = \int_0^{1/2} e^{-x^2}\,dx$ par la formule de Simpson en décomposant l'intervalle d'intégration en trois parties. Evaluer l'erreur commise.

Solution :

La formule composite de Simpson est :

$$I_{S_c}(f) = \frac{h}{3}\left(f(a) + f(b) + 4\sum_{i\,impair} f(x_i) + 2\sum_{i\,pair} f(x_i) \right),\ h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{6}$$

$$I_{S_c}(f) = \frac{h}{3}[f_0 + f_3 + 4f_1 + 2f_2] = \frac{h}{3}\left(f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right) + 4f\left(\frac{1}{6}\right) + 2f\left(\frac{1}{3}\right) \right) = 0.414380$$

L'erreur de la méthode de Simpson est : $|E_{S_c}(f)| \le \frac{(b-a)^5}{180\,n^4} M$ où $M = \underset{c\in[a,b]}{Max}\left| f^{(4)}(c) \right|$

On a :

$$f(x) = e^{-x^2} \Rightarrow f'(x) = -2x\,e^{-x^2} \Rightarrow f''(x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$$
$$\Rightarrow f^{(3)}(x) = -8x\left(x^2 - \frac{3}{2} \right)e^{-x^2} \Rightarrow f^{(4)}(x) = (16x^4 - 4x^2 + 12)e^{-x^2}$$

Sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, $M=\left|f^{(4)}(0)\right|=12$

On obtient :

$$\left|E_{S_C}(f)\right|\leq\frac{1/32}{180\,(3)^4}(12)=2{,}57.10^{-5}$$