Résolution des équations différentielles ordinaires (Problème de Cauchy)

4.1 Introduction

Les équations différentielles sont l'un des outils mathématiques les plus importants utilisés dans la modélisation des problèmes en sciences physiques. Trouver la solution d'une équation différentielle ordinaire *EDO* est un problème courant, souvent difficile ou impossible à résoudre de façon analytique. Il est alors nécessaire de recourir à des méthodes numériques pour résoudre ces équations.

La précision des diverses méthodes de résolution proposées dans ce cours est proportionnelle à l'ordre de ces méthodes. Nous commençons par la méthode simple d'Euler (a une interprétation géométrique) qui nous conduira progressivement à des méthodes plus complexes telles les méthodes de Runge-Kutta d'ordre 4, qui permettent d'obtenir des résultats d'une grande précision.

Dans ce chapitre, On s'intéresse aux équations différentielles du premier ordre de la forme :

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

Le problème de Cauchy (problème de la condition initiale) consiste à trouver une fonction $y(t)$ définie sur l'intervalle $I = [a,b]$ telle que :

$$\begin{cases} \dfrac{d\,y(t)}{dt} = y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0,\ t_0 \in I, y_0 \in IR \end{cases}$$

La condition $y(t_0) = y_0$ est une condition initiale ou la condition de Cauchy.

Si on suppose que la fonction f est continue par rapport aux deux variables t, y et que f vérifie une condition de Lipschitz (fonction Lipschitzienne) par rapport à y c'est à dire que :

$\exists K > 0$ tel que $\forall t \in [a,b], \forall y_1, y_2 \in IR$, on a $|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \le K|y_1 - y_2|$

En pratique pour vérifier cette condition, on calcule : $K = \underset{\substack{t \in [a,b] \\ y \in IR}}{Max} \left| \dfrac{\partial f(t,y)}{\partial y} \right|$

Alors que la solution du problème de Cauchy <u>existe</u> et est <u>unique</u> sur $[a,b]$ (C'est le Théorème de Cauchy).

4.2 Méthodes numériques

4.2.1 Principe générale

Considérons le problème de Cauchy à condition initiale suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

On suppose que ce problème admet une solution unique dans l'intervalle $[a,b]$.

Pour obtenir une approximation numérique de cette solution *y(t)* sur l'intervalle $[a,b]$, on divise l'intervalle donné en n points équidistants $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n$, avec $t_0=a$ et $t_n=b$ qui déterminent le pas d'intégration $h = \frac{b-a}{n}$ et le point d'abscisse t_i est donné par $t_i = a + i\,h$ (pour $i = 0, 1, \ldots, n$).

La solution exacte au point t_i est notée $y(t_i)$, la solution approchée est notée y_i $(y(t_i) \approx y_i)$, une méthode numérique est un système d'équations aux différences impliquant un certain nombre d'approximations successives $y_n, y_{n+1}, \ldots, y_{n+k}$ où k désigne le nombre de pas de la méthode.

Si $k = 1$, on parle de méthode à un pas (à pas séparés) : ils permettent de calculer y_{n+1} en n'utilisant que la valeur y_n.

Si $k > 1$, la méthode à pas multiples (à pas liés) : ils permettent d'obtenir y_{n+1} en utilisant les valeurs $y_n, y_{n+1}, \ldots, y_{n-k}$ (k fixé).

La solution à estimer peut être approchée par un développement limité de Taylor.

Le développement de la série de Taylor de $y(t_{n+1})$ jusqu'à l'ordre m autour du point t_n s'écrit :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h\,y'(t_n) + \frac{h^2}{2!} y^{(2)}(t_n) + \ldots + \frac{h^m}{m!} y^{(m)}(t_n) + O(h^{m+1})$$

4.2.2 Méthode d'Euler

La méthode d'Euler est la plus ancienne et la plus simple des méthodes numériques d'approximation des équations différentielles ordinaires du premier ordre. Si les fonctions *y(t)* et y'(t) sont continues, on peut écrire le développement en série de Taylor pour *y(t)* au voisinage de t_n.

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h\,y'(t_n) + \mathrm{O}(h^2)$$

Le terme $\mathrm{O}(h^2)$ étant le terme d'erreur (à l'ordre 2). On peut alors réécrire cette équation en négligeant les termes du deuxième ordre :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h\,y'(t_n)$$

Soit y_i une approximation de $y(t_i)$ $(y_i \approx y(t_i))$, la méthode d'Euler d'ordre 1 s'écrit

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h\,f(t_i, y_i),\ i = 0, 1, \dots, n \\ y_0 = y(t_0) \end{cases}$$

Interprétation Géométrique :

La méthode d'Euler revient à remplacer localement en chaque point t_i la courbe solution passant par y_i par sa tangente.

La tangente à la courbe $y=y(t)$ en $t=t_0$ a pour équation :

$Y_0(t) = y(t_0) + y'(t_0)(t - t_0)$

$\Rightarrow Y_0(t) = y(t_0) + f(t_0, y(t_0))(t - t_0)$

Ou: $Y_0(t) = y_0 + f(t_0, y_0)(t - t_0)$

Au point $t=t_1$: $Y_0(t_1) = y_0 + f(t_0, y_0)(t_1 - t_0)$

$\Rightarrow Y_0(t_1) = y_0 + h\ f(t_0, y_0)$

En approximant $Y_0(t_1) \approx y_1$, on peut écrire :

$y_1 = y_0 + h\ f(t_0, y_0)$

De même considérons la droite d'équation :

$Y_1(t) = y(t_1) + y'(t_1)(t - t_1)$

Au point $t=t_2$: $Y_1(t_2) = y_1 + f(t_1, y_1)(t_2 - t_1)$

$\Rightarrow Y_1(t_2) = y_1 + h\,f(t_1, y_1) Y_0(t_1)$

En faisant de même nous aurons :

$$y_{i+1} = y_i + h\,f(t_i, y_i)$$

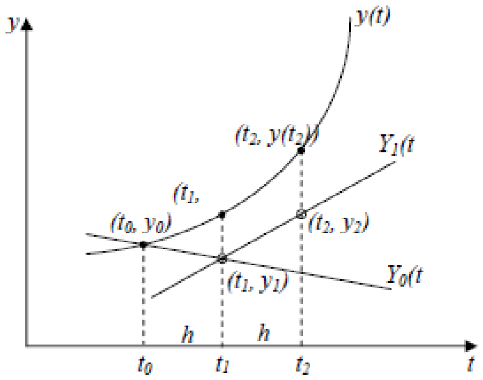

Figure : Méthode d'Euler

Exemple :

Soit l'équation différentielle à condition initiale: $y'(t) = -y(t) + t + 1$ et $y(0)=1$.

1) Approcher la solution de cette équation en $t=0.5$ à l'aide de la méthode d'Euler en subdivisant l'intervalle de travail en 5 parties égales (effectuer les calculs avec six décimales).

2) Comparer les résultats obtenus avec la solution exacte : $y(t) = e^{-t} + t$

Solution:

On a : $y'(t) = -y(t)+t+1,\ y(0)=1,\ n=5$ et l'intégrale d'intégration est $[0, 0.5]$.

Vérifions la condition de Lipchitz sur $t \in [0,\ 0.5]$ et $y \in IR$:

Remarquons que la fonction $f(t,y) = -y(t)+t+1$ est continue sur $[0, 0.5]\times IR$. De plus, elle est Lipschitzienne par rapport à y sur $[0,0.5]$ avec la constante de Lipschitz $K=1$. En effet, pour tout $t \in [0, 0.5]$ et $y_1, y_2 \in IR$, on a :

$$\begin{aligned}|f(t,y_1)-f(t,y_2)| &= |-y_1+t+1+y_2-t-1| \\ &= |(-1)||y_1-y_2| \\ &\le |y_1-y_2|\end{aligned}$$

Où

$$K = Max\left|\frac{\partial f(t,y)}{\partial y}\right| = Max\left|\frac{\partial(-y+t+1)}{\partial y}\right| = |-1| = 1 \text{ Condition vérifiée.}$$

Alors le problème de Cauchy admet une solution unique.

Calcul la solution approchée par la méthode d'Euler : Où

On a : $f(t,y) = -y(t)+t+1,\ t_0 = 0,\ y_0 = y(0) = 1,\ h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{0.5-0}{5} = 0.1$

La méthode d'Euler est donnée par :

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h\,f(t_i,y_i) = y_i + h(-y_i+t_i+1), & i = 0, 1, \dots, 5 \\ t_i = t_0 + i\,h = i\,h, \qquad y_0 = y(0) = 1 \end{cases}$$

En utilisant cette méthode on obtient successivement des approximations de *y(0.1), y(0.2), y(0.3), …* notées $y_1, y_2, y_3, \dots$.

Pour $i=0$: $y_1 = y_0 + h(-y_0+t_0+1) = 1+0.1(-1+0+1) = 1.000$

Pour $i=1$: $y_2 = y_1 + h(-y_1+t_1+1) = 1+0.1(-1+0.1+1) = 1.010$

Le tableau suivant rassemble les résultats des cinq premières itérations.

La solution analytique de cette équation différentielle est : $y(t) = e^{-t} + t$. Ce qui permet de comparer les solutions numériques (approchées) et analytiques (exactes) et de constater la croissance de l'erreur.

i	t_i	y_i *(solution approchée)*	$y(t_i)$*(solution exacte)*	$\lvert y(t_i)-y_i\rvert$
0	0	1.000000	1.000000	0.000000
1	0.1	1.000000	1.004837	0.004837
2	0.2	1.010000	1.018731	0.008731
3	0.3	1.029000	1.040818	0.011818
4	0.4	1.056100	1.070302	0.014220
5	0.5	1.090490	1.106531	0.016041

Alors l'approximation de $y(t)$ en $t=0.5$ par la méthode d'Euler est : $y_5 = 1.090490$

4.2.3 Méthode de Runge-Kutta

Les méthodes de Runge-Kutta sont les généralisations de la méthode d'Euler à des ordres supérieurs à un (ordre élevé). Ces méthodes permettent d'obtenir une plus grande précision (elles génèrent des solutions numériques plus proches des solutions analytiques) que la méthode d'Euler. Ces méthodes sont de la forme :

$$y_{i+1} = y_i + b_1 k_1 + b_2 k_2 + b_3 k_3 + \dots$$

Où

$$\begin{aligned} k_1 &= h\, f(x_i, y_i) \\ k_2 &= h\, f(x_i + c_2 h, y_i + c_2 k_1) \\ k_3 &= h\, f(x_i + c_3 h, y_i + (c_3 - a_{32}) k_1 + a_{32} k_2) \\ &\vdots \end{aligned}$$

4.2.3.1 Runge Kutta d'ordre 2 : RK2

Les méthodes de Runge-Kutta l'ordre 2 sont de la forme :

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + b_1 k_1 + b_2 k_2, \\ k_1 &= h\, f(x_i, y_i) \\ k_2 &= h\, f(x_i + c_2 h, y_i + c_2 k_1) \end{aligned}$$

Le calcul des valeurs de b_1, b_2, c_1, c_2, k_1 et k_2 nécessite le calcul de $y^{(2)}$, $y^{(3)}$ et $y^{(4)}$ à partir de $y' = f(x, y)$ et le développement de Taylor. On obtient :

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2), \\ k_1 &= h\, f(x_i, y_i) \\ k_2 &= h\, f(x_i + h, y_i + k_1) \end{aligned}$$

4.2.3.2 Runge Kutta d'ordre 4 : RK4

C'est la méthode la plus précise et la plus utilisée, elle est d'ordre 4. Elle calcule la valeur de la fonction en quatre points intermédiaires selon :

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}\left[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4 \right], \\ k_1 &= h\, f(t_i,\ y_i) \\ k_2 &= h\, f(t_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{k_1}{2}) \\ k_3 &= h\, f(t_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{k_2}{2}) \\ k_4 &= h\, f(t_i + h,\ y_i + k_3) \end{aligned}$$

Exemple :

Résoudre le problème de Cauchy précédant par les deux méthodes *RK2* et *RK4* les cinq premières valeurs de la solution en prenant un pas d'intégration *h=0.1*.

Comparer à la solution exacte.

Solution

On a : $f(t,y) = -y(t)+t+1, y(0)=1 \; et \; h=0.1$.

La méthode de *RK2* est donnée par :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1+k_2),$$
$$k_1 = h\,f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = h\,f(x_i+h, y_i+k_1)$$

En utilisant cette méthode on obtient les approximations successives $y_1, y_2, \ldots, y_5$.

- Pour $i=0$:

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}(k_1+k_2),$$
$$k_1 = h\,f(t_0, y_0) = h(-y_0+t_0+1) = 0.1(-1-1+0+1) = 0$$
$$k_2 = h\,f(t_0+h, y_0+k_1) = h\,f(h, y_0) = 0.1(-1+0.1+1) = 0.01$$

Alors $$y_1 = 1+\frac{1}{2}(0+0.01) = 1.005$$

-Pour $i=1$:

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{2}(k_1+k_2),$$
$$k_1 = h\,f(t_1, y_1) = h(-y_1+t_1+1) = 0.1(-1.005+0.1+1) = 0.0095$$
$$k_2 = h\,f(t_1+h, y_1+k_1) = 0.1(-1.0145+0.3+1) = 0.02855$$

Alors $$y_2 = 1.005+\frac{1}{2}(0.0095+0.02855) = 0.019025$$

Le tableau suivant rassemble les résultats des cinq premières itérations :

i	t_i	y_i *(solution approchée)*	$y(t_i)$*(solution exacte)*	*Erreur*
0	*0*	*1.000000*	*1.000000*	*0.000000*
1	*0.1*	*1.005000*	*1.004837*	*0.000163*
2	*0.2*	*1.019025*	*1.018731*	*0.000294*
3	*0.3*	*1.041218*	*1.040818*	*0.000400*
4	*0.4*	*1.070802*	*1.070302*	*0.000482*
5	*0.5*	*1.107075*	*1.106531*	*0.000544*

Alors l'approximation de *y(t)* en *t=0.5* par la méthode de *RK2* est : $y_5 = 1.107075$

On remarque que l'erreur est plus petite avec la méthode de *RK2* qu'avec la méthode d'Euler.

La méthode de *RK4* est donnée par :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left[k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4\right],$$
$$k_1 = h\,f(t_i\,,\,y_i)$$
$$k_2 = h\,f(t_i + \frac{h}{2},\; y_i + \frac{k_1}{2})$$
$$k_3 = h\,f(t_i + \frac{h}{2},\; y_i + \frac{k_2}{2})$$
$$k_4 = h\,f(t_i + h,\; y_i + k_3)$$

-Pour *i=0* :

$$\begin{cases} k_1 = h\,f(t_0, y_0) = 0 \\ k_2 = h\,f(t_0 + \frac{h}{2},\, y_0 + \frac{k_1}{2}) = 0.005 \\ k_3 = h\,f(t_0 + \frac{h}{2},\, y_0 + \frac{k_2}{2}) = 0.00475 \\ k_4 = h\,f(t_0 + h,\, y_0 + k_3) = 0.00952 \end{cases}$$

Ce qui donne : $y_1 = y_0 + \frac{1}{6}\left[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right] = 1.004837$

-Pour *i=1*

$$\begin{cases} k_1 = h\,f(t_1, y_1) = 0.09516 \\ k_2 = h\,f(t_1 + \frac{h}{2},\, y_1 + \frac{k_1}{2}) = 0.0140404 \\ k_3 = h\,f(t_1 + \frac{h}{2},\, y_1 + \frac{k_2}{2}) = 0.013814 \\ k_4 = h\,f(t_1 + h,\, y_1 + k_3) = 0.018730 \end{cases}$$

Ce qui donne : $y_2 = y_1 + \frac{1}{6}\left[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right] = 1.01873$

Le tableau suivant rassemble les résultats des cinq premières itérations :

i	t_i	y_i *(solution approchée)*	$y(t_i)$*(solution exacte)*	*Erreur*
0	*0*	*1.000000*	*1.000000*	*0.000000*
1	*0.1*	*1.004837*	*1.004837*	0.819×10^{-7}
2	*0.2*	*1.018730*	*1.018731*	0.148×10^{-6}
3	*0.3*	*1.040818*	*1.040818*	0.210×10^{-6}
4	*0.4*	*1.070320*	*1.070302*	0.242×10^{-6}
5	*0.5*	*1.106530*	*1.106531*	0.274×10^{-6}

Alors l'approximation de $y(t)$ en $t=0.5$ par la méthode de *RK4* est : $y_5 = 1.106530$

On constate que l'erreur se situe autour de 10^{-6} ce qui se compare avantageusement avec les erreurs obtenues à l'aide de méthodes d'ordre moins élevé (Euler, Runge-Kutta d'ordre 2).