Méthode de résolution directe des systèmes d'équations linéaires

5.1 Introduction

Les systèmes d'équations linéaires apparaissent dans un grand nombre de domaines, à la fois directement dans la modélisation de situations physiques et indirectement dans la solution numérique d'autres modèles mathématiques. Ces applications se produisent dans pratiquement tous les domaines des sciences physiques, biologiques et sociales. En raison de l'importance généralisée des systèmes linéaires, de nombreuses recherches ont été consacrées à leur solution numérique. D'excellents algorithmes ont été développés pour la plupart types de problèmes courants pour les systèmes linéaires, et certains d'entre eux sont définis et illustrés dans ce chapitre. Le type de problème le plus courant consiste à résoudre un système linéaire carré dont le nombre d'équations est égal à ceux d'inconnues et dont le déterminant est non nul. C'est-à-dire les systèmes qui ont une solution unique. Un système d'équations linéaire de n équations à n inconnues s'écrit alors :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Les a_{ij} sont appelés les coefficients du système, les x_i sont les inconnues (ou les solutions) et les b_i forment le second membre.

Alors ce système peut s'écrire sous forme matricielle :

$$Ax = b$$

Avec

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = (a_{ij}) \text{ et } \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Où A est une matrice carrée d'ordre n ; x et b sont des vecteurs colonnes de dimension n.

Notons que dans a_{ij}, l'indice i représente le numéro de la ligne et j représente le numéro de la colonne.

La notation précédente est équivalente à :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & \vdots & b_n \end{pmatrix}$$

Cette matrice est appelée la matrice augmentée du système.

La résolution du système $A\,x = b$ peut s'effectuer par plusieurs méthodes :

- Une méthode classique (Cramer).

- Les méthodes directes.

- Les méthodes itératives.

5.2 Rappels sur les systèmes linéaires

5.2.1 Méthode de Cramer

Cette méthode repose sur le calcul du déterminant de la matrice A et les déterminants associés aux inconnues x_i $(i=1,\dots,n)$. Si $\det A \neq 0$ alors le système $A\,x = b$ admet une solution unique telle que :

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A},\; x_2 = \frac{\det A_2}{\det A},\; \dots,\; x_n = \frac{\det A_n}{\det A}$$

Où A_i est une matrice obtenue en remplaçant la $i^{ème}$ colonne de A par le vecteur b.

Pour résoudre le système $A\,x = b$ par la méthode de Cramer nécessite au total $(n+1)^2 n! - 1$ opérations élémentaires ou n est le rang de la matrice.

Si n est élevé, le nombre d'opérations augmente et par conséquent le temps de calcul (elle devient très lente en temps de calculs).

5.2.2 Méthode d'inversion de la matrice :

Si la matrice A est inversible alors le système linéaire $A\,x = b$ admet une unique solution :

$$x = A^{-1} b$$

Où A^{-1} est la matrice inverse de A.

Dans cette méthode, on utilise au total $n!(n^2+n+1)+3n^2-n$ opérations élémentaires. Cette méthode n'est donc pas plus avantageuse que Cramer.

Alors, on fait appel à des méthodes numériques ayant des temps de calcul acceptables (rapides et plus précises) et dont le nombre d'opérations est d'ordre n^3.

5.3 Méthodes directes

Une méthode de résolution d'un système d'équations est dite directe si on obtient des valeurs finies après un nombre limité d'opérations qui permettent de résoudre le système linéaire soit par triangularisation ou soit par factorisation de la matrice A. Ces méthodes sont utilisées pour les matrices pleines et les petits systèmes (n peu élevé).

5.3.1 Méthode d'élimination de Gauss:

La méthode de Gauss engendre un algorithme fini exact dont l'idée est de transformer le système $Ax = b$ en un système triangulaire (inférieur ou supérieur).

5.3.1.1 Résolution des systèmes triangulaires :

- Une matrice $A = (a_{ij})_{1\le i,\, j\le n}$ est dite triangulaire supérieure si $a_{ij}=0$ pour $i > j$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

La solution du système $Ax = b$ est : $\begin{cases} x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}} \\ x_i = \dfrac{b_i - \sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j}{a_{ii}}, \quad i = n-1,\ldots,1. \end{cases}$

- Une matrice $A = (a_{ij})_{1\le i,\, j\le n}$ est dite triangulaire inférieure si $a_{ij}=0$ pour $i < j$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

La solution du système $Ax = b$ est : $\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ x_i = \dfrac{b_i - \sum\limits_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j}{a_{ii}}, \quad i = 2,\ldots,n. \end{cases}$

- Une matrice bande est une matrice dans tous les éléments sont nuls ($a_{ij}=0$) sauf sur une bande autour de la diagonale principale.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

La résolution de $Ax = b$ est alors immédiate : $x_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$, $i = 1,\dots,n$.

Remarque :

1) Le nombre d'opérations élémentaires (addition, multiplication, division) nécessaires pour mener à bien le calcul de tous les x_i est au total n^2 opérations élémentaires pour résoudre un système d'ordre n.

2) Le déterminant d'une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) est le produit des éléments de la diagonale de cette matrice : $\det(A) = \prod_{k=1}^{n} a_{kk} = a_{11}\, a_{22} \dots a_{nn}$

5.3.1.2 Méthode d'élimination de Gauss (pivot de Gauss)

Principe de la méthode

Cette méthode consiste à transformer le système linéaire $Ax = b$ par un système équivalent (c'est-à-dire ayant la même solution) de la forme :

$$A^{(n)}\, x = b^{(n)}$$

Où $A^{(n)}$ est une matrice triangulaire supérieure et $b^{(n)}$ est un second membre convenablement modifié.

La transformation de la matrice A en $A^{(n)}$ et le vecteur b en $b^{(n)}$ passe par plusieurs étapes.

Considérons un système de 3 équations à 3 inconnues suivant :

$$(1) : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 : L_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 : L_2^{(1)} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 : L_3^{(1)} \end{cases}$$

Ou encore sous la forme dite augmentée $\left(A^{(1)} \vdots\, b^{(1)}\right) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \vdots & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \vdots & b_3 \end{pmatrix} & \begin{matrix} L_1 \\ L_2^{(1)} \\ L_3^{(1)} \end{matrix} \end{array}$

On pose $A^{(1)}=A$ *et* $b^{(1)} =b$.

Étape 1: On suppose que $a_{11} \neq 0$ (pivot de la première étape).

Pour éliminer les termes a_{21} et a_{31} de $L_2^{(1)}$ et $L_3^{(1)}$, on multiplie la ligne L_1 par $\left(\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)$ et on soustrait avec $L_2^{(1)}$, et on multiplie L_1 par $\left(\frac{a_{31}}{a_{11}}\right)$ et on soustrait avec $L_3^{(1)}$, on obtient :

$$\begin{cases} L_2^{(1)} \leftarrow L_2^{(1)} - \left(\dfrac{a_{21}}{a_{11}}\right) L_1 \\ L_3^{(1)} \leftarrow L_3^{(1)} - \left(\dfrac{a_{31}}{a_{11}}\right) L_1 \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$\left(A^{(2)} \vdots b^{(2)}\right) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \vdots & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \vdots & b_2^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & \vdots & b_3^{(2)} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2^{(2)} \\ L_3^{(2)} \end{array}$$

Les coefficients $a_{ij}^{(2)}$ et $b_i^{(2)}$ sont définis par :

$$\begin{cases} a_{ij}^{(2)} = a_{ij} - \left(\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}\right) a_{1j}, \; i, j = 2,3 \\ b_i^{(2)} = b_i - \left(\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}\right) b_1, \; i = 2,3 \end{cases}$$

Étape 2: En supposant que $a_{22} \neq 0$. Pour éliminer le terme $a_{32}^{(2)}$ de $L_3^{(2)}$, on doit utiliser la transformation élémentaire :

$$L_3^{(2)} \leftarrow L_3^{(2)} - \left(\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}\right) L_2^{(2)}$$

Ce qui donne :

$$\left(A^{(3)} \vdots b^{(3)}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \vdots & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \vdots & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \vdots & b_3^{(3)} \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1^{(1)} \\ L_2^{(2)} \\ L_3^{(3)} \end{array}$$

Les nouveaux coefficients sont définis par :

$$\begin{cases} a_{33}^{(3)} = a_{33}^{(2)} - \left(\dfrac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}\right) a_{23}^{(2)} \\ b_3^{(3)} = b_3^{(2)} - \left(\dfrac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}\right) b_2^{(2)} \end{cases}$$

Étape 3: En utilisant la substitution inverse pour résoudre successivement x_3, x_2 *et* x_1, on obtient :

$$\begin{cases} x_3 = \dfrac{b_3^{(3)}}{a_{33}^{(3)}} \\ x_2 = \dfrac{b_2^{(2)} - a_{23}^{(2)} x_3}{a_{22}^{(2)}} \\ x_1 = \dfrac{b_1 - a_{12} x_2 - a_{13} x_3}{a_{11}} \end{cases}$$

Remarque :

Les termes diagonaux $a_{kk}^{(k)}$ à chaque étape sont appelés les pivots (sont non nuls).

Exemple :

Résoudre par la méthode de Gauss le système suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 11 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 12 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 13 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 14 \end{cases}$$

Solution:

Soit le système d'équations représenté par la matrice augmentée suivante :

$$\left(A^{(1)} \vdots b^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \vdots & 11 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & \vdots & 12 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & \vdots & 13 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & \vdots & 14 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2^{(1)} \\ L_3^{(1)} \\ L_4^{(1)} \end{array}$$

À chaque étape, on doit utiliser les transformations élémentaires pour obtenir les systèmes équivalents au système initial :

$$\begin{cases} L_2^{(1)} \leftarrow L_2^{(1)} - 2\,L_1 \\ L_3^{(1)} \leftarrow L_3^{(1)} - 3\,L_1 \\ L_4^{(1)} \leftarrow L_4^{(1)} - 4\,L_1 \end{cases} \Rightarrow \quad \left(A^{(2)} \vdots b^{(2)}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \vdots & 11 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & \vdots & -10 \\ 0 & -2 & -8 & -10 & \vdots & -20 \\ 0 & -7 & -10 & -13 & \vdots & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2^{(2)} \\ L_3^{(2)} \\ L_4^{(2)} \end{array}$$

$$\begin{cases} L_3^{(2)} \leftarrow L_3^{(2)} - 2\,L_2^{(2)} \\ L_4^{(2)} \leftarrow L_4^{(2)} - 7\,L_2^{(2)} \end{cases} \Rightarrow \quad \left(A^{(3)} \vdots b^{(3)}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \vdots & 11 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & \vdots & -10 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 36 & \vdots & 40 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2^{(3)} \\ L_3^{(3)} \\ L_4^{(3)} \end{array}$$

$$L_4^{(3)} \leftarrow L_4^{(3)} + L_3^{(3)} \quad \Rightarrow \quad \left(A^{(4)} \vdots b^{(4)}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \vdots & 11 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & \vdots & -10 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 40 & \vdots & 40 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2^{(4)} \\ L_3^{(4)} \\ L_4^{(4)} \end{array}$$

On résout alors ce système triangulaire supérieur par substitution inverse, on obtient :

$$\begin{cases} 40x_4 = 40 \Rightarrow x_4 = 1 \\ -4x_3 + 4x_4 = 0 \Rightarrow x_3 = x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = -10 \Rightarrow x_2 = 10 - 2 - 7 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 11 \Rightarrow x_1 = 11 - 2 - 3 - 4 = 2 \end{cases}$$

Donc la solution du système est : $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Remarque :

1) La méthode de Gauss nécessite $\frac{2n^3}{3}$ opérations pour résoudre un système d'ordre n.

2) Si l'un des pivots a_{ii} est nul, on permute la ligne du pivot avec une ligne supérieure.

3) $\det(A) = (-1)^p \prod_{k=1}^{n} a_{kk}^{(k)}$ avec p le nombre de permutation de lignes ou de colonnes effectuées lors de l'application de l'algorithme de Gauss.

5.3.1.3 Méthode de Gauss avec pivot

Dans la Méthode d'élimination de Gauss, on a supposé que les pivots $a_{kk}^{(k)}$ sont non nuls à chaque étape k ($k = 1, \ldots, n-1$) mais cette supposition n'est pas toujours vraie. Si le terme diagonal $a_{kk}^{(k)}$ est nul, il faut choisir un autre élément non nul de la colonne k en permutant l'ordre des lignes de la matrice. Cette méthode se généralise assez facilement bien qu'il faut être prudent avec le choix du pivot. En pratique, il faut éviter de prendre des pivots "trop" petits et choisir le plus grand pivot en valeur absolue. Pour cela, On peut utiliser la technique de pivot soit partiel ou total.

Pivot partiel :

Le pivot est un des éléments $a_{ik}^{(k)}$, $k \leq i \leq n$, de la $k^{ième}$ colonne situés sous la diagonale vérifiant :

$$\left|a_{ik}^{(k)}\right| = \underset{i \in [k,n]}{Max} \left|a_{pk}^{(k)}\right|$$

Dans ce cas, on utilise la permutation des lignes ceci n'a aucun effet sur la solution du système.

Pivot total :

Le pivot est un des éléments de la sous-matrice $a_{ij}^{(k)}$, $k \leq i, j \leq n$ vérifiant :

$$\left|a_{ij}^{(k)}\right| = \underset{p,q \in [k,n]}{Max} \left|a_{pq}^{(k)}\right|$$

Dans ce cas, si le pivot n'est pas dans la $k^{ième}$ colonne, il faut procéder à un échange de colonnes en plus d'un éventuel échange de lignes.

Exemple :

Utiliser la méthode de Gauss avec pivot partiel pour résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 11 \end{cases}$$

Solution:

On a : $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & \vdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 3 & 2 & 6 & \vdots & 11 \end{pmatrix}$

Étape 1: ($k=1$), $Max\ (1, 1, 3)=3$, On permute les lignes 1 et 3, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & \vdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 3 & 2 & 6 & \vdots & 11 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & \vdots & 11 \\ 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 1 & 3 & 3 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & \vdots & 11 \\ 0 & \frac{1}{3} & -2 & \vdots & -\frac{8}{3} \\ 0 & \frac{7}{3} & 1 & \vdots & -\frac{11}{3} \end{pmatrix}$$

Étape 2: ($k=2$), $Max\left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right) = \frac{7}{3}$, On permute les lignes 2 et 3, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & \vdots & 11 \\ 0 & \frac{1}{3} & -2 & \vdots & -\frac{8}{3} \\ 0 & \frac{7}{3} & 1 & \vdots & -\frac{11}{3} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & \vdots & 11 \\ 0 & \frac{7}{3} & 1 & \vdots & -\frac{11}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -2 & \vdots & -\frac{8}{3} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & \vdots & 11 \\ 0 & \frac{7}{3} & 1 & \vdots & -\frac{11}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{15}{7} & \vdots & -\frac{15}{7} \end{pmatrix}$$

On résout alors ce système triangulaire supérieur par substitution inverse, on obtient :

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{15}{7}x_3 = -\frac{15}{7} \Rightarrow x_3 = 1 \\ \frac{7}{3}x_2 + x_3 = -\frac{11}{3} \Rightarrow x_2 = \frac{3}{7}\left(\frac{-11}{3} - x_3\right) \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 11 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3}[11 - 2x_2 - 6x_3] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_2 = -2 \\ x_1 = 3 \end{cases}$$

Donc la solution du système est : $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

5.3.2 Méthode de factorisation LU

5.3.2.1 Principe de la méthode

Cette méthode consiste à transformer la matrice A en un produit de deux matrices triangulaires L et U :

$$A = L\,U$$

Où L est une matrice triangulaire inférieure unitaire et U est une matrice triangulaire supérieure.

Le système $A\,x = b$ s'écrit alors :

$$A\,x = b \Leftrightarrow L\,\underbrace{U\,x}_{y} = b \Leftrightarrow \begin{cases} L\,y = b \\ U\,x = y \end{cases}$$

Donc la résolution du système $A\,x = b$ revient à la résolution de deux systèmes triangulaires.

5.3.2.2 Détermination des matrices L et U

La matrice A s'écrit : $A = L\,U$ tel que L est une matrice triangulaire inférieure avec $l_{ii} = 1$ $(i=1,\ldots,n)$ et U est une matrice triangulaire supérieure.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ l_{21} & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & 1 & \ldots \\ l_{n1} & l_{n2} & \ldots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \ldots & u_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Les éléments de chaque matrice sont donnés par :

$$\begin{cases} u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}\,u_{kj},\ i \le j \le n \\ l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}\,\dfrac{u_{kj}}{u_{jj}},\ j+1 \le i \le n \end{cases} ;\ j = 2,\ldots,n$$

Une fois les composantes l_{ij} et u_{ij} sont déterminées on résout le système $L\,y = b$ après on résout le système $U\,x = y$.

Exemple :

Utiliser la méthode de factorisation LU pour résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 10 \\ 6x_1 + 4x_2 = 26 \\ 8x_1 + 5x_2 + x_3 = 35 \end{cases}$$

Solution :

On a :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 10 \\ 6 & 4 & 0 & 26 \\ 8 & 5 & 1 & 35 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 0 \\ 8 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (1) \begin{cases} u_{11} = 2 \\ u_{12} = 1 \\ u_{13} = 2 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} l_{21}u_{11} = 6 \\ l_{21}u_{12} + u_{22} = 4 \\ l_{21}u_{13} + u_{23} = 0 \end{cases} \quad (3) \begin{cases} l_{31}u_{11} = 8 \\ l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} = 5 \\ l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} = 1 \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow \begin{cases} l_{21} = 3 \\ u_{22} = 1 \\ u_{23} = -6 \end{cases}$$

$$(3) \Rightarrow \begin{cases} l_{31} = 4 \\ l_{32} = 1 \\ u_{33} = -1 \end{cases}$$

Alors :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pour résoudre le système linéaire on résout d'abord le système triangulaire $L\,y = b$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 26 \\ 35 \end{pmatrix}$$

En utilisant la substitution pour résoudre successivement y_1, y_2 *et* y_3, on obtient :

$$L\,y = b \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 10 \\ 3y_1 + y_2 = 26 \\ 4y_1 + y_2 + y_3 = 35 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 10 \\ y_2 = -4 \\ y_3 = -1 \end{cases}$$

On résout maintenant le système triangulaire $U\,x = y$, c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$U\,x = y \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 10 \\ x_2 - 6x_3 = -4 \\ -x_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Donc la solution du système est : $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

5.3.3 Méthode de factorisation de Choleski

5.3.3.1 Principe de la méthode

La méthode de factorisation pour une matrice A symétrique $(a_{ij} = a_{ji})$, définie et positive ($Det(A) > 0$ et a_{ij} réels). Il existe une unique matrice triangulaire inférieure L telle que :

$$A = L\,L^t$$

Où L est une matrice triangulaire inférieure et L^t est une matrice triangulaire transposée de L.

Si les éléments diagonaux de L sont strictement positifs, alors la factorisation est unique.

Le système $Ax = b$ s'écrit alors :

$$A\,x = b \Leftrightarrow L\,\underbrace{L^t\,x}_{y} = b \Leftrightarrow \begin{cases} L\,y = b \\ L^t\,x = y \end{cases}$$

Le système à résoudre $A\,x = b$ se ramène alors à la résolution de deux systèmes triangulaires : $L\,y = b$ et $L^t\,x = y$.

5.3.3.2 Détermination des matrices L et L^t

La matrice A s'écrit : $A = L\,L^t$ où $L = (l_{ij})_{1 \le i,\, j \le n}$, $l_{ij} = 0$ si $j > i$ et L est une matrice triangulaire inférieure et L^t une matrice triangulaire transposée de L.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & \cdots & l_{1n} \\ 0 & l_{22} & \cdots & l_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}$$

Les éléments de matrice sont déterminés par les relations suivantes :

$$\begin{cases} l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2}\,;\ i = 1, \ldots, n \\ l_{ij} = \dfrac{1}{l_{ii}}\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}\, l_{jk}\right);\ j = i+1, \ldots, n \end{cases}$$

Une fois les composantes l_{ii} et l_{ij} sont déterminées, on résout donc d'abord le système $L\,y = b$ après on résout le système $L^t\,x = y$.

Remarque :

1) La méthode de Cholesky nécessite $\frac{n^3}{3}$ opérations élémentaires (meilleure que celle de Gauss).

2) $Det(A) = Det(L\,L^t) = (Det(L))^2 = \prod_{i=1}^{n} l_{ii}^2$

3) Pour une matrice définie positive, on a : $l_{ii}^2 = a_{jj} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2 > 0$

Exemple :

Utiliser la méthode de factorisation de Choleski pour résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \\ -x_1 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Solution :

On a : $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

A est symétrique $(a_{ij} = a_{ji})$

A est positive : $a_{11}=3 > 0$, $Det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 > 0$ et $Det\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 > 0$

Alors il existe une unique matrice triangulaire inférieure L telle que : $A = L\,L^t$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} l_{11}^2 & l_{11}\,l_{21} & l_{11}\,l_{31} \\ l_{21}\,l_{11} & l_{21}^2 + l_{22}^2 & l_{21}\,l_{31} + l_{22}\,l_{32} \\ l_{31}\,l_{11} & l_{31}\,l_{21} + l_{32}\,l_{22} & l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (1)\begin{cases} l_{11}^2 = 3 \\ l_{11}\,l_{21} = 1 \\ l_{11}\,l_{31} = -1 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} l_{21}\,l_{11} = 1 \\ l_{21}^2 + l_{22}^2 = 1 \\ l_{21}\,l_{31} + l_{22}\,l_{32} = 0 \end{cases} \qquad (3)\begin{cases} l_{31}\,l_{11} = -1 \\ l_{31}\,l_{21} + l_{32}\,l_{22} = 0 \\ l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^{33} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (1)\begin{cases} l_{11} = \sqrt{3} \\ l_{21} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ l_{31} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} l_{21} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ l_{22} = \sqrt{\dfrac{2}{3}} \end{cases} \qquad (3)\begin{cases} l_{31} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ l_{32} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ l_{33} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Alors :

$$L = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \dfrac{\sqrt{3}}{3} & \sqrt{\dfrac{2}{3}} & 0 \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{3} & \dfrac{\sqrt{3}}{3} & \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad L^t = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \dfrac{\sqrt{3}}{3} & -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \sqrt{\dfrac{2}{3}} & \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & 0 & \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

On résout d'abord le système $L\,y = b$, c'est-à-dire : $\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \dfrac{\sqrt{3}}{3} & \sqrt{\dfrac{2}{3}} & 0 \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{3} & \dfrac{\sqrt{3}}{3} & \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$L\,y = b \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3}y_1 = 1 \\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}y_1 + \sqrt{\dfrac{2}{3}}y_2 = 2 \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{3}y_1 + \dfrac{\sqrt{3}}{3}y_2 + \dfrac{\sqrt{3}}{3}y_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 0.5773 \\ y_2 = 2.0412 \\ y_3 = 1.4228 \end{cases}$$

On résout maintenant $L^t\,x = y$, c'est-à-dire : $\begin{pmatrix} \sqrt{3} & \dfrac{\sqrt{3}}{3} & -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \sqrt{\dfrac{2}{3}} & \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & 0 & \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5773 \\ 2.0412 \\ 1.4228 \end{pmatrix}$

$$L^t x = y \quad \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}}{3} x_3 = 1.4228 \\ \sqrt{\dfrac{2}{3}}\, x_2 + \dfrac{\sqrt{3}}{3} x_3 = 2.0412 \\ \sqrt{3}\, x_1 + \dfrac{\sqrt{3}}{3} x_2 - \dfrac{\sqrt{3}}{3} x_3 = 0.5773 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 2.4643 \\ x_2 = 0.7574 \\ x_1 = 0.6617 \end{cases}$$

Donc la solution du système est : $x = \begin{pmatrix} 0.6617 \\ 0.7574 \\ 2.4643 \end{pmatrix}$