جامعة المسيلـة
قسم الفيزياء
Physique4 (s4)

السنة الجامعية **2024/2023**

السلسلة رقم 3 الميكانيك الكوانتي (Mécanique Quantique)

التمرين الأول:

1. . أحسب المؤثرات النائبة لمؤثري التفاضل و الموضع $X,\ \frac{d}{dx},$ ثم بين أن مؤثر الاندفاع $P=-i\hbar\frac{d}{dx}$ هو مؤثر هرميتي. ثم استنتج المؤثرات الهرميتية لـ $e^{i\frac{d}{dx}},\ e^{\frac{d}{dx}},\ e^{\hat{X}}$

2. أحسب المبدل التالي $[P,x]$

التمرين الثاني

I. ليكن لدينا الآن المؤثرين الهرميتين p و q المحققين للعلاقة $[q,p]=i$

- استنتج أن p و q يحققان العلاقة التالية $[pq+qp,p]=2ip$ و $[q^2,qp]=2iq^2$ ، يعطى $[AB,C]=A[B,C]+[A,C]B$.
- أحسب المبدلات التالية $[pq+qp,q]$ و $[p^2,qp]$
- أحسب $[A,[B,C]D]$ حيث D هو أيضا مؤثر مستقل عن الزمن.

II. ليكن لدينا الآن المبدل التالي $[x,p]=i\hbar$ حيث x و p هما مؤثرا الموضع وكمية الحركة.

1. تحقق أن $[x^m,p]=im\hbar x^{m-1}$ حيث $m>1$
2. برهن أن $[F(x),p]=i\hbar\frac{dF(x)}{dx}$ حيث $F(x)$ دالة قابلة للاشتقاق للمتغير x .

لتـــمرين الثالـــث

I . ليكن A و B مؤثرين يتبادلان مع مبدلهما $[A,B]$: أي $[A,[A,B]]=[B,[A,B]]=0$ وبفرض أن A و B مستقلان عن الزمن.

- ☝ بين أن $[A^n,B]=nA^{n-1}[A,B]$ حيث $[AB,C]=A[B,C]+[A,C]B$
- ✌ باستخدام العلاقة $e^A=\sum_{n=0}\frac{A^n}{n!}$, أوجد العلاقة التالية $e^ABe^{-A}=B+[A,B]$.
- 👌 تحقق من أن $e^AB^ne^{-A}=(B+[A,B])^n$

.II نعرف الآن الدالة $f(x)$ حيث $f(x)=e^{Ax}e^{Bx}$ و الهدف هو إيجاد العلاقة $e^{A}e^{B}$.

- أحسب $\frac{d}{dx}f(x)$ بدلالة $f(x), x, A+B, [A,B]$ ثم كامل المعادلة التفاضلية التي تحققها $f(x)$
- استنتج $e^{A}e^{B}$ و e^{A+B} .

<u>التـــمرين الرابــــع</u>

لنعتبر المؤثرين الهرميتين $\hat{P}$ و $\hat{Q}$ و المحققين للعلاقة $\left[\hat{Q},\hat{P}\right]=i$ كما نعرف المؤثرين $\hat{A},\hat{A}^{+}$ كمايلي

$$\hat{A}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{Q}+i\hat{P}\right) \text{ و نعرف } \hat{N}=\hat{A}^{+}.\hat{A}$$

1. أحسب $\left[\hat{A},\hat{A}^{+}\right],\left[\hat{N},\hat{A}^{+}\right],\left[\hat{N},\hat{A}\right]$.
2. لتكن λ القيمة الذاتية للمؤثر $\hat{N}$ المقابلة للشعاع $\left|\psi\right\rangle$ احسب نظيم $\hat{A}^{+}\left|\psi\right\rangle,\hat{A}\left|\psi\right\rangle$ واستنتج أن $\lambda\in\Re^{+}$ و أنه لما 0 $\lambda=0\Rightarrow\hat{A}\left|\psi\right\rangle=0$.
3. بين أن $\hat{A}^{+}\left|\psi\right\rangle,\hat{A}\left|\psi\right\rangle$ أيضا اشعة ذاتية لـ $\hat{N}$ يطلب تعين قيمهما الذاتية، أثبت أن الصفر يكون بالضرورة قيمة ذاتية لـ $\hat{N}$.
4. لتكن λ_k قيمة ذاتية لـ $\hat{N}$ و $\left|\psi_k\right\rangle$ الاشعة الذتية المقابلة لها، بين أن $\hat{A}\left|\psi_k\right\rangle=\sqrt{k}\left|\psi_{k-1}\right\rangle$ و $\hat{A}^{+}\left|\psi_k\right\rangle=\sqrt{k+1}\left|\psi_{k+1}\right\rangle$.