SIMILITUDE DANS LES TURBOMACHINES

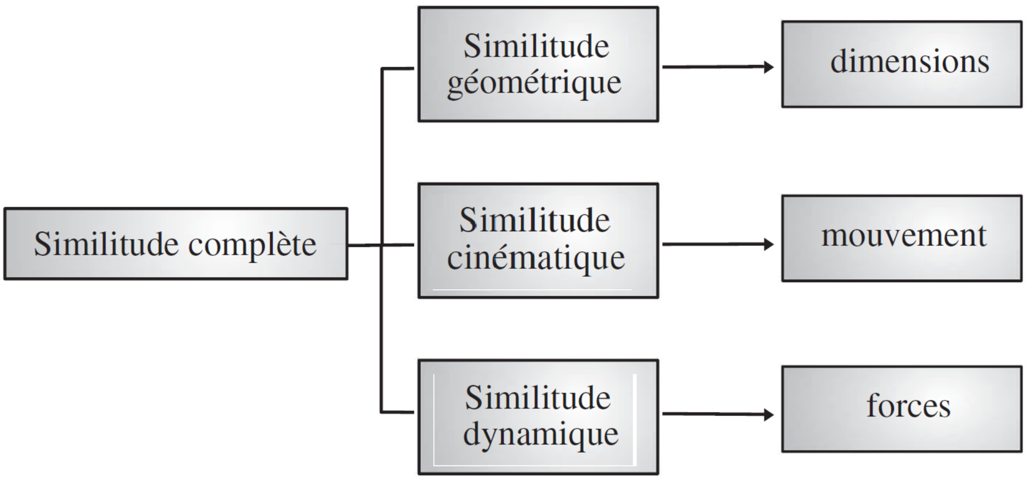
3.1 Définition

La similitude est la base pour que l'étude de phénomènes sur des *modèles réduits ou maquettes*, puisse être extrapolée vers le problème analysé, appelé *le prototype*.

Outre une analogie de forme entre un modèle et un prototype, on doit respecter des principes formels pour ramener les résultats obtenus sur une maquette vers le cas réel.

Cela implique que l'on puisse faire correspondre *un point **p1** du prototype à un temps **t1** avec un point **p2** du modèle à un temps **t2***. Des tels points sont appelés **des point homologues.**

La similitude a lieu **s'il existe un rapport constant** pour une grandeur (longueur, force, etc.) entre des points homologues de la maquette et du prototype. En mécanique de fluides on distingue trois types de similitude : ***géométrique, cinématique et dynamique.***

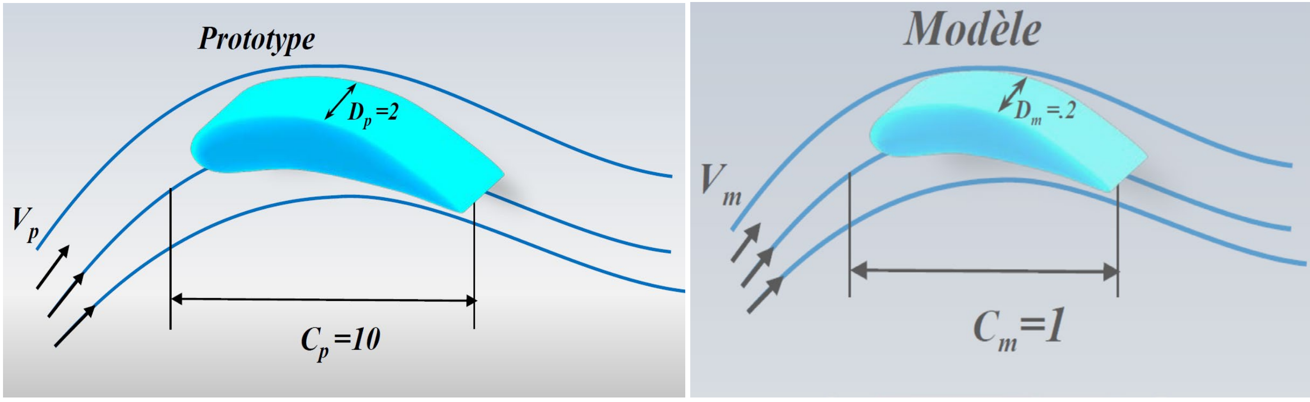


3.2 La similitude géométrique concerne la dimension fondamentale *L*

Un modèle et un prototype sont *géométriquement similaires* si toutes les dimensions ont le même rapport d'échelle λ_L

$$\frac{L_m}{L_p} = \lambda_L = cste$$

L_m, L_p :longueurs du modèle et du prototype respectivement



3.3 La similitude cinématique ajoute la dimension fondamentale *T*

Un modèle et un prototype sont *cinématiquement similaires* si les trajectoires de particules homologues sont géométriquement similaires, se retrouvant en des *positions homologues en des temps homologues*. Pour que la similitude cinématique puisse avoir lieu, la similitude géométrique doit alors y exister. Mais, la similitude géométrique ne garantit pas la similitude cinématique !

La similitude cinématique traite le rapport d'échelle temporelle $\boldsymbol{\lambda_T}$ au travers de rapports des variables dérivées, vitesse et accélération. Alors :

Deux écoulements sont cinématiquement semblables **si les rapports de vitesses $\boldsymbol{\lambda_V}$ (accélérations $\boldsymbol{\lambda_a}$)** sont identiques en des points homologues.

$$\frac{V_m}{V_p}=\frac{(L_m/T_m)}{(L_p/T_p)}=\underbrace{\left(\frac{L_m}{L_p}\right)}_{\lambda_L}\Big/\underbrace{\left(\frac{T_m}{T_P}\right)}_{\lambda_T}=\lambda_V \qquad\Longrightarrow\qquad \lambda_V=\left(\frac{\lambda_L}{\lambda_T}\right)$$

Deux écoulements sont cinématiquement semblables si **les rapports de vitesses $\boldsymbol{\lambda_V}$ (accélérations $\boldsymbol{\lambda_a}$)** sont identiques en des points homologues.

$$\frac{a_m}{a_p}=\frac{(L_m/T_m^2)}{(L_p/T_p^2)}=\underbrace{\left(\frac{L_m}{L_p}\right)}_{\lambda_L}\Big/\underbrace{\left(\frac{T_m}{T_P}\right)^2}_{\lambda_T^2}=\lambda_a \qquad\Longrightarrow\qquad \lambda_a=\left(\frac{\lambda_L}{\lambda_T^2}\right)=\left(\frac{\lambda_V}{\lambda_T}\right)$$

3.4 La similitude dynamique ajoute la dimension fondamentale *M*

La similitude dynamique implique que **les forces** entre des points homologues du modèle y du prototype sont égales dans la direction et dans le sens et que le rapport de leurs modules est constant

Si la distribution de la masse est semblable entre le modèle et le prototype. Alors, la similitude géométrique entraîne une similitude de masses.

Puisque les forces sont proportionnelles aux accélérations, dans le cas précédent la similitude cinématique implique similitude dynamique. Notamment :

$$\frac{F_m}{F_p} = \frac{M_m L_m T_m^{-2}}{M_p L_p T_p^{-2}} = \left(\frac{M_m}{M_p}\right)\left(\frac{L_m}{L_p}\right)\left(\frac{T_m}{T_p}\right)^{-2} = \lambda_F = cst$$

Conclusion

La similitude est définie comme « Tous les nombres sans dimensions ont les mêmes valeurs pour le modèle est le prototype ».

3.5 Quelques paramètres adimensionnels rencontrés en Turbomachines

Nom	Définition	Nature du rapport
Nombre d'Archimède	$\mathrm{Ar} = \frac{\rho_s g L^3}{\mu^2}(\rho_s - \rho)$	$\frac{\text{Force gravitationnelle}}{\text{Force visqueuse}}$
Aspect ratio	$\mathrm{AR} = \frac{L}{W}$ or $\frac{L}{D}$	$\frac{\text{Longueur}}{\text{Largeur}}$ ou $\frac{\text{Longueur}}{\text{Diamètre}}$
Nombre de Biot	$\mathrm{Bi} = \frac{hL}{k}$	$\frac{\text{Résistance thermique surfacique}}{\text{Résistance thermique interne}}$
Nombre de Bond	$\mathrm{Bo} = \frac{g(\rho_f - \rho_v)L^2}{\sigma_s}$	$\frac{\text{Force gravitationnelle}}{\text{Force de tension de surface}}$
Cavitation number	$\mathrm{Ca}\ (\text{quelquefois } \sigma_c) = \frac{P - P_v}{\rho V^2}$ $\left(\text{quelquefois } \frac{2(P - P_v)}{\rho V^2}\right)$	$\frac{\text{Pression} - \text{Pression de vapeur}}{\text{Pression d'inertie}}$
Facteur de friction de Darcy	$f = \frac{8\tau_w}{\rho V^2}$	$\frac{\text{Force de friction de paroi}}{\text{Force d'inertie}}$
Coefficient de Drag	$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho V^2 A}$	$\frac{\text{Force de frottement}}{\text{Force dynamique}}$
Nombre d'Eckert	$\mathrm{Ec} = \frac{V^2}{c_P T}$	$\frac{\text{Énergie cinétique}}{\text{Enthalpie}}$
Nombre d'Euler	$\mathrm{Eu} = \frac{\Delta P}{\rho V^2}\left(\text{quelquefois } \frac{\Delta P}{\frac{1}{2}\rho V^2}\right)$	$\frac{\text{Différence de pression}}{\text{Pression dynamique}}$

Facteur de friction de Fanning	$C_f = \frac{2\tau_w}{\rho V^2}$	$\frac{\text{Force de friction de paroi}}{\text{Force d'inertie}}$
Nombre de Fourier	$\text{Fo (quelquefois } \tau) = \frac{\alpha t}{L^2}$	$\frac{\text{Temps physique}}{\text{Temps de diffusion thermique}}$
Nombre de Froude	$\text{Fr} = \frac{V}{\sqrt{gL}} \left(\text{quelquefois } \frac{V^2}{gL}\right)$	$\frac{\text{Force d'inertie}}{\text{Force gravitationnelle}}$
Nombre de Grashof	$\text{Gr} = \frac{g\beta \lvert\Delta T\rvert L^3 \rho^2}{\mu^2}$	$\frac{\text{Force de poussée}}{\text{Force visqueuse}}$
Nombre d'Jakob	$\text{Ja} = \frac{c_p(T - T_{\text{sat}})}{h_{fg}}$	$\frac{\text{Énergie sensible}}{\text{Énergie latente}}$
Nombre de Knudsen	$\text{Kn} = \frac{\lambda}{L}$	$\frac{\text{Libre parcours moyen}}{\text{Longueur caractéristique}}$
Nombre de Lewis	$\text{Le} = \frac{k}{\rho c_p D_{AB}} = \frac{\alpha}{D_{AB}}$	$\frac{\text{Diffusion thermique}}{\text{Diffusion des espèces}}$
Lift coefficient	$C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho V^2 A}$	$\frac{\text{Force de portance}}{\text{Force dynamique}}$
Nombre de Mach	$\text{Ma (quelquefois } M) = \frac{V}{c}$	$\frac{\text{Vitesse d'écoulement}}{\text{Vitesse du son}}$
Nombre de Nusselt	$\text{Nu} = \frac{Lh}{k}$	$\frac{\text{Transfer de chaleur convectif}}{\text{Transfer de chaleur par conduction}}$
Nombre de Peclet	$\text{Pe} = \frac{\rho L V c_p}{k} = \frac{LV}{\alpha}$	$\frac{\text{Transfer de chaleur du milieu}}{\text{Transfer de chaleur par conduction}}$
Nombre de Power	$N_P = \frac{\dot{W}}{\rho D^5 \omega^3}$	$\frac{\text{Puissance}}{\text{Inertie rotationnelle}}$
Nombre de Prandtl	$\text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu c_p}{k}$	$\frac{\text{Diffusion visqueuse}}{\text{Diffusion thermique}}$
Coefficient de pression	$C_p = \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2}\rho V^2}$	$\frac{\text{Différence de pression statique}}{\text{Pression dynamique}}$
Nombre de Rayleigh	$\text{Ra} = \frac{g\beta \lvert\Delta T\rvert L^3 \rho^2 c_p}{k\mu}$	$\frac{\text{Poussée}}{\text{Force visqueuse}}$
Nombre de Reynolds	$\text{Re} = \frac{\rho V L}{\mu} = \frac{VL}{\nu}$	$\frac{\text{Force d'inertie}}{\text{Force visquese}}$
Nombre de Richardson	$\text{Ri} = \frac{L^5 g \,\Delta\rho}{\rho \dot{V}^2}$	$\frac{\text{Poussée}}{\text{Force d'inertie}}$
Nombre de Schmidt	$\text{Sc} = \frac{\mu}{\rho D_{AB}} = \frac{\nu}{D_{AB}}$	$\frac{\text{Diffusion visqueuse}}{\text{Diffusion des espèces}}$

TD N° 01

Exercice N°1- Un essai doit être effectué sur un modèle proposé pour une grande pompe qui doit délivrer $1.5\ m^3/s$ d'eau à partir d'une roue de $40\ cm$ de diamètre avec une augmentation de pression de $400\ kPa$. Un mod èle ave c une rou e de $8\ cm$ de di amè tre doit être utili sé pour effec tuer l'expérience.
Quel débit faut-il utiliser et quelle augmentation de pression faut-il attendre ? Le fluide modèle est de l'eau à la même température que celle du prototype.

Solution
Pour avoir une similitude entre le modèle et le prototype il faut que les nombres de Reynolds doivent être égaux ; c-à-d :

$$Re_m = Re_p \quad ; \quad (m - modèle, \;\; p - prototype)$$

$$\frac{V_m D_m}{\nu_m} = \frac{V_p D_p}{\nu_p} \quad ; \quad \begin{cases} D - diamètre \\ \nu - viscosité\ cinématique\ (\nu = \frac{\mu}{\rho}) \end{cases} \quad ; \quad \nu_m = \nu_p\ (même\ T°)$$

$$\frac{V_m}{V_p} = \frac{D_m}{D_p} = \frac{0.4}{0.08} = 5.$$

$$q_v = \dot{V} = VA = V\pi\frac{D^2}{4} =====> \frac{\dot{V}_m}{\dot{V}_p} = \frac{V_m D_m^2}{V_p D_p^2} = 5 \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{5}$$

D'où le débit qu'il faut utiliser est :

$$\dot{V}_m = \frac{\dot{V}_p}{5} = \frac{1.5}{5} = 0.3\ m^3/s$$

L'augmentation de pression :

Nombre d'Euler : $\left(\frac{\Delta p}{\rho V^2}\right)_m = \left(\frac{\Delta p}{\rho V^2}\right)_m ===> \Delta p_m = \Delta p_p \frac{\rho_m}{\rho_p}\left(\frac{V_m^2}{V_p^2}\right) = 400 \times 1 \times 5^2 = 10^4\ kPa$

Exercice N°2- Un modèle à l'échelle $(1:10)$ d'une automobile est utilisé pour mesurer la traînée sur une conception proposée (Prototype). Il s'agit de simuler une vitesse prototype de 90 km/h.

1. Quelle vitesse doit être utilisée en soufflerie si les nombres de Reynolds sont équivalents ?
2. Pour cette condition, quel est le rapport des forces de traînée $(D = \rho V^2 l^2)$?

Si les nombres de Reynolds étaient équivalents, la vitesse dans l'étude du modèle était observée dans le régime d'écoulement compressible $(M > 0.3\ ou\ V_m > 360\ km/h)$.

Pour mener une étude de modèle acceptable, pourrait-on utiliser une vitesse de 90 km/h sur un modèle d'une longueur caractéristique de $10\ cm$? Supposons que le coefficient de traînée $\left(C_D = D/\frac{1}{2}\rho V^2 A\ ;\ A\text{- section de projection frontale}\right)$ est indépendant de Re pour Re supérieur à 10^5 (On donne $\nu_m = 1.6 \times 10^{-5}\ m^2/s$

Si oui, quelle force de traînée sur le prototype correspondrait à une force de traînée de $1.2\ N$ mesurée sur le modèle?

Solution

1. Le même fluide existe sur le modèle et le prototype ; ainsi, l'égalisation des nombres de Reynolds se traduit par : $= 90 \times 10 = 900$ km/h

$$\frac{V_m l_m}{\nu_m} = \frac{V_p l_p}{\nu_p} \qquad \therefore \quad V_m = V_p \frac{l_p}{l_m}$$

Cette vitesse introduirait bien entendu des effets de compressibilité, effets qui n'existent pas dans le prototype. Par conséquent, le modèle d'étude proposé serait inapproprié.

2. Si nous utilisions cette vitesse dans le modèle, le rapport de force de traînée serait :

$$\frac{(F_D)_p}{(F_D)_m} = \frac{\rho_p V_p^2 l_p^2}{\rho_m V_m^2 l_m^2} \qquad \therefore \qquad \frac{(F_D)_p}{(F_D)_m} = 1$$

Ainsi, nous voyons que la force de traînée sur le modèle est la même que la force de traînée sur le prototype si les mêmes fluides sont utilisés lorsque nous assimilons les nombres de Reynolds.
L'étude de modèle proposée en soufflerie doit être réalisée avec $V_m = 90\ km\ /\ h$ et $l_m = 0{,}1\ m$. En utilisant $\nu = 1.6 \times 10^{-5}\ m^2/s$, le nombre de Reynolds est :

$$\mathrm{Re}_m = \frac{V_m l_m}{\nu_m} = \frac{(90 \times 1000/3600) \times 0.1}{1.6 \times 10^{-5}} = 1.56 \times 10^5$$

Ce nombre de Reynolds est supérieur à 10^5, nous supposerons donc qu'il existe une similitude entre le modèle et le prototype. La vitesse de 90 km/h est suffisamment élevée.

La force de traînée sur le prototype se déplaçant à 90 km/h correspondant à 1.2 N sur le modèle provient de:

$$\frac{(F_D)_p}{(F_D)_m} = \frac{\rho_p V_p^2 l_p^2}{\rho_m V_m^2 l_m^2} \qquad \therefore (F_D)_p = (F_D)_m \overset{1}{\cancel{\frac{\rho_p}{\rho_m}}} \overset{1}{\cancel{\frac{V_p^2}{V_m^2}}} \frac{l_p^2}{l_m^2} = 1.2 \times 10^2 = 120\ \mathrm{N}$$

Notons que nous avons supposé que le coefficient de traînée est indépendant de Re pour $Re = 10^5$. Si le coefficient de traînée continuait de varier au-dessus de $Re = 10^5$ (cela ressortirait des données expérimentales), l'analyse précédente devrait être modifiée en conséquence.

--FIN------------------------------