

# Chapitre

# 1

## *Rappels des équations du mouvement et de l'énergie*

### 1.1.Introduction

Les lois de transport consistent à écrire le taux de variation à l'instant  $t$  d'une quantité scalaire ou vectorielle définie sur un volume matériel quelconque  $\Omega(t)$  délimité par sa surface  $\Gamma(t)$  d'un milieu fluide en écoulement. On appelle  $u(t)$  la vitesse localisée sur l'interface  $\Gamma(t)$  du volume matériel  $\Omega(t)$ . Ces théorèmes permettent d'écrire les équations de bilan pour la masse (quantité scalaire), la quantité de mouvement (quantité vectorielle) et l'énergie (quantité scalaire) [1-4].

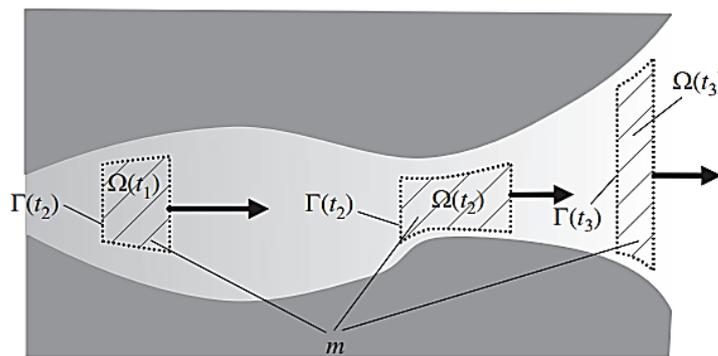


Fig. 1.1 – Évolution d'un volume matériel  $\Omega(t)$  entre 3 instants différents au cours de l'écoulement du fluide dans une conduite de section variable en fonction de la longueur.

Le volume matériel « s'adapte » de façon à conserver une masse identique à chaque instant.

### 1.1.1. Quelques concepts fondamentaux en mécanique des fluides

Ce cours traite quelques concepts de la discipline de l'aérodynamique des écoulements de fluide visqueux compressible. Quand un fluide se meurt à des vitesses comparables à sa vitesse de son, les variations en densités seront considérables et l'écoulement sera nommé compressible.

Ce type d'écoulements est difficile de le réaliser pour les liquides, puisque la génération des vitesses soniques nécessite de hautes pressions de l'ordre de 1000 *atm*. Cependant dans les gaz, un doublement de pression peut causer un écoulement sonique, de ce fait que la science qui étudie l'écoulement compressible des gaz est souvent appelée Gazodynamique.

#### 1.1.1.1. Définitions

**La gazodynamique** : est la branche de la dynamique qui s'occupe du mouvement de l'air et d'autres fluides gazeux, et des forces réagissant sur un corps en mouvement relatif aux pareils fluides [4]:

De tels écoulements compressibles se rencontrent dans les conduites transportant du gaz naturel, ou à travers le diffuseur d'un turboréacteur d'un avion, aux seins des turbines et des compresseurs. Probablement, les deux effets les plus importants de la compressibilité de l'écoulement sont :

**a) La suffocation** : où la vitesse de l'écoulement dans la conduite (interne) est étroitement limitée par la condition sonique.

**b) Les ondes de choc** : qui sont des petites discontinuités dans les propriétés de l'écoulement supersonique.

L'objectif de ce cours est d'expliquer tels phénomènes et les quantifier en utilisant les équations fondamentales suivantes :

- équation de continuité.
- équations de quantité de mouvement (Navier Stokes).
- équation de l'énergie.
- équation d'état des gaz.

Et en les résolvant simultanément pour quatre inconnues ; pression, densité (masse volumique), température et la vitesse d'écoulement ( $p, \rho, T, V$ ). Toutefois la théorie des

écoulements compressibles est assez compliquée, notamment c'est la raison de supposer la réversibilité et l'adiabaticité de l'écoulement.

**Gaz** : est un type de fluides qui déplacent sous l'action des contraintes de cisaillement  $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$ , et l'influence de la compressibilité est plus importante en comparaison avec l'état de repos.

**Système** : C'est l'ensemble mobile d'une matière, ayant des propriétés bien déterminées et des limites extérieures nommées les frontières du système. La caractéristique fondamentale d'un système au repos ou en écoulement est la quantité de matière (masse) contenue dans ce système.

**Volume de contrôle** : Un volume fictif et fixe dans l'intervalle du mouvement du système, utilisé essentiellement pour étudier l'écoulement passant à travers lui. Ces frontières se nomment surface de contrôle.

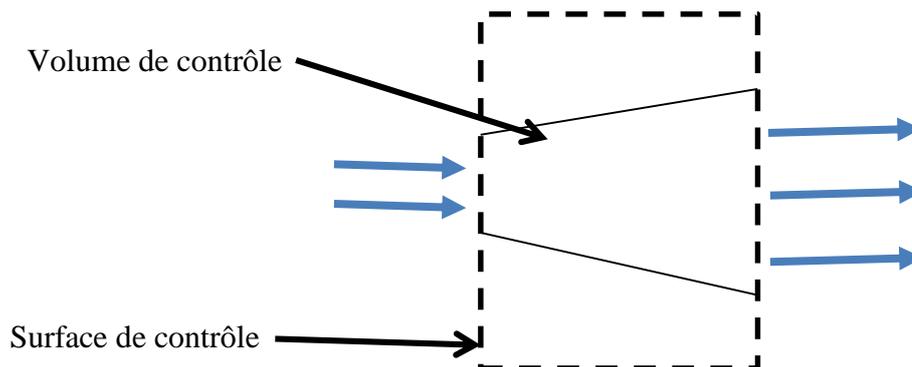
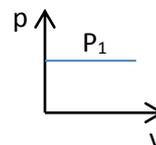


Fig. 1.2 -Volume de contrôle.

**Processus (Evolution)** : la transformation d'un état à un autre, avec généralement un échange de chaleur et de travail.

Exemples :

- Evolution isobarique : à pression constante



La chaleur récupérée par un gaz parfait à pression constante est :

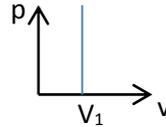
$$\Delta H = C_p \cdot \Delta T$$

Avec :

- $\Delta H$  : variation d'enthalpie par unité de masse en (KJ/Kg)
- $C_p$  : chaleur spécifique à pression constante en (KJ/Kg K)

-  $\Delta T$  : variation de température (K)

➤ Evolution isochore : à volume constant



La chaleur récupérée par un gaz parfait à volume constant est :

$$\Delta U = C_v \cdot \Delta T$$

Avec :

-  $\Delta U$  : variation d'énergie interne par unité de masse en (KJ/Kg)

-  $C_v$  : chaleur spécifique à volume constant en (KJ/Kg.K)

-  $\Delta T$  : variation de température en (K)

### Remarque

$$H = U + \frac{P}{\rho} \text{ Équivaut à } \Delta H = \Delta \left( U + \frac{P}{\rho} \right) = \Delta U + \Delta(rT) = (C_v + r) \cdot \Delta T = C_p \cdot \Delta T$$

Donc :  $C_p = C_v + r$  : Relation de Mayer

On définit :  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$

### Exemple :

- Pour un gaz parfait monoatomique :  $C_p = \frac{5}{2} \cdot r$  et  $C_v = \frac{3}{2} \cdot r$  donc  $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{5}{3}$

- Pour un gaz parfait diatomique :  $C_p = \frac{7}{2} \cdot r$  et  $C_v = \frac{5}{2} \cdot r$  donc  $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{7}{5}$

Or  $C_p = C_v + r = \frac{C_p}{\gamma} + r$  ou encore  $C_p = r \cdot \frac{\gamma}{\gamma-1}$

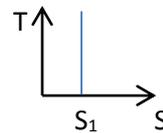
La variation d'enthalpie est par conséquent  $\Delta H = C_p \cdot \Delta T = \left( \frac{\gamma}{\gamma-1} \right) \cdot \Delta \left( \frac{P}{\rho} \right)$  ou encore  $H =$

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{P}{\rho}$$

➤ Evolution isentropique : à entropie constante

➤ Evolution isotherme : à température constante

➤ Evolution adiabatique : sans échange de chaleur avec l'extérieur.



Transformation adiabatique :  $\frac{P}{\rho^\gamma} = cst$ , d'après la loi des gaz parfait :  $\frac{P}{\left(\frac{P}{rT}\right)^\gamma} = cst$  donc  $\frac{P^{\gamma-1}}{T^\gamma} =$

$cst$

**Cycle** : processus qui retourne en son état initial.

**Viscosité** : est définie par le quotient de la contrainte de cisaillement  $\tau$  au gradient de vitesse  $(\frac{\partial u}{\partial y})$  :  $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$   $\left[ \frac{kg}{m.s} \right]$ , et mesure la résistance du fluide aux cisaillements.

**Viscosité cinématique** : est définie par  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$   $\left[ \frac{m^2}{s} \right]$ , qui mesure la propagation du mouvement au sein du fluide en mouvement.

### 1.1.2. Écoulement unidimensionnel

Dans certaines applications, les écoulements de fluides compressibles peuvent être étudiés en ne s'attachant qu'à la composante principale  $v_p$  des vecteurs vitesse, celle dont la direction est en tous points perpendiculaire au plan normal à la ligne générale de l'écoulement, encore appelée ligne moyenne (figure 1-2). La viscosité de ces fluides étant en général très faible et les écoulements considérés de type turbulent, on peut faire l'hypothèse que cette composante de la vitesse ne varie pas dans une section droite de l'écoulement. La connaissance de l'écoulement, sur le plan cinématique, se réduit alors à la détermination de la valeur  $v_p$  de la vitesse en fonction de l'abscisse curviligne  $s$ . On a ainsi affaire à un problème d'écoulement monodimensionnel dans lequel on fait l'hypothèse que tous les autres paramètres physiques du fluide ne dépendent que de  $s$ .

Les équations générales de l'écoulement monodimensionnel d'un fluide compressible ont pour fondement les équations de continuité, de la quantité de mouvement, de l'énergie, d'une part, l'équation d'état du fluide, d'autre part. On peut y ajouter, pour des écoulements particuliers, des équations traduisant certaines transformations typiques en thermodynamique telles que l'équation de la transformation isentropique d'un gaz parfait ou l'équation liant l'enthalpie aux variables thermodynamiques [5,6].

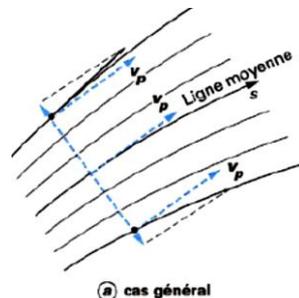


Fig. 1.3 - Écoulements monodimensionnels de gaz

## 1.2. Équations du mouvement

Pour la forme générale des équations qui régissent les écoulements quelconques, on se reportera à la référence. Nous ne donnons ici que leur forme particulière, applicable au cas étudié, qui est celui d'un écoulement conservatif (sans source ni puits de courant), stationnaire, à l'intérieur d'un tube de courant, c'est-à-dire dans un domaine dont la surface latérale ne peut pas être traversée par le fluide : une canalisation par exemple [5].

### 1.2.1. Équation de continuité

Cette équation traduit la conservation de la masse. Elle s'écrit :

$$\int \rho_1 V_1 d\Omega_1 = \int \rho_2 V_2 d\Omega_2 \quad (1.1)$$

Où  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  sont des sections planes perpendiculaires à la ligne moyenne encore appelées sections droites (figure 3) et  $V_i$  la composante du vecteur vitesse selon la normale à chacune de ces sections. Compte tenu de l'hypothèse de la constance de cette vitesse sur une section droite et en admettant que la masse volumique  $\rho$  soit également constante sur cette section, on peut écrire [7] :

$$\rho_1 V_1 \Omega_1 = \rho_2 V_2 \Omega_2 = \dot{M} \quad (1.2)$$

Où  $\dot{M}$  est le débit-masse du fluide dans le tube de courant.

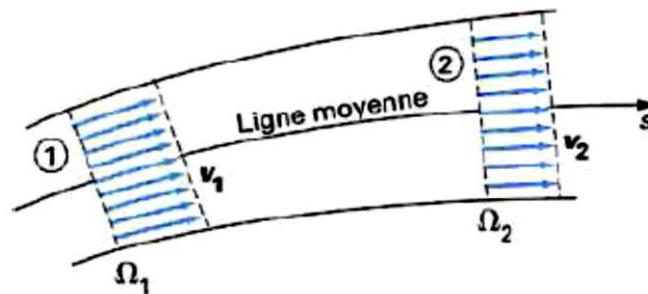


Fig. 1.3 - Écoulements monodimensionnels dans un tube de courant

Cette équation peut encore s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\rho} + \frac{\partial V}{V} + \frac{\partial \Omega}{\Omega} = 0 \quad (1.3)$$

### 1.2.2. Bilan de la quantité de mouvement

Le bilan de la quantité de mouvement donne lieu à une équation vectorielle qui traduit simplement l'égalité entre les forces d'inertie du fluide et les forces qui lui sont appliquées. Dans le cas classique où on ne considère parmi ces forces que celles qui sont dues à la

pression  $p$ , à la pesanteur  $g$  et à la viscosité du fluide, cette équation s'écrit de la manière suivante :

$$\rho \frac{DV}{dt} = -\text{grad}P - \rho f - \rho g \text{ grad}z \quad (1.4)$$

Avec :  $f$  forces visqueuses par unité de masse,

$z$  abscisse verticale,

$\frac{DV}{dt}$  d'Alembertien de la vitesse, c'est-à-dire sa dérivée totale par rapport au temps.

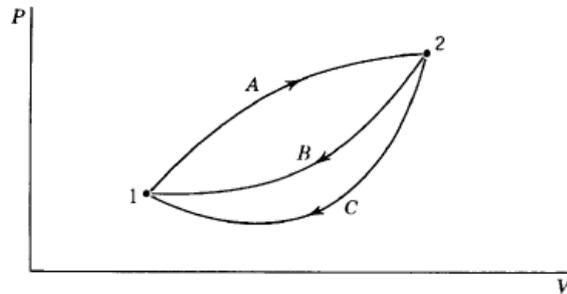
Pour un écoulement monodimensionnel et permanent, on a, en projection sur la tangente à la ligne moyenne [7] :

$$V \frac{dV}{ds} + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{ds} + g \frac{dz}{ds} + f = 0 \quad (1.5)$$

Soit 
$$VdV + \frac{\partial P}{\rho} + g dz = -f ds \quad (1.6)$$

### 1.3. L'entropie

Considérons deux cycles réversibles composés respectivement des transformations A et B, et A et C [6].



Puisque les deux cycles sont réversibles,

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \left( \frac{\delta Q}{T} \right)_A + \int_2^1 \left( \frac{\delta Q}{T} \right)_B = 0$$

Et 
$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \left( \frac{\delta Q}{T} \right)_A + \int_2^1 \left( \frac{\delta Q}{T} \right)_C = 0$$

En soustrayant, on déduit 
$$\int_2^1 \left( \frac{\delta Q}{T} \right)_B = \int_2^1 \left( \frac{\delta Q}{T} \right)_C = 0$$

Et l'on voit que l'intégrale ne dépend pas du chemin parcouru (pour autant que la transformation soit réversible) et par conséquent que  $\left( \frac{\delta Q}{T} \right)_{\text{rév}}$  est une différentielle exacte.

On désigne par le symbole  $S$  la fonction dont la différentielle

$$dS = \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{\text{rév}} \quad (1.7)$$

Et on lui donne le nom d'entropie du système. Par construction, il s'agit d'une variable d'état.

En intégrant de l'état initial 1 jusqu'à l'état final 2 (p. ex. en suivant le chemin A), on aura donc

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{\text{rév}} \quad (1.8)$$

### Remarques

- ❖ Bien que pour calculer la variation d'entropie entre deux états 1 et 2, on doive intégrer  $\frac{\delta Q}{T}$  le long d'une transformation réversible, l'entropie étant une variable d'état, la différence d'entropie entre deux états est indépendante non seulement du chemin parcouru, mais aussi de la nature (réversible ou non) de la transformation subie.
- ❖ Tout comme l'énergie, l'entropie n'est définie par l'équation (1.8) qu'à une constante près. La valeur absolue de l'entropie n'est fixée que d'après *le troisième principe de la thermodynamique* qui stipule que l'entropie d'une substance pure est nulle au zéro absolu des températures.

La valeur absolue de l'entropie n'est toutefois nécessaire qu'en cas de changement de composition, c.-à-d. en cas de réactions chimiques.

### 1.3.1 Entropie d'un gaz parfait

L'entropie d'un gaz parfait s'obtient directement des équations de Gibbs (1.9) et (1.10), des expressions de l'énergie interne et de l'enthalpie, et de la loi des gaz parfaits [6].

$$du = Tds - Pdv \quad (1.9)$$

$$dh = Tds + vdP \quad (1.10)$$

$$Tds = du + Pdv = C_v dT + Pdv$$

D'où, en divisant par  $T$

$$ds = C_v \frac{dT}{T} + \frac{P}{T} dv = C_v \frac{dT}{T} + R \frac{dv}{v} \quad (1.11)$$

Et l'on obtient en intégrant

$$s_2 - s_1 = \int_1^2 C_v \frac{dT}{T} + R \ln \frac{v_2}{v_1} \quad (1.12)$$

Semblablement,

$$T ds = dh - v dP = C_p dT - v dP$$

D'où, en divisant par  $T$

$$ds = C_p \frac{dT}{T} - \frac{v}{T} dP = C_p \frac{dT}{T} - R \frac{dP}{P} \quad (1.13)$$

Et l'on obtient en intégrant

$$s_2 - s_1 = \int_1^2 C_p \frac{dT}{T} - R \ln \frac{P_2}{P_1} \quad (1.14)$$

Avec l'approximation de chaleurs massiques constantes, ces deux expressions s'intègrent analytiquement

$$s_2 - s_1 = C_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{v_2}{v_1} \quad (1.15)$$

$$s_2 - s_1 = C_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{P_2}{P_1} \quad (1.16)$$

Si l'on tient compte des variations des chaleurs massiques avec la température, on peut calculer une fois pour toutes les intégrales et les tabuler en fonction de la température.