République Algérienne Démocratique et Populaire

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Université Mohamed Boudiaf- M'sila

Faculté De Technologie

Département De Génie Électrique

جامعة محمد بوضياف-المسيلة

كلية التكنولوجيا

قسم :الهندسة الكهربائية

Polycopié Pédagogique

Licence 2ème Année L2-S4

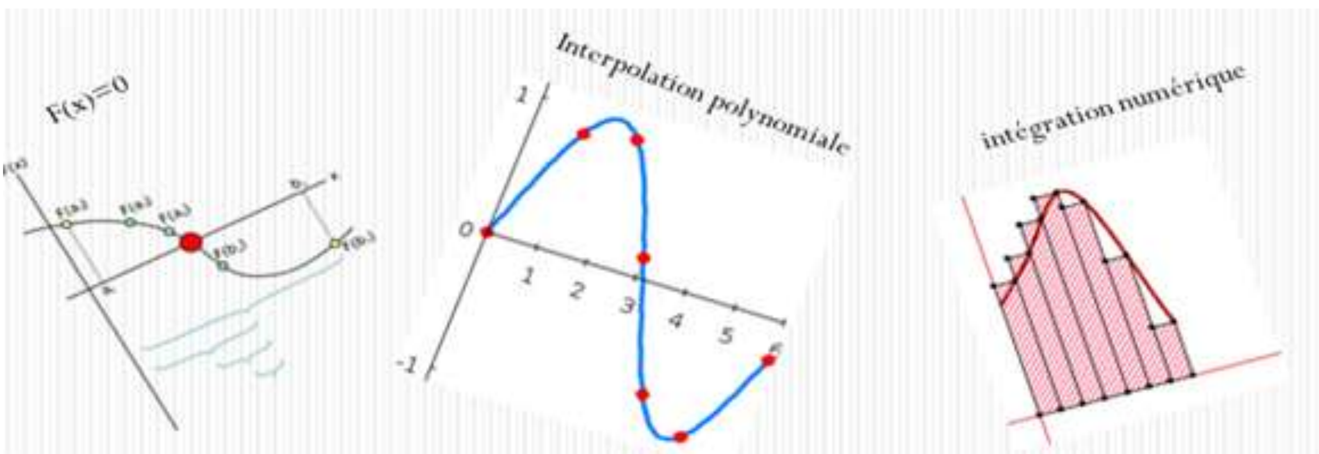
Traveaux dirigés

METHODES NUMERIQUES

Réalisé par :

Dr. BELHOUCHET Khaled

Maître de Conférences « B »



Année Universitaire : 2023/2024

Avant -Propos

Ce polycopié est un support pédagogique de travaux dirigés de la matière de méthodes numériques destiné aux étudiants de deuxième année de socle Sciences et Techniques (ST) ; toutes spécialités confondues. Ce manuel offre des exercices sur les méthodes étudiées dans les cours de méthodes numériques.

Ce support, a pour objectif d'approfondir les connaissances de matière de cours méthodes numériques .

Dr. Khaled Belhouchet

Université Mohamed Boudiaf- M'sila
Faculté De Technologie
Département De Génie Électrique

جامعة محمد بوضياف-المسيلة
كلية التكنولوجيا
قسم الهندسة الكهربائية:

Série d'exercices 01

Exercice 1 :

Soit l'équation suivante : $x^3 - x - 1 = 0$

1. Montrer que cette équation possède une solution dans l'intervalle [1,2].
2. Est-ce-que cette solution est unique ?
3. Calculer une approximation de cette solution en utilisant la méthode de la bissection avec une précision de 10^{-2}.

Exercice 2 :

Utiliser la méthode de la bissection pour calculer une approximation de la solution de l'équation : $1 - xe^x = 0$ dans l'intervalle $[0,1]$ avec une précision $\varepsilon = 10^{-3}$.

Exercice 3 :

Soit l'équation suivante : $x - 0.8 - 0.2 \sin x = 0$
En utilisant la méthode de Newton-Raphson résoudre l'équation dans l'intervalle $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ avec la précision $\varepsilon = 10^{-5}$ et $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 4 :

On veut évaluer $\sqrt{a}$ en appliquant la méthode de Newton-Raphson.

1. Ecrire l'équation récurrente
2. On considère maintenant que $a = 7$ et l'intervalle $[1,4]$.
   a. Vérifier que la méthode de Newton-Raphson est convergente vers une solution unique.
   b. Donner les quatre premières itérations pour les deux cas : $x_0 = 1$ et $x_0 = 3$.

Exercice 5 :

Soit l'équation suivante : $\cos x - x = 0$

1. Montrer que cette équation possède une solution dans l'intervalle [0,1].
2. Trouver la fonction $g(x)$ qui assure la convergence de la méthode du point fixe.
3. Calculer la solution approximative avec la précision $\varepsilon = 10^{-2}$ et $x_0 = 0.5$.

Exercice 6 :

On veut résoudre l'équation : $x^3 - x - 1 = 0$ par la méthode du point fixe dans l'intervalle [1,2].

1. Montrer que la fonction $x = g(x) = \sqrt[3]{x+1}$ vérifie les conditions de convergence.
2. Calculer la solution approximative avec la précision $\varepsilon = 10^{-2}$ et $x_0 = 1.5$.
3. Comparer le nombre d'itérations obtenu avec celui de l'exercice 1. Que peut-on conclure ?

République Algérienne Démocratique et Populaire
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Université Mohamed Boudiaf- M'sila
Faculté De Technologie
Département De Génie Électrique

جامعة محمد بوضياف-المسيلة
كلية التكنولوجيا
قسم :الهندسة الكهربائية

Série d'exercices 02

Exercice 1 :

Résoudre le système d'équations suivant en utilisant la méthode Gauss.

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = -5 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -9 \end{cases}$$

Exercice 2 :

Soit le système linéaire suivant : $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$

1. Résoudre ce système par la méthode de Gauss.
2. Factoriser ma matrice A en produit **LU** ou **L** est une matrice triangulaire inférieure (avec tout éléments de diagonal 1) et (**U** triangulaire supérieure), puis résoudre ce système.

Exercice 3 :

Soit le système linéaire suivant : $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = -2 \\ x4_1 - x_2 + 2x_3 = 14 \\ -6x_1 + 2x_2 = 12 \end{cases}$

Résoudre ce système par factorisation de la matrice A en LU

Exercice 4 :

Soit les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de A et B par la méthode de Gauss.
2. Déduire le déterminant de A^{-1}, B^{-1} et $(A.B)^{-1}$.

République Algérienne Démocratique et Populaire
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Université Mohamed Boudiaf- M'sila
Faculté De Technologie
Département De Génie Électrique

جامعة محمد بوضياف-المسيلة
كلية التكنولوجيا
قسم الهندسة الكهربائية:

Série d'exercices 03

Exercice 1 :

1. Réécrire le système linéaire de façon qu'il soit à diagonale dominante :

$$\begin{cases} -2x_1 + 10x_3 = 7 \\ 10x_1 - x_2 = 9 \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 10 \end{cases}$$

2. En utilisant la méthode de Jacobi puis celle de Gauss-Seidel, calculer les 3 premières itérations en prenant $\vec{X}^{(0)} = [0 \quad 0 \quad 0]^T$.

Exercice 2 :

Soit le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 17 \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 = -18 \end{cases}$$

1. En partant de $\vec{X}^{(0)} = [0 \quad 0 \quad 0]^T$, déterminer les 5 premières itérations des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel.
2. Sachant que la solution exacte est $\vec{X} = [1 \quad 2 \quad 3]^T$, que peut-on conclure?

Exercice 3 : (supplémentaire)

En utilisant la méthode de Jacobi puis celle de Gauss-Seidel, calculer les 3 premières itérations en prenant $\vec{X}^{(0)} = [0 \quad 0 \quad 0]^T$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 - 3x_2 + 9x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 10 \end{cases}$$

Pourquoi cette divergence et qu'elle méthode diverge le plus rapidement.

République Algérienne Démocratique et Populaire
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Université Mohamed Boudiaf- M'sila
Faculté De Technologie
Département De Génie Électrique

جامعة محمد بوضياف-المسيلة
كلية التكنولوجيا
قسم: الهندسة الكهربائية

Série d'exercices 04

Exercice 1 :

Soit les trois points $(0,1)$, $(1,0.5)$ et $(3,0.25)$ de la fonction $f(x)$.

1. Obtenir le polynôme de Lagrange passant par ces points.
2. Obtenir une approximation de $f(1.5)$.
3. Connaissant que $f(x) = 1/(x+1)$, calculer l'erreur maximale commise en approximant $f(x)$ par $P(x)$ puis la comparer avec l'erreur exacte.

Exercice 2 :

Soit les polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ définis comme suit :

x	0	1	2
$P(x)$	-6	3	21
$Q(x)$	10	15	40

Trouver leurs points d'intersection en utilisant la méthode d'interpolation de Lagrange.

Exercice 3 :

Obtenir une approximation de $f(4.5)$ en utilisant le polynôme de Newton de degré 2 ainsi que les données suivantes :

Fonction tabulée				
x	1.0	3.0	5.0	7.0
$f(x)$	0.0000	1.2528	1.6094	1.9459

Exercice 4 :

1. En utilisant la méthode d'interpolation de Newton, calculer une approximation de $\sqrt{1.6}$. Prendre $x_0 = 1, x_1 = 2$ et $x_2 = 3$.
2. Calculer l'erreur commise.

Exercice 5 (supplémentaire) :

Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction $f(x) = |x|$ passant par les points d'abscisses -1, -0.5, 0, 0.5 et 1.

République Algérienne Démocratique et Populaire
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Université Mohamed Boudiaf- M'sila
Faculté De Technologie
Département De Génie Électrique

جامعة محمد بوضياف-المسيلة
كلية التكنولوجيا
قسم الهندسة الكهربائية:

Solutions de la Série d'exercices N°01

Exercice 1 :

$x^3 - x - 1 = 0 \, , x \in [1,2]$

On pose $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$

1. **L'existence de la solution dans l'intervalle [1, 2] :**

$$\left.\begin{array}{l} \text{La fonction } f \text{ est un polynôme, alors} \\ f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ et donc sur } [1,2]. \\ f(1) = -1, f(2) = 5; \;\; f(1).f(2) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c \in [1,2]; f(c) = 0$$

2. **L'unicité de la solution :**

$f'(x) = 3x^2 - 1 > 0 \;\; \forall x \in [1,2] \;\; \Rightarrow f \nearrow$
f est monotone $\Rightarrow$ la solution c est unique.

3. **La bissection :**

On applique maintenant la méthode de la bissection avec $\varepsilon = 10^{-2}$. On prendra 3 chiffres après la virgule et le nombre d'itérations n peut être calculé d'avance par la formule :

$$n \geq \frac{ln\frac{b-a}{\varepsilon}}{ln2} = \frac{ln10^2}{ln2} = 6.67 \quad \Rightarrow n = 7 \text{ itérations}$$

n	a	b	$c = \frac{a+b}{2}$	$b - c$	$f(c)$
1	1.000	2.000	1.500	0.500	+0.875
2	1.000	1.500	1.250	0.250	-0.297
3	1.250	1.500	1.375	0.125	+0.225
4	1.250	1.375	1.312	0.063	-0.054
5	1.312	1.375	1.343	0.032	+0.079
6	1.312	1.343	1.327	0.016	+0.010
7	1.312	1.327	1.319	0.008	-0.024

$b - c = 1.327 - 1.319 = 0.008 \leq \varepsilon = 0.010$ donc on arrête les calculs et la solution est $c \simeq 1.319$ et on peut écrire $c = 1.319 \pm 0.010$.

Exercice 2 :

En utilisant la méthode de la bissection, on va calculer la solution approchée de l'équation :
$f(x) = 1 - xe^x = 0 \quad$ où $\; x \in [0,1] \;$ et $\; \varepsilon = 10^{-3}$

Université Mohamed Boudiaf- M'sila
Faculté De Technologie
Département De Génie Électrique

جامعة محمد بوضياف-المسيلة
كلية التكنولوجيا
قسم: الهندسة الكهربائية

Solutions de la Série d'exercices N°01

$$\left.\begin{matrix} f \text{ est continue sur } [0,1]. \\ f(0) = 1, f(1) = -1.718;\ f(0).f(1) < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \exists c \in [0,1]; f(c) = 0$$

De plus, $f'(x) = -e^x(1+x) < 0\ \forall x \in [1,2] \Rightarrow f \searrow$

f est monotone $\Rightarrow$ la solution c est unique.

La méthode de la bissection :

On prendra 4 chiffres après la virgule et le nombre d'itérations n est :

$$n \geq \frac{ln\frac{b-a}{\varepsilon}}{ln2} = \frac{ln10^3}{ln2} = 9.97 \Rightarrow n = 10 \text{ itérations}$$

n	a	b	$c = \frac{a+b}{2}$	$b-c$	$f(x)$
1	0.0000	1.0000	0.5000	0.5000	+0.1756
2	0.5000	1.0000	0.7500	0.2500	-0.5877
3	0.5000	0.7500	0.6250	0.1250	-0.1676
4	0.5000	0.6250	0.5625	0.0625	+0.0128
5	0.5625	0.6250	0.5937	0.0313	-0.0750
6	0.5625	0.5937	0.5781	0.0156	-0.0305
7	0.5625	0.5781	0.5703	0.0078	-0.0087
8	0.5625	0.5703	0.5664	0.0039	+0.0020
9	0.5664	0.5703	0.5683	0.0020	-0.0032
10	0.5664	0.5683	0.5673	0.0010	+0.0004

$b - c = 0.5683 - 0.5673 = 0.0010 \leq \varepsilon = 0.0010$ donc on arrête les calculs et la solution est $c \simeq 0.5673$ et on peut écrire $c = 0.5673 \pm 0.0010$.

Exercice 3 :

$$f(x) = x - 0.8 - 0.2\sin x = 0\,,\quad x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right],\ \varepsilon = 10^{-5} \text{ et } x_0 = \frac{\pi}{4}$$

Etude de la convergence :

La fonction f est définie sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que :

Solutions de la Série d'exercices N°01

a)

$$\left.\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= -0.16 \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0.57 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right).f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$$

b)

$f'(x) = 1 - 0.2\cos x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - 0.2\cos x = 0 \Rightarrow \cos x = 5$ impossible de résoudre puisque $\cos x \in [-1,1]$

donc

$f'(x) \neq 0 \;\; \forall x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

c)

$f''(x) = 0.2\, sinx \;\neq 0 \;\forall x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

La fonction f vérifie les 3 conditions, alors la méthode de Newton-Raphson est convergente vers une solution unique

La formule récursive est :

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})} = x_{k-1} - \frac{x_{k-1} - 0.8 - 0.2\sin(x_{k-1})}{1 - 0.2\cos(x_{k-1})}$$

k	x_k	$\lvert x_k - x_{k-1}\rvert$
0	$\frac{\pi}{4}$	—
1	0.967120	0.181722
2	0.964335	0.002785
3	0.964334	0.000001

$|x_k - x_{k-1}| = |0.964334 - 0.964335| = 0.000001 \leq \varepsilon = 10^{-5}$

$\Rightarrow$ la solution approchée est : $c \simeq 0.964334$.

Exercice 4 :

1. **L'équation récursive :**

$x = \sqrt{a} \;\Rightarrow x^2 - a = 0$

On pose : $f(x) = x^2 - a = 0$

République Algérienne Démocratique et Populaire
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Université Mohamed Boudiaf- M'sila
Faculté De Technologie
Département De Génie Électrique

جامعة محمد بوضياف-المسيلة
كلية التكنولوجيا
قسم الهندسة الكهربائية:

Solutions de la Série d'exercices N°01

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})} \Rightarrow x_k = x_{k-1} - \frac{x_{k-1}^2 - a}{2x_{k-1}} \Rightarrow x_k = \frac{x_{k-1}^2 + a}{2x_{k-1}}$$

2. $a = 7$ et l'intervalle est $[1,4]$

a) La convergence de la méthode de Newton-Raphson :

Pour $a = 7$ on aura $f(x) = x^2 - 7 = 0$

La fonction f est définie sur l'intervalle $[1,4]$ tel que :

- $\left.\begin{matrix} f(1) = -6 \\ f(4) = 9 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(1).f(4) < 0$
- $f'(x) = 2x > 0 \ \ \forall x \in [1,4]$ donc $f'(x) \neq 0 \ \ \forall x \in [1,4]$
- $f''(x) = 2 \neq 0.$

Les conditions de convergence sont vérifiées donc la méthode de Newton-Raphson converge vers une solution unique $c \in [1,4]$.

b) Le calcul des 4 premières itérations :

L'équation récursive est :

$$x_k = \frac{x_{k-1}^2 + 7}{2x_{k-1}}$$

Pour $x_0 = 1$

k	x_k
0	1.0000
1	4.0000
2	2.8750
3	2.6549
4	2.6458

Pour $x_0 = 3$

k	x_k
0	3.0000
1	2.6667
2	2.6458
3	2.6457
4	2.6457

Exercice 5 :

$f(x) = \cos x - x = 0$

1. L'existence d'une solution dans l'intervalle [0, 1] :

$$\left.\begin{matrix} f \text{ est continue sur } [0,1]. \\ f(0) = 1, f(1) = -0.46;\ \ f(0).f(1) < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \exists c \in [0,1]; f(c) = 0$$

De plus, $f'(x) = -(\sin x + 1) < 0 \ \ \forall x \in [0,1] \Rightarrow f \searrow$

Solutions de la Série d'exercices N°01

f est monotone $\Rightarrow$ la solution c est unique.

2. La fonction $g(x)$ qui assure la convergence de la méthode du point fixe :

$f(x) = \cos x - x = 0 \;\Rightarrow\; \cos x = x$

On pose : $g(x) = cosx$

On va vérifier les conditions qui assurent la convergence de la méthode du point fixe.

a) $\boldsymbol{g[0,1] \subset [0,1]}$?

La fonction $g(x)$ est continue sur $[0,1]$

$\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leq cosx \leq 1$

$g\colon \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [0,1]$

Comme $[0,1] \subset \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow g[0,1] \subset [0,1]$

b) $\boldsymbol{|g'(x)| \leq k < 1 \quad \forall x \in [0,1]}$?

$où\ \ k = Max\{|g'(x)|\}\ pour\ x\ \in\ [0,1]$

$g'(x) = -\sin x \;\Rightarrow\; |g'(x)| = \sin x$ car $x \in [0,1]$

$(\sin x)' = \cos x > 0 \quad \forall\, x \in [0,1] \Longrightarrow \sin x \nearrow$ *c.à.d.* $|g'(x)| \nearrow$ et elle atteint donc son Max en $x = 1$.

$k = sin(1) = 0.84 \;\Rightarrow |g'(x)| \leq k = 0.84 < 1$

Les conditions **a)** et **b)** sont vérifiées donc la méthode du point fixe converge.

La suite est définie par la formule récursive suivante :

$$x_k = g(x_{k-1}) = cos(x_{k-1})$$

3. Calcul de la solution approximative : $\varepsilon = 10^{-2}$ et $x_0 = 0.5$

n	x_k	$\lvert x_k - x_{k-1}\rvert$
0	0.500	—
1	0.878	0.378
2	0.639	0.239
3	0.803	0.164
4	0.694	0.109
5	0.769	0.075
6	0.719	0.050

7	0.752	0.033
8	0.730	0.022
9	0.745	0.015
10	0.735	0.010

La solution approchée est : $c \simeq 0.735$.

République Algérienne Démocratique et Populaire
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Université Mohamed Boudiaf- M'sila
Faculté De Technologie
Département De Génie Électrique

جامعة محمد بوضياف-المسيلة
كلية التكنولوجيا
قسم: الهندسة الكهربائية

Solutions de la Série d'exercices N°01

Exercice 6 :

$f(x) = x^3 - x - 1 = 0$, $x \in [1,2]$

1. **Vérification des conditions de convergence :**

$g(x) = \sqrt[3]{(x+1)}$

On a deux conditions à vérifier :

a. $g[1,2] \subset [1,2]$?

La fonction *g(x)* est continue sur l'intervalle [1,2]

$$\left.\begin{array}{l} g'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}} > 0 \ \forall\, x \in [1,2] \text{ donc } g \nearrow \\ g(1) = 1.26 \ \in [1,2] \\ g(2) = 1.44 \in [1,2] \end{array}\right\} \Rightarrow \forall\, x \in [1,2],\ \ 1.26 \le g(x) \le 1.44 \Rightarrow g[1,2] \subset [1,2]$$

b. $|g'(x)| \le k < 1 \quad \forall\, x \in [1,2]$?

$$g'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}} \Rightarrow |g'(x)| = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$$

$$\forall x_1 \in [1,2], \forall x_2 \in [1,2]: x_1 < x_2 \ \Rightarrow \frac{1}{3\sqrt[3]{(x_1+1)^2}} > \frac{1}{3\sqrt[3]{(x_2+1)^2}}$$

$$\Rightarrow |g'(x_1)| > |g'(x_2)| \Rightarrow |g'(x)| \searrow$$

donc $|g'(x)| \le |g'(1)| = k = 0.21 < 1$

Les conditions **a)** et **b)** sont vérifiées donc la méthode du point fixe converge.

La suite est définie par la formule récursive suivante :

$$x_k = g(x_{k-1}) = \sqrt[3]{x_{k-1} + 1}$$

2. Calcul de la solution approximative : $\varepsilon = 10^{-2}$ et $x_0 = 1.5$

n	x_k	$\lvert x_k - x_{k-1} \rvert$
0	1.500	—
1	1.357	0.143
2	1.331	0.019
3	1.326	0.005

La solution approchée est $c \simeq 1.326$.

3. Comparaison et conclusion :

Le nombre d'itérations obtenus par la méthode du point fixe (n=3) est inférieur à celui obtenu par la méthode de la bissection (n=7).

On conclue que la méthode du point fixe converge plus rapidement que celle de la bissection.

République Algérienne Démocratique et Populaire
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Université Mohamed Boudiaf- M'sila
Faculté De Technologie
Département De Génie Électrique

جامعة محمد بوضياف-المسيلة
كلية التكنولوجيا
قسم :الهندسة الكهربائية

Solutions de la Série d'exercices N°02

Exercice 1 :

Résolution du système d'équations par la méthode de Gauss

On écrit le système sous la forme matricielle suivante :

$A.\vec{X} = \vec{B}$ avec $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$, $\vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ et $\vec{B} = \begin{bmatrix} 9 \\ -5 \\ -9 \end{bmatrix}$

On forme la matrice augmentée $\tilde{A}$ définie par :

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{ccc:c} 4 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & -3 & -9 \end{array}\right] \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array}$$

Etape 1 : Annulation des éléments sous-diagonaux de la première colonne en utilisant la ligne E_1

$E_2 \leftarrow E_2 - \frac{1}{2} E_1$

$E_3 \leftarrow E_3 - \frac{1}{4} E_1$

$$\tilde{A}^{(1)} = \left[\begin{array}{ccc:c} 4 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 7/2 & -2 & -19/2 \\ 0 & 3/4 & -7/2 & -45/4 \end{array}\right] \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array}$$

Etape 2 : Annulation des éléments sous-diagonaux de la seconde colonne en utilisant la ligne E_2

$E_3 \leftarrow E_3 - \frac{3}{14} E_2$

$$\tilde{A}^{(2)} = \left[\begin{array}{ccc:c} 4 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 7/2 & -2 & -19/2 \\ 0 & 0 & -43/14 & -129/14 \end{array}\right] \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array}$$

La résolution du système à matrice triangulaire supérieur résultant donne

$-\frac{43}{14} x_3 = -\frac{129}{14} \Rightarrow x_3 = 3$

$\frac{7}{2} x_2 - 2x_3 = -\frac{19}{2} \Rightarrow x_2 = -1$

$4x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \Rightarrow x_1 = 1$

Donc, la solution est :

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

République Algérienne Démocratique et Populaire
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Université Mohamed Boudiaf- M'sila
Faculté De Technologie
Département De Génie Électrique

جامعة محمد بوضياف-المسيلة
كلية التكنولوجيا
قسم: الهندسة الكهربائية

Solutions de la Série d'exercices N°02

Exercice 4 :

1. Calcul du déterminant des matrices A et B par la méthode de Gauss :

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array}$$

Etape 1 : Annulation des éléments sous-diagonaux de la première colonne en utilisant la ligne E_1

$$E_2 \leftarrow E_2 - \frac{1}{2}E_1$$

$$E_3 \leftarrow E_3 - \frac{1}{2}E_1$$

$$\tilde{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 5/2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array}$$

Etape 2 : Annulation des éléments sous-diagonaux de la deuxième colonne en utilisant la ligne E_2

$$E_3 \leftarrow E_3 - \frac{1}{3}E_2$$

$$\tilde{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 7/3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array}$$

Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses éléments diagonaux, donc :

$$\det(A) = \det(\tilde{A}^{(1)}) = \det(\tilde{A}^{(2)}) = 2 * \frac{3}{2} * \frac{7}{3} = 7$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array}$$

Etape 1 : Annulation des éléments sous-diagonaux de la première colonne en utilisant la ligne E_1

$$E_2 \leftarrow E_2 - 2E_1$$

$$E_3 \leftarrow E_3 - 3E_1$$

$$\tilde{B}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -7 & -4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array}$$

Etape 2 : Annulation des éléments sous-diagonaux de la deuxième colonne en utilisant la ligne E_2

République Algérienne Démocratique et Populaire

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Université Mohamed Boudiaf- M'sila
Faculté De Technologie
Département De Génie Électrique

جامعة محمد بوضياف-المسيلة
كلية التكنولوجيا
قسم الهندسة الكهربائية

Solutions de la Série d'exercices N°02

$E_3 \leftarrow E_3 - \frac{7}{3}E_2$

$$\tilde{B}^{(2)} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array}$$

Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses éléments diagonaux, donc :

$$\det(B) = \det(\tilde{B}^{(1)}) = \det(\tilde{B}^{(2)}) = 1 * (-3) * 3 = -9$$

2. Déterminants de A^{-1} , B^{-1} et $(A.B)^{-1}$

$\det(A^{-1}) = ?$

On a : $A.A^{-1} = I \Rightarrow \det(A.A^{-1}) = \det(I) \Rightarrow \det(A) * \det(A^{-1}) = \det(I) \Rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{\det(I)}{\det(A)}$

Nous avons $\det(I) = 1$ donc $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = \frac{1}{7}$

$\det(B^{-1}) = ?$

$$\det(B^{-1}) = \frac{1}{\det(B)} = -\frac{1}{9}$$

$\det(A.B)^{-1} = ?$

$(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$

$$\det(A.B)^{-1} = det(B^{-1}.A^{-1}) = \det(B^{-1}).\det(A^{-1}) = \left(-\frac{1}{9}\right) * \frac{1}{7} = -\frac{1}{63}.$$

République Algérienne Démocratique et Populaire
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Université Mohamed Boudiaf- M'sila
Faculté De Technologie
Département De Génie Électrique

جامعة محمد بوضياف-المسيلة
كلية التكنولوجيا
قسم: الهندسة الكهربائية

Solutions de la Série d'exercices N°03

Exercice 1 :

$$\begin{cases} -2x_1 + 10x_3 = 7 \\ 10x_1 - x_2 = 9 \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 10 \end{cases}$$

1. Réécriture du système pour qu'il soit à diagonale dominante:

Pour que le système soit à diagonale dominante, il faut que la condition suivante soit satisfaite :

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{3} |a_{ij}| < |a_{ii}| \quad \forall i = \overline{1,n}$$

Le système qui vérifie cette condition est :

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 = 9 \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 10 \\ -2x_1 + 10x_3 = 7 \end{cases}$$

Parce que :

$$\begin{cases} |-1| + |0| < |10| \\ |-1| + |-2| < |10| \\ |-2| + |0| < |10| \end{cases}$$

2. Calcul des 3 premières itérations en utilisant la méthode de Jacobi et de Gauss-Seidel :

a. Méthode de Jacobi :

Le système récursif pour la méthode de Jacobi s'écrit :

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \dfrac{x_2^k + 9}{10} \\ x_2^{k+1} = \dfrac{x_1^k + 2x_3^k + 10}{10} \\ x_3^{k+1} = \dfrac{2x_1^k + 7}{10} \end{cases}$$

A partir de $\vec{X}^{(0)} = [0 \quad 0 \quad 0]^T$, on trouve :

k	0	1	2	3
x_1	0.0000	0.9000	1.0000	1.0230
x_2	0.0000	1.0000	1.2300	1.2760
x_3	0.0000	0.7000	0.8800	0.9000

Solutions de la Série d'exercices N°03

La solution approchée est : $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1.0230 \\ 1.2760 \\ 0.9000 \end{pmatrix}$

b. ***Méthode de Gauss-Seidel :***

Le système récursif pour la méthode de Gauss-Seidel s'écrit :

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \dfrac{x_2^k + 9}{10} \\ x_2^{k+1} = \dfrac{x_1^{k+1} + 2x_3^k + 10}{10} \\ x_3^{k+1} = \dfrac{2x_1^{k+1} + 7}{10} \end{cases}$$

A partir de $\vec{X}^{(0)} = [0 \quad 0 \quad 0]^T$, on trouve :

k	0	1	2	3
x_1	0.0000	0.9000	1.0090	1.0277
x_2	0.0000	1.0900	1.2769	1.2831
x_3	0.0000	0.8800	0.9018	0.9055

La solution approchée est : $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1.0277 \\ 1.2831 \\ 0.9055 \end{pmatrix}$

Sachant que la solution exacte est : $\vec{X} = \begin{pmatrix} \frac{507}{493} \cong 1.0284 \\ \frac{633}{493} \cong 1.2840 \\ \frac{893}{986} \cong 0.9057 \end{pmatrix}$

On constate que, pour un même nombre d'itérations, la solution approximative obtenue par la méthode de Gauss-Seidel est plus précise. La méthode de Gauss-Seidel a convergé plus vite que la méthode de Jacobi.

<u>Exercice 2 :</u>

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 17 \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 = -18 \end{cases}$$

1. **<u>Calcul des 5 premières itérations en utilisant la méthode de Jacobi et de Gauss-Seidel :</u>**

a. ***Méthode de Jacobi :***

Le système récursif pour la méthode de Jacobi s'écrit :

Solutions de la Série d'exercices N°03

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \dfrac{-x_2^k + x_3^k + 2}{3} \\ x_2^{k+1} = \dfrac{-x_1^k - 2x_3^k + 17}{5} \\ x_3^{k+1} = \dfrac{2x_1^k - x_2^k + 18}{6} \end{cases}$$

A partir de $\vec{X}^{(0)} = [0 \quad 0 \quad 0]^T$, on trouve :

k	0	1	2	3	4	5
x_1	0.0000	0.6667	0.5333	0.8630	0.8674	0.9406
x_2	0.0000	3.4000	2.0667	2.2311	2.0941	2.0602
x_3	0.0000	3.0000	2.6556	2.8333	2.9158	2.9401

La solution approchée est : $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0.9406 \\ 2.0602 \\ 2.9401 \end{pmatrix}$

b. *Méthode de Gauss-Seidel :*

Le système récursif pour la méthode de Gauss-Seidel s'écrit :

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \dfrac{-x_2^k + x_3^k + 2}{3} \\ x_2^{k+1} = \dfrac{-x_1^{k+1} - 2x_3^k + 17}{5} \\ x_3^{k+1} = \dfrac{2x_1^{k+1} - x_2^{k+1} + 18}{6} \end{cases}$$

A partir de $\vec{X}^{(0)} = [0 \quad 0 \quad 0]^T$, on trouve :

k	0	1	2	3	4	5
x_1	0.0000	0.6667	0.4704	0.8498	0.9381	0.9775
x_2	0.0000	3.2667	2.2348	2.1163	2.0402	2.0154
x_3	0.0000	2.6778	2.7843	2.9305	2.9727	2.9899

La solution approchée est : $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0.9775 \\ 2.0154 \\ 2.9899 \end{pmatrix}$

Université Mohamed Boudiaf- M'sila
Faculté De Technologie
Département De Génie Électrique

جامعة محمد بوضياف-المسيلة
كلية التكنولوجيا
قسم: الهندسة الكهربائية

Solutions de la Série d'exercices N°03

2. Conclusion

On constate que, pour un même nombre d'itérations, la solution approximative obtenue par la méthode de Gauss Seidel est plus précise. La méthode de Gauss-Seidel converge généralement plus vite que la méthode de Jacobi, mais pas toujours.

Exercice 3 : (supplémentaire)

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 - 3x_2 + 9x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 10 \end{cases}$$

Calcul des 3 premières itérations en utilisant la méthode de Jacobi et de Gauss-Seidel :

a. Méthode de Jacobi :

Le système récursif pour la méthode de Jacobi s'écrit :

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \dfrac{x_2^k - x_3^k - 1}{2} \\ x_2^{k+1} = x_1^k + 3x_3^k \\ x_3^{k+1} = \dfrac{10 - 3x_1^k - 2x_2^k}{5} \end{cases}$$

A partir de $\vec{X}^{(0)} = [0 \quad 0 \quad 0]^T$, on trouve :

k	0	1	2	3
x_1	0.00	-0.50	-1.50	1.10
x_2	0.00	0.00	5.50	5.40
x_3	0.00	2.00	2.30	0.70

b. Méthode de Gauss-Seidel :

Le système récursif pour la méthode de Gauss-Seidel s'écrit :

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \dfrac{x_2^k - x_3^k - 1}{2} \\ x_2^{k+1} = x_1^{k+1} + 3x_3^k \\ x_3^{k+1} = \dfrac{10 - 3x_1^{k+1} - 2x_2^{k+1}}{5} \end{cases}$$

A partir de $\vec{X}^{(0)} = [0 \quad 0 \quad 0]^T$, on trouve :

Université Mohamed Boudiaf- M'sila
Faculté De Technologie
Département De Génie Électrique

جامعة محمد بوضياف-المسيلة
كلية التكنولوجيا
قسم الهندسة الكهربائية:

Solutions de la Série d'exercices N°03

k	0	1	2	3
x_1	0.00	-0.50	-2.00	1.75
x_2	0.00	-0.50	5.50	4.75
x_3	0.00	2.50	1.00	-0.95

La solution diverge car le système linéaire n'est pas à diagonale dominante (condition suffisante n'est pas vérifiée). Dans le tableau ci-dessous, nous calculons pour les deux méthodes l'erreur relative obtenue pour chaque itération.

k	$\frac{\lVert\vec{X}^{(k)} - \vec{X}^{(k-1)}\rVert}{\lVert\vec{X}^{(k)}\rVert}$	
	Jacobi	Gauss-Seidel
1	100 %	100 %
2	91.06 %	107.07 %
3	54.95 %	83.30 %

Il est clair à partir du tableau que la méthode de Gauss-Seidel diverge plus vite que la méthode de Jacobi.

République Algérienne Démocratique et Populaire
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Université Mohamed Boudiaf- M'sila
Faculté De Technologie
Département De Génie Électrique

جامعة محمد بوضياف-المسيلة
كلية التكنولوجيا
قسم الهندسة الكهربائية

Solutions de la Série d'exercices N°04

Exercice 1 :

x_i	$x_0 = 0$	$x_1 = 1$	$x_2 = 3$
$f(x_i) = y_i$	$y_0 = 1$	$y_1 = 0.5$	$y_2 = 0.25$

1. **Polynôme de Lagrange passant par les 3 points :**

On a 3 point donc le degré du polynôme est $n \leq 2$.

$$P_2(x) = \sum_{K=0}^{2} \frac{L_K(x)}{L_K(x_K)} y_K = \frac{L_0(x)}{L_0(x_0)} y_0 + \frac{L_1(x)}{L_1(x_1)} y_1 + \frac{L_2(x)}{L_2(x_2)} y_2$$

Pour $K = 0$:

$$\frac{L_0(x)}{L_0(x_0)} = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 1)(x - 3)}{(0 - 1)(0 - 3)} = \frac{1}{3}(x - 1)(x - 3)$$

Pour $K = 1$:

$$\frac{L_1(x)}{L_1(x_1)} = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x - 0)(x - 3)}{(1 - 0)(1 - 3)} = -\frac{1}{2}x(x - 3)$$

Pour $K = 2$:

$$\frac{L_2(x)}{L_2(x_2)} = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x - 0)(x - 1)}{(3 - 0)(3 - 1)} = \frac{1}{6}x(x - 1)$$

Donc,

$$P_2(x) = \frac{1}{3}(x - 1)(x - 3)(1) - \frac{1}{2}x(x - 3)(0.5) + \frac{1}{6}x(x - 1)(0.25)$$

$$P_2(x) = 0.125x^2 - 0.625x + 1$$

2. **Approximation de (1.5) :**

En utilisant le polynôme de Lagrange $P_2(x)$, on trouve :

$$y(x) = P_2(1.5) = 0.125(1.5)^2 - 0.625(1.5) + 1$$

$$\Rightarrow y(1.5) \simeq 0.344$$

3. **Calcul de l'erreur maximale :**

$$|f(x) - P_2(x)| \leq E_{Max}(x)$$

Avec :

$$E_{Max}(x) = \frac{M}{(n + 1)!} \prod_{i=0}^{2} |x - x_i|$$

Où : $M = Max\{|f^{(3)}(\xi)|\}, \quad \xi \in [0,3]$

République Algérienne Démocratique et Populaire
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Université Mohamed Boudiaf- M'sila
Faculté De Technologie
Département De Génie Électrique

جامعة محمد بوضياف-المسيلة
كلية التكنولوجيا
قسم: الهندسة الكهربائية

Solutions de la Série d'exercices N°04

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}, \qquad f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}, \qquad f'''(x) = -\frac{6}{(x+1)^4}$$

$$M = Max\left\{\left|-\frac{6}{(\xi+1)^4}\right|\right\} = Max\left\{\frac{6}{(\xi+1)^4}\right\}, \qquad \xi \in [0,3]$$

$\forall x_1 \in [0,3]$, $\quad \forall x_2 \in [0,3]$,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1 \Rightarrow (x_1+1)^4 < (x_2+1)^4 \Rightarrow \frac{1}{(x_1+1)^4} > \frac{1}{(x_2+1)^4} \Rightarrow \frac{6}{(x_1+1)^4} > \frac{6}{(x_2+1)^4} \Rightarrow |f'''(x_1)| > |f'''(x_2)| \Rightarrow |f'''(x)| \searrow$$

$\Rightarrow$ le Max est obtenu pour $x = 0$, Donc

$$M = \frac{6}{(0+1)^4} = 6$$

$$E_{Max}(x) = \frac{6}{3*2}|x||x-1||x-3| \qquad x \in [0,3]$$

Pour $x = 1.5$, $E_{Max}(1.5) = |1.5||1.5-1||1.5-3|$

$E_{Max}(1.5) = 1.125$

$E_{exacte} = |f(1.5) - P_2(1.5)| = |0.4 - 0.344|$

$E_{exacte} = 0.056$

Comparaison :

On constate que $E_{exacte} < E_{Max}$.

Exercice 2 :

Polynôme de Lagrange

a. $\boldsymbol{P(x)}$

x_i	$x_0 = 0$	$x_1 = 1$	$x_2 = 2$
$P(x_i) = y_i$	$y_0 = -6$	$y_1 = 3$	$y_2 = 21$

On a 3 point donc le degré du polynôme est $n \leq 2$.

$$P_2(x) = \sum_{K=0}^{2} \frac{L_K(x)}{L_K(x_K)} y_K = \frac{L_0(x)}{L_0(x_0)} y_0 + \frac{L_1(x)}{L_1(x_1)} y_1 + \frac{L_2(x)}{L_2(x_2)} y_2$$

Pour $K = 0$:

République Algérienne Démocratique et Populaire
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Université Mohamed Boudiaf- M'sila
Faculté De Technologie
Département De Génie Électrique

جامعة محمد بوضياف-المسيلة
كلية التكنولوجيا
قسم: الهندسة الكهربائية

Solutions de la Série d'exercices N°04

$$\frac{L_0(x)}{L_0(x_0)} = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} = \frac{1}{2}(x-1)(x-2)$$

Pour $K = 1$:

$$\frac{L_1(x)}{L_1(x_1)} = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} = -x(x-2)$$

Pour $K = 2$:

$$\frac{L_2(x)}{L_2(x_2)} = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} = \frac{1}{2}x(x-1)$$

Donc,

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-2)(-6) - x(x-2)(3) + \frac{1}{2}x(x-1)(21)$$

$$P_2(x) = \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}x - 6$$

b. $\boldsymbol{Q(x)}$

x_i	$x_0 = 0$	$x_1 = 1$	$x_2 = 2$
$Q(x_i) = y_i$	$y_0 = 10$	$y_1 = 15$	$y_2 = 40$

On a 3 point donc le degré du polynôme est $n \leq 2$.

$$Q_2(x) = \sum_{K=0}^{2} \frac{L_K(x)}{L_K(x_K)} y_K = \frac{L_0(x)}{L_0(x_0)} y_0 + \frac{L_1(x)}{L_1(x_1)} y_1 + \frac{L_2(x)}{L_2(x_2)} y_2$$

Pour $K = 0$:

$$\frac{L_0(x)}{L_0(x_0)} = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} = \frac{1}{2}(x-1)(x-2)$$

Pour $K = 1$:

$$\frac{L_1(x)}{L_1(x_1)} = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} = -x(x-2)$$

Pour $K = 2$:

$$\frac{L_2(x)}{L_2(x_2)} = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} = \frac{1}{2}x(x-1)$$

Donc,

$$Q_2(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-2)(10) - x(x-2)(15) + \frac{1}{2}x(x-1)(40)$$

$$Q_2(x) = 10x^2 - 5x + 10$$

République Algérienne Démocratique et Populaire

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

Ministère de l’Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Université Mohamed Boudiaf- M’sila
Faculté De Technologie
Département De Génie Électrique

جامعة محمد بوضياف-المسيلة
كلية التكنولوجيا
قسم: الهندسة الكهربائية

Solutions de la Série d’exercices N°04

Les points d’intersection

Aux points d’intersection $P_2(x) = Q_2(x)$

$$\frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}x - 6 = 10x^2 - 5x + 10$$

$$\frac{11}{2}x^2 - \frac{19}{2}x + 16 = 0 \Longrightarrow 11x^2 - 19x + 32 = 0$$

$\Delta = -1047 < 0$ donc on a aucun point d’intersection.

Exercice 3 :

Approximation de $f(4.5)$:

Puisque le polynôme est de degré 2, nous avons besoin uniquement de 3 points. On prend des points dont les abscisses sont proches de 4.5. Ces points sont présentés dans le tableau suivant :

x_i	$x_0 = 3$	$x_1 = 5$	$x_2 = 7$
$f(x_i) = y_i$	$y_0 = 1.2528$	$y_1 = 1.6094$	$y_2 = 1.9459$

On a 3 points donc le degré du polynôme est $n = 2$. Le polynôme de Newton qui passe par ces 3 points est :

$$P_2(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!\,h^1}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}(x - x_0)(x - x_1)$$

où : $h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = 2$

$$\begin{array}{l} x_0 = 3 \longrightarrow y_0 = 1.2528 \\ x_1 = 5 \longrightarrow y_1 = 1.6094 \\ x_2 = 7 \longrightarrow y_2 = 1.9459 \end{array}
\quad
\begin{array}{l} \Delta y_0 = y_1 - y_0 = 0.3566 \\ \Delta y_1 = y_2 - y_1 = 0.3365 \end{array}
\quad
\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = -0.0201$$

Donc :

$$P_2(x) = 1.2528 + \frac{0.3566}{2}(x - 3) + \frac{-0.0201}{2!\,2^2}(x - 3)(x - 5)$$

$$P_2(x) = 1.2528 + 0.1783(x - 3) - 0.0025(x - 3)(x - 5)$$

L’approximation de $f(4.5)$ est donc :

$$f(4.5) \simeq P_2(4.5) = 1.2528 + 0.1783(4.5 - 3) - 0.0025(4.5 - 3)(4.5 - 5)$$

$$P_2(4.5) = 1.5221.$$

République Algérienne Démocratique et Populaire
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Université Mohamed Boudiaf- M'sila
Faculté De Technologie
Département De Génie Électrique

جامعة محمد بوضياف-المسيلة
كلية التكنولوجيا
قسم: الهندسة الكهربائية

Solutions de la Série d'exercices N°04

Exercice 4 :

1. Calcul de l'approximation de $\sqrt{1.6}$

x_i	$x_0 = 1$	$x_1 = 2$	$x_2 = 3$
$f(x_i) = y_i$	$y_0 = 1$	$y_1 = 1.4142$	$y_2 = 1.7320$

Le polynôme de Newton qui passe par ces 3 points est :

$$P_2(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!\,h^1}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}(x - x_0)(x - x_1)$$

où $h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = 1$

$$\begin{array}{lll} x_0 = 1 \longrightarrow y_0 = 1 & & \\ & \Delta y_0 = y_1 - y_0 = 0.4142 & \\ x_1 = 2 \longrightarrow y_1 = 1.4142 & & \Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = -0.0964 \\ & \Delta y_1 = y_2 - y_1 = 0.3178 & \\ x_2 = 3 \longrightarrow y_2 = 1.7320 & & \end{array}$$

Donc :

$$P_2(x) = 1 + \frac{0.4142}{1!\,1^1}(x - 1) + \frac{-0.0964}{2!\,1^2}(x - 1)(x - 2)$$

$$P_2(x) = 1 + 0.4142(x - 1) - 0.0482(x - 1)(x - 2)$$

L'approximation de $\sqrt{1.6}$ est donc :

$$P_2(1.6) = 1 + 0.4142(1.6 - 1) - 0.0482(1.6 - 1)(1.6 - 2)$$

$$P_2(1.6) = 1.2601.$$

2. L'erreur commise :

L'erreur commise en approximant $\sqrt{1.6}$ par $P_2(1.6)$ est :

$$E_{exacte} = |f(1.6) - P_2(1.6)| = |\sqrt{1.6} - 1.2601| = 0.0048.$$

République Algérienne Démocratique et Populaire
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Université Mohamed Boudiaf- M'sila
Faculté De Technologie
Département De Génie Électrique

جامعة محمد بوضياف-المسيلة
كلية التكنولوجيا
قسم: الهندسة الكهربائية

Solutions de la Série d'exercices N°04

Exercice 5 (supplémentaire) :

x_i	$x_0=-1$	$x_1=-0.5$	$x_2=0$	$x_3=0.5$	$x_4=1$
$f(x_i)=y_i$	$y_0=1$	$y_1=0.5$	$y_2=0$	$y_3=0.5$	$y_4=1$

1. **Polynôme de Lagrange de la fonction $f(x)$ passant par les points ci-dessus :**

On a 5 point donc le degré du polynôme est $n \leq 4$.

$$P_4(x)=\sum_{K=0}^{4}\frac{L_K(x)}{L_K(x_K)}y_K=\frac{L_0(x)}{L_0(x_0)}y_0+\frac{L_1(x)}{L_1(x_1)}y_1+\frac{L_2(x)}{L_2(x_2)}y_2+\frac{L_3(x)}{L_3(x_3)}y_3+\frac{L_4(x)}{L_4(x_4)}y_4$$

Pour $K=0$:

$$\frac{L_0(x)}{L_0(x_0)}=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)}$$
$$=\frac{(x+0.5)(x-0)(x-0.5)(x-1)}{(-1+0.5)(-1-0)(-1-0.5)(-1-1)}=\frac{2}{3}(x+0.5)x(x-0.5)(x-1)$$

Pour $K=1$:

$$\frac{L_1(x)}{L_1(x_1)}=\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}$$
$$=\frac{(x+1)(x-0)(x-0.5)(x-1)}{(-0.5+1)(0.5-0)(-0.5-0.5)(-0.5-1)}$$
$$=-\frac{8}{3}(x+1)x(x-0.5)(x-1)$$

Pour $K=2$:

$$\frac{L_2(x)}{L_2(x_2)}=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)}=\frac{(x+1)(x+0.5)(x-0.5)(x-1)}{(0+1)(0+0.5)(0-0.5)(0-1)}$$
$$=4(x+1)(x+0.5)(x-0.5)(x-1)$$

Pour $K=3$:

$$\frac{L_3(x)}{L_3(x_3)}=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)}=\frac{(x+1)(x+0.5)(x-0)(x-1)}{(0.5+1)(0.5+0.5)(0.5-0)(0.5-1)}$$
$$=-\frac{8}{3}(x+1)(x+0.5)x(x-1)$$

Pour $K=4$:

$$\frac{L_4(x)}{L_4(x_4)}=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}=\frac{(x+1)(x+0.5)(x-0)(x-0.5)}{(1+1)(1+0.5)(1-0)(1-0.5)}$$
$$=\frac{2}{3}(x+1)(x+0.5)x(x-0.5)$$

Solutions de la Série d’exercices N°04

Donc :

$P_4(x) = \frac{2}{3}(x+0.5)x(x-0.5)(x-1)(1) - \frac{8}{3}(x+1)x(x-0.5)(x-1)(0.5) + 4(x+1)(x+0.5)(x-0.5)(x-1)(0) - \frac{8}{3}(x+1)(x+0.5)x(x-1)(0.5) + \frac{2}{3}(x+1)(x+0.5)x(x-0.5)(1)$

$P_4(x) = -\frac{4}{3}x^4 + \frac{7}{3}x^2.$