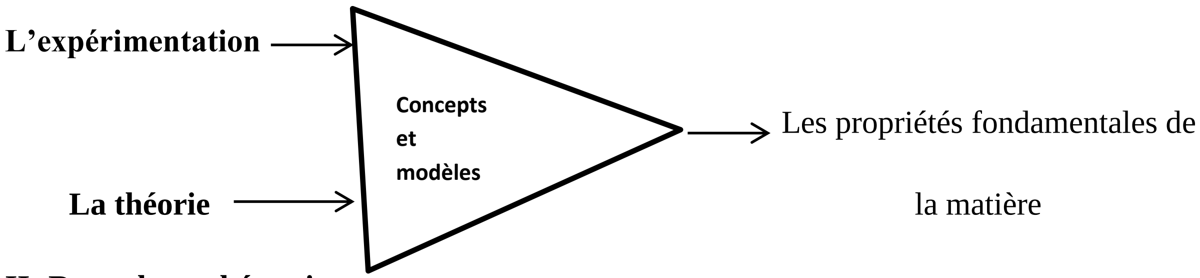
Chapitre 1: Rappels mathématiques

I- Introduction

Les physiciens observent, mesurent et modélisent le comportement et les interactions de la matière à travers l'espace et le temps, leur effort consiste à rendre le monde observable donc mesurable. La physique est une science qui étudié par l'expérimentation, la théorie et par le développement des concepts, les propriétés fondamentales de la matière.



II- Rappels mathématique

II-1 Grandeurs et Analyse dimensionnelle

II-1-1 Notion de dimension

La connaissance de la dimension d'une grandeur G renseigne sur sa nature physique.
La dimension de la grandeur G se note [G].

Exemple: Si G est une masse, alors [G] = M, elle a la dimension d'une masse; on dit aussi qu'elle est homogène à une masse.

La relation [G] = M correspond à **l'équation aux dimensions** de la grandeur G.

Si [G] =1, la grandeur est dite sans dimension ou de dimension 1.

II-1-2 Règles sur les équations aux dimensions

Grandeur	Dimension associée	Unité SI
Longueur	L	mètre (m)
Masse	M	kilogramme (kg)
Temps	T	seconde (s)
Intensité du courant électrique	I	ampère (A)
Intensité lumineuse	J	candela (Cd)
Température	θ	kelvin (K)
Quantité de matière	N	mole (mol)

7 grandeurs fondamentales du système international

Quelques caractéristiques

- ✓ On ne peut additionner que des termes ayant la même dimension .
- ✓ La dimension du produit de deux grandeurs est le produit des dimensions de chacune des grandeurs: [AB] = [A][B].
- ✓ La dimension de A^n est égale à $[A]^n$ où n est un nombre sans dimension.
- ✓ Pour les fonctions suivantes: sin(u), cos(u), tan(u), ln(u), log(u) et e^u , la grandeur u est sans dimension.
- ط L'équation aux dimensions de toute grandeur G peut se mettre sous la forme: $[G] = L^a M^b T^c I^d J^e \theta^f N^g$

<u>II-1-3 Les grandeurs physiques dérivées</u>

Les grandeurs physiques dérivées sont toutes les grandeurs physiques qui dépendent des grandeurs fondamentales.

Exemple : La vitesse = Longueur /Temps $[v]=LT^{-1}$

La force = Masse. Longueur/Temps $[F]=MLT^{-2}$

Le volume = Longeur.Longeur.Longeur $[V] = L^3$

<u>Application</u> vérification de l'homogénéité de l'expression de la période d'un pendule simple:

$T_0 = 2\pi \sqrt{(l/g)}$

L'expression est « dimensionnellement juste» si : $[To] = [\sqrt{(l/g)}]$

La dimension du premier terme de l'égalité est [To] = T.

L'équation aux dimensions du second terme peut s'écrire :

$[\sqrt{(l/g)}] = [\sqrt{l}] / [\sqrt{g}] = [l]^{1/2} [g]^{-1/2}$ avec $[l]^{1/2} = L^{1/2}$

Sachant que $\Sigma F_{ext} = m.a$, si $\Sigma F_{ext} = P = m.g$ alors [P] = [m][g] = [m][a]

soit $[g] = [a] = LT^{-2}$. En remplaçant [l] et [g] dans l'équation aux dimensions de $[l]^{1/2} [g]^{-1/2}$, on obtient : $L^{1/2} L^{-1/2} (T^{-2})^{-1/2} = T$

L'expression $To = 2\pi \sqrt{(l/g)}$ est homogène car les deux termes de l'équation ont la même dimension, celle d'un temps.

<u>II-2 Puissance et racine</u>

Pour tout nombre a non nul et n entier positif, on a :

$$a^{n} = a \times a \times a \ldots \times a \quad ; \quad a^{1} = a \;;\; a^{-n} = \frac{1}{a^n} \;;\; a^{0} = 1$$

Soit deux nombres a>**0**, b<**0** et deux entiers naturels m et n. On a :

1) $a^n \times a^m = a^{n+m}$ 2) $(a \times b)^n = a^n \times b^n$ 3) $(a^m)^n = a^{m \times n}$ 4) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$

5) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $a \neq 0$ C'est la racine nième de a $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

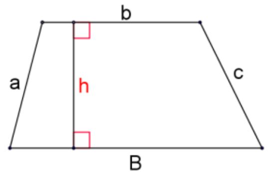
$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $(\sqrt{a})^2 = a$ $\sqrt{c^2} = |c|$

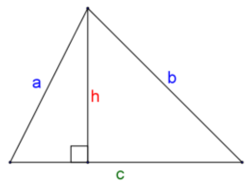
La racine n nième $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$ $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

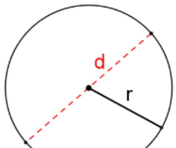
$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

II-3 Périmètres, aires et volumes

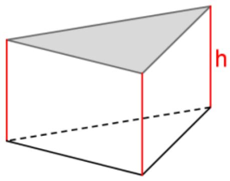
Les différents solides et figures planes qu'on va rencontrer dans cette matière sont les suivants:

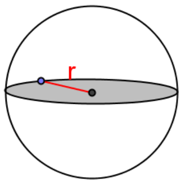
<table>
<tr><th colspan="3">Figures Planes</th></tr>
<tr><td>Le trapèze


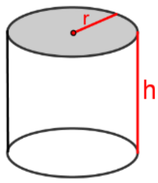
Perimetre = a + b + c + B
Aire = $\frac{(B + b) \times h}{2}$</td>
<td>Le triangle


Périmètre = a + b + c
Aire = $\frac{c \times h}{2}$</td>
<td>Le cercle


Longueur du cercle = d x π
ou
2 π r
Aire du disque = πr^2</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="3">Solides</th></tr>
<tr><td>Le prisme


Volume = Aire de la base x h
Aire latérale = périmètre de la base x h</td>
<td>La boule


Volume = $\frac{4}{3} \pi r^3$
Aire de la sphère = $4 \pi r^2$</td>
<td>Le cylindre


Volume = $\pi r^2 h$
Aire latérale = $2 \pi r h$</td></tr>
</table>

II-4 Les operateurs

Les opérateurs sont destinés à décrire les variations spatiales d'un champs scalaire ou vectoriel.

- Un champ scalaire définie par le scalaire U(M,t) en tout point de l'espace.

Exemple: Le champ T°, de pression P, de potentiel V.

- Un champ vectoriel définie par le vecteur $\vec{A}(M,t)$ en tout point de l'espace.

Exemple: Champ de pesanteur g, champ de vitesse, champ électrique, champ de force……

II-4-1 Notion de différentielle

Soit une fonction *f (x, y, z)*, nous appellerons différentielle totale exacte de *f*

(notation *df)* la quantité $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$ où :

$\frac{\partial f}{\partial x}$ est la dérivée de *f* par rapport à *x*, les variable *y et z* étant considérées comme des constantes dans la dérivation (prononciation *d rond f sur d rond x*).

$\frac{\partial f}{\partial y}$ est la dérivée de *f* par rapport à *y*, les variables x et *z* étant considérées comme des constantes dans la dérivation.

$\frac{\partial f}{\partial z}$ est la dérivée de *f* par rapport à z, les variables x et *y* étant considérées comme des constantes dans la dérivation.

La différentielle apparaît comme la somme des différentielles partielles.

II-4-2 L'operateur gradient : étant donné un champ scalaire dont la valeur en un point M(x,y,z) est *f (x, y,z)*,on appelle gradient du champ scalaire f le vecteur

$$\overrightarrow{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} = \vec{\nabla} f$$

où $\vec{i}, \vec{j}$ *et* $\vec{k}$ sont les vecteurs unitaires de la base cartésienne habituelle.

II-4-3 L'opérateur " nabla " $\vec{\nabla}$ définie par :

$$\vec{\nabla} = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

Où

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

II-4-4 Opérateur divergence :

Soit un vecteur $\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$ où les composantes sont des fonctions des variables *x*, *y* et *z*. On appelle divergence du vecteur $\vec{A}$ le scalaire :

$$div\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \vec{\nabla}.\vec{A}$$

II-4-5 Opérateur rotationnel : Etant donné un champ de vecteur

$$\vec{A} = A_x(x,y,z)\vec{i} + A_y(x,y,z)\vec{j} + A_z(x,y,z)\vec{k}$$

On appelle rotationnelle du vecteur $\vec{A}$ le vecteur :

$$\overrightarrow{rot}\vec{A} = \left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right]\vec{i} + \left[\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right]\vec{j} + \left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right]\vec{k} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$ C'est le produit vectoriel de l'opérateur nabla et du vecteur $\vec{A}$

II-4-6 Opérateur Laplacien :

Soit une fonction *f (x, y, z)* c'est à dire une fonction de trois variables indépendantes *x*, *y* et *z*. Par définition

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Le Laplacien d'un champ s'obtient en appliquant deux fois l'opérateur nabla, et il est noté.

$$\boxed{\Delta f = \nabla(\nabla f) = \nabla^2 f}$$

Exemple de calcul de l'opérateur gradient

Soit une fonction f, définie par $\mathbf{f=3x^2+7y+2z^3+3xy}$ en coordonnée cartésienne. Calculer la formule littérale du gradient, puis sa valeur au point **(3,-2,5).**

On applique donc la formule du gradient en coordonnée cartésienne pour les différentes directions:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x + 3y \;;\; \frac{\partial f}{\partial y} = 7 + 3x \;;\; \frac{\partial f}{\partial z} = 6z^2$$

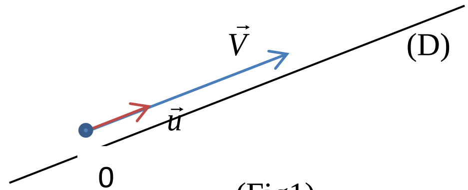
$$\overrightarrow{grad} f = (6x+3y)\vec{i} + (3x+7)\vec{j} + 6z^2\vec{k}$$

Pour avoir la valeur de ce gradient au point **(3,-2,5)**, il suffit de calculer la fonction ainsi obtenue en ce point : $\overrightarrow{grad} f(3,-2,5) = 12\vec{i} + 16\vec{j} + 150\vec{k}$

II-5 Calcul vectoriel

***II-5-1* Caractéristiques d'un vecteur**

Un vecteur est une grandeur définit par : (Fig1)

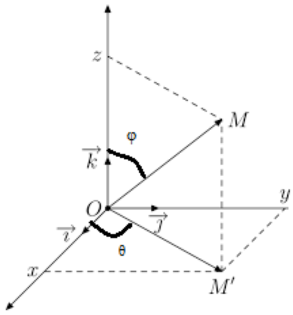


(Fig1)

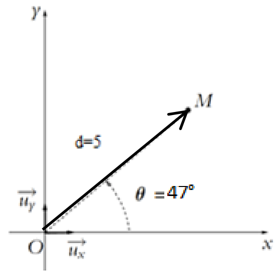
- Une origine O : Ou point d'application
- Une direction : (Celle de la droite D)
- Un module : C'est longueur du vecteur $\vec{V}$ noté $|\vec{V}|$
- Un sens : Celui indiqué par la flèche

***II-5-2* Présentation d'un vecteur :**

Dans l'espace deux angles sont nécessaires pour définir un vecteur.



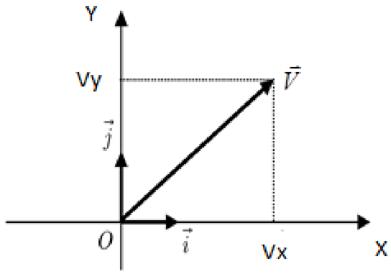
Dans le plan un angle et la longueur du vecteur sont suffisant pour présenter un vecteur.



II-5-3 Vecteur unitaire :

Un vecteur unitaire $\vec{u}$ est un vecteur dont le module est égal à 1, il a le même sens et la même direction que le vecteur $\vec{V}$

$$\vec{V} = |\vec{V}|.\vec{u} \Rightarrow \vec{u} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|}$$

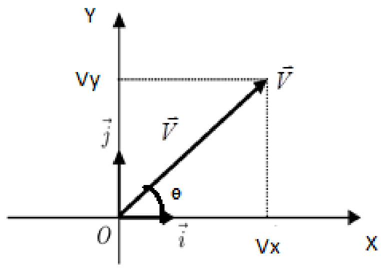


II-5-4 Composantes d'un vecteur :

Tout ensemble de vecteur dont l'addition donne le vecteur $\vec{V}$ constitue les composantes d'un vecteur $\vec{V}$

$\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j}$ $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont les vecteurs unitaires relatifs aux deux axes X et Y

V_x, V_y sont les projections orthogonales de ce vecteur sur les deux directions (X,Y) on note $\vec{V}$ (V_x, V_y)Un vecteur peut etre



representer par un angle et son module appelé aussi norme $\vec{V} = (|\vec{V}|, \theta)$

II-5-5 Liens entre les deux systemes

$$|\vec{V}| = \sqrt{Vx^2 + Vy^2}$$

$tg\theta = \frac{Vy}{Vx} \Rightarrow \theta = artg\frac{Vy}{Vx}$; La représentation du vecteur $\vec{V}$ en coordonnées polaires est $\vec{V} = (|\vec{V}|, \theta)$

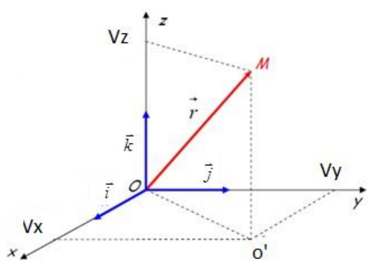
$V_x = |\vec{V}|\cos\theta$; $V_y = |\vec{V}|\sin\theta$; La representation du vecteur $\vec{V}$ en coordonnées cartésiennes est $\vec{V} = (V_X, V_y)$

Application

$\vec{V} = (-2,3)$ $\quad V_x = -2$, $V_y = 3$ $\quad |\vec{V}| = \sqrt{(-2)^2 + (3)^2} = \sqrt{13}$

$\sin\theta = \frac{V_y}{|\vec{V}|} = \frac{3}{\sqrt{13}}$; $\cos\theta = \frac{V_x}{|\vec{V}|} = \frac{-2}{\sqrt{13}}$ d'où $\theta = 123{,}7\circ$

II-5-6 Representation dans l'espace



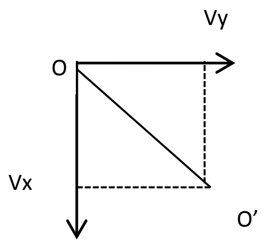


Fig 1

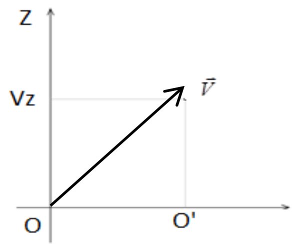


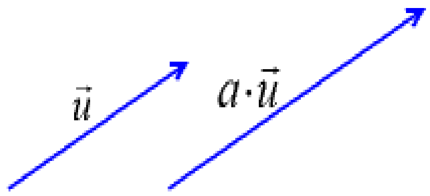
Fig2

D'apres la figure 1 on a :

$OO' = \sqrt{Vx^2 + Vy^2}$ la figure 2 montre que $|\vec{V}| = \sqrt{OO'^2 + Vz^2} = \sqrt{Vx^2 + Vy^2 + Vz^2}$ cette expression montre bien que les composantes du vecteur $\vec{V}$ sont V_x, V_y, V_z

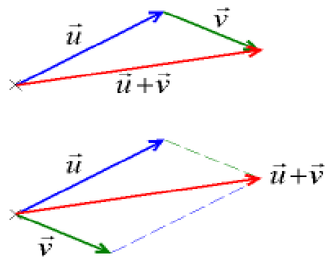
II-5-7 Les operations sur les vecteurs :

Le terme « scalaire » désigne ici un nombre réel. Le produit d'un vecteur $\vec{u}$ par un scalaire a est un vecteur noté $a\vec{u}$



Ce vecteur est égal à $\vec{0}$ si $\vec{u} = \vec{0}$ ou si $a = 0$. Sinon :

- il est de même direction, de même sens que $\vec{u}$ et de longueur $a\|\vec{u}\|$, si a > 0



- de même direction, de sens contraire et de longueur $-a\|\vec{u}\|$, si a < 0.

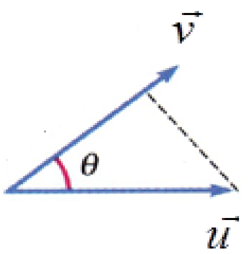
Le produit d'un vecteur par un scalaire est distributif sur l'addition des scalaires $(a+b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$.

La somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est un vecteur, noté $\vec{u}+\vec{v}$, qui est construit de la manière suivante : on amène l'origine du deuxième vecteur à l'extrémité du premier, la somme est le vecteur qui joint l'origine du premier vecteur à l'extrémité de second. Il s'agit du troisième côté d'un triangle formé par les deux premiers vecteurs.

II-5-8 PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE

a. Calcul à partir des coordonnées

Dans un repère orthonormal, soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs non nuls.



$$\boxed{\vec{u}\,.\,\vec{v} = xx' + yy' + zz'}$$

Si θ est l'angle entre les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le produit scalaire de ces deux vecteurs peut être calculer comme suit :

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|\cos\theta$$

II-5-9 Produit vectoriel : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace, dans un repère orthonormé **direct**.

On définit le produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (et l'on note $\vec{u} \wedge \vec{v}$ ou $\vec{u} \times \vec{v}$) de la façon suivante :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$
- Sinon, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est le vecteur :
  - orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$
  - tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base **directe** de l'espace.

- $|\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u}|.|\vec{v}||\sin(\vec{u},\vec{v})|$

Dans un repère orthonormé direct, soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs non nuls. Alors $\vec{u} \wedge \vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} yz' - y'z \\ xz' - x'z \\ xy' - x'y \end{pmatrix}$

Exemple :

$\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{u} \wedge \vec{v}\begin{pmatrix} 2 \times 2 - (-3) \times 0 \\ 0 \times 2 - (-3) \times (-3) \\ 0 \times 0 - 2 \times (-3) \end{pmatrix}$ d'où $\vec{u} \wedge \vec{v}\begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix}$

II-6 Erreurs et incertitudes :

Toute mesure comporte des erreurs et un résultat expérimental n'a de valeur si l'on ne détermine pas l'ordre de grandeur de l'erreur globale commise.

II-6-1 Définition : L'erreur est la différence entre la grandeur réelle et celle mesurée.

$\delta_e = x_r - x_m$

Où x_r : est la valeur réelle

Et x_m : est la valeur mesurée (expérimentalement c'est la valeur moyenne).

II-6-2 Types d'erreurs

a-Erreurs systématiques : Ce sont des erreurs qui affectent le résultat de mesure constamment et dans le même sens ils sont dues à :

- ✓ L'expérimentateur (erreur de lecture)
- ✓ Erreurs constructives (précision des appareils de mesure)
- ✓ Erreurs provoquées par les conditions de travail (contact, milieu, champs extérieurs, connexions…..). Il est possible de les corrigées.

b- Erreurs fortuites : ce sont des erreurs du a la manipulation et la manière d'expérimentation, ainsi que d'autres paramètres. Pour les corrigées, on fait plusieurs mesures.

II-6-3 Calcul statistique

a-La moyenne : Définit comme étant le rapport de la somme arithmétique d'un nombre « n » de mesures à leur nombre, qu'on peut exprimer comme suit :

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

b-Ecart moyen absolu : Définit comme étant la moyenne des ecarts des valeurs mesurées à leur moyenne, exprimé par :

$$\Delta\bar{x} = \frac{\left[|x_1-\bar{x}|+|x_2-\bar{x}|+|x_3-\bar{x}|+\ldots+|x_n-\bar{x}|\right]}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i-\bar{x}|}{n}$$

c-Ecart quadratique moyen (écart type) : on définit la variance comme étant la moyenne des carrés des écarts des mesures à leur nombre noté « σ2 » qui s'exprime comme suit :

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2}{n-1} - \frac{n(\bar{x})^2}{n-1}$$

Alors que l'écart type est définit comme la racine carrée de la variance

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2}{n-1} - \frac{n(\bar{x})^2}{n-1}}$$

d- Incertitude absolue : c'est la valeur maximale que peut prendre une erreur

$$\Delta x = \max(|\delta_e|)$$

Si la grandeur à mesurer dépend de plusieurs variables, x=f(a,b,c,…), l'incertitude absolue sera donnée par l'expression suivante :

$$\Delta x = \left|\frac{\partial f}{\partial a}\right|\Delta a + \left|\frac{\partial f}{\partial b}\right|\Delta b + \left|\frac{\partial f}{\partial c}\right|\Delta c + \ldots$$

e-Incertitude relative (précision): c'est le rapport de l'incertitude absolue à la valeur moyenne, et donnée par : « $\frac{\Delta x}{x}$ ». C'est le taux d'erreur commise par rapport à la valeur de la grandeur mesurée.

Remarque :

la valeur mesurée s'écrit sous la forme suivante : $x = \bar{x} + \Delta x$