Université de M'sila	Correction d'examen final	Faculté : Maths-informatique
L 2 Mathématiques		Année : 2023/2024
Module Analyse 4		Durée : 1h −30m

Barème	**Correction d'exercice : 1** (6pt)
	Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = xe^{x-y}$
0.5	① f est un produit de 2 fonctions $(x,y) \mapsto x$ et $(x,y) \mapsto e^{x-y}$ sont différentiables sur $\mathbb{R}^2$.
1	Donc, elle est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.
	Par conséquent f est différentiable en point $(1,-1)$ et sa différentielle donner par :
0.5 × 2	$df_{(1,-1)}(h,k) = h\frac{\partial f}{\partial x}(1,-1) + k\frac{\partial f}{\partial x}(1,-1)$.
	Comme $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x+1)e^{x-y} \\ -xe^{x-y} \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla f(1,-1) = \begin{pmatrix} 2e^2 \\ -e^2 \end{pmatrix}$.
0.5	C'est à dire $df_{(1,-1)}(h,k) = 2e^2h - e^2k$.
	② D'après question 1, le developpement limité de f à l'ordre 1 au point $(1,-1)$ est donner par
1	$f(1+h,-1+k) = f(1,-1) + h\frac{\partial f}{\partial x}(1,-1) + k\frac{\partial f}{\partial x}(1,-1) + o\Big(\\|(h,k)\\|\Big)$
1	Par suit, on a : $f(1+h,-1+k) = e^2 + 2e^2h - e^2k + o\Big(\\|(h,k)\\|\Big)$.
0.5	③ Ici $(h,k) = (0.1, 0.1)$ car $1.1 = 1 + 0.1$ et $-0.9 = -1 + 0.1$ Donc, la valeur approchée de
0.5	$f(1.1,-0.9) \approx e^2 + 0.2e^2 - 0.1e^2 = 1.1e^2$.

Barème	**Exercice : 2** (8pt)
	Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2(y+1)}{x^2+(y+1)^2} & : (x,y) \neq (0,-1) \\ 0 & : (x,y) = (0,-1) \end{cases}$
	① Montrons que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
0.5	ⓐ Si $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,-1)\}$, on a f est continue, car quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas, (f est rationnelle).
	ⓑ Pour $(x,y) = (0,-1)$, on utilisant les coordonnées polaires, posons, donc $\begin{cases} x = r\cos\theta, & \text{où } r > 0 \text{ et } \theta \in [0, 2\pi[. \\ y = -1 + r\sin\theta \end{cases}$
0.5	On aura donc, $\lvert f(x,y)\rvert = \lvert f(r\cos\theta, -1 + r\sin\theta)\rvert = \lvert r^2\cos^2\theta\sin^2\theta\rvert \leq r^2 \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$.
0.5	C'est à dire, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,-1)} f(x,y) = 0 = f(0,-1)$. D'où la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.
1	② ⓐ La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,-1)\}$, car quotient de fonctions dérivables

dont le dénominateur ne s'annule pas. Donc, pour $(x,y)\neq(0,-1)$, on trouve

1 $$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{2x(y+1)^3}{(x^2+(y+1)^2)^2}\\ \dfrac{x^2(x^2-(y+1)^2)}{(x^2+(y+1)^2)^2}\end{pmatrix}.$$

1 (b) Si $(x,y)=(0,-1)$, on a :

$$\nabla f(0,-1)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,-1)\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,-1)-f(0,-1)}{x}\\ \lim\limits_{y\to -1}\dfrac{f(0,y)-f(0,-1)}{y+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

(c) C'est à dire, $\nabla f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\vec{i}+\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\vec{j}, & si\ (x,y)\neq(0,-1)\\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,-1)\vec{i}+\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,-1)\vec{j}, & si\ (x,y)=(0,-1)\end{cases}$

1 $$=\begin{cases}\dfrac{2x(y+1)^3}{(x^2+(y+1)^2)^2}\vec{i}+\dfrac{x^2(x^2-(y+1)^2)}{(x^2+(y+1)^2)^2}\vec{j}, & si\ (x,y)\neq(0,-1)\\ 0\vec{i}+0\vec{j}=\vec{0}, & si\ (x,y)=(0,-1)\end{cases}$$

0.5 (3) Pour prouver que f n'est pas différentiable en $(0,-1)$ il faut montrer que :

$$\lim_{(x,y)\to(0,-1)}\frac{f(x,y)-f(0,-1)-\partial_x f(0,-1)x-\partial_y f(0,-1)(y+1)}{\sqrt{x^2+(y+1)^2}}\neq 0.$$

0.5 Notons que, $\dfrac{f(x,y)-f(0,-1)-\partial_x f(0,-1)x-\partial_y f(0,-1)(y+1)}{\sqrt{x^2+(y+1)^2}}=\dfrac{x^2(y+1)}{(x^2+(y+1)^2)^{\frac{3}{2}}}.$

Si on pose, $x=r\cos\theta,\ y=-1+r\sin\theta,$ alors, on aura :

0.5 $$\lim_{(x,y)\to(0,-1)}\frac{x^2(y+1)}{(x^2+(y+1)^2)^{\frac{3}{2}}}=\lim_{r\to 0}\cos^2\theta\sin\theta\neq,0$$ (dépend de θ.)

Donc f n'est pas différentiable en $(0,-1)$.

0.5 (4) D'après question 3, f n'est pas différentiable en $(0,-1)$. Donc, n'est de classe C^1 en $(0,-1)$.

Barème

Correction d'exercice : 3 6pt

f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y)=x^2-\cos(y)$.

(1) Les points critiques de f.

1 (a) On a : $\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}2x\\ \sin y\end{pmatrix}.$

1 (b) Par suite, $\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=0, & k\in\mathbb{Z}\\ y=k\pi\end{cases}$

Université de M'sila		**Faculté : Maths-informatique**
L 2 Mathématiques	**Correction d'examen**	**Année : 2023/2024**
Module Analyse 4	**final**	**Durée : 1h −30m**

1 Alors, les points critiques sont $A_k(0, k\pi)$, $(k \in \mathbb{Z})$.

2 Nature des points critiques :

0.5 **a** $$\mathrm{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \cos y \end{pmatrix}$$

b Le déterminant de la matrice Hessienne aux points $(0, k\pi)$ est

0.5 $\left|H_f(0,k\pi)\right| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & (-1)^k \end{vmatrix} = 2(-1)^k.$ Par conséquent,

0.5 **c** Si k est pair, les points $A_k\Big(0, k\pi\Big)$ présentent des minimums locaux.

0.5 **d** Si k est impair, alors $A_k\Big(0, k\pi\Big)$ sont des points selles.

1 **3** Si k est pair on a $f(0, k\pi) = -(-1)^k = -1,$ donc, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on obtient,

$f(x,y) - f(0,k\pi) = x^2 + 1 - \cos y \geq 0.$

Alors, les points $A_k\Big(0, k\pi\Big)$ sont des minimums globaux de f.

Fin	**16 mai 2024**	**Bon courage**