CHAPITRE 2 : Eléments de calcul tensoriel

Tenseur

1.1°) Scalaire: ou tenseur d'ordre 0:

Un scalaire est défini par un seul nombre et indépendant des axes de référence [donc indépendant de toute notion d'orientation). Citons parmi les grandeurs scalaires : masse, densité, température, volume.

1.2°) Vecteurs : par opposition aux scalaires, il existe des grandeurs physiques très différentes, les vecteurs, est défini par deux ou trois nombre, c'est le cas par exemple d'une force ou de l'intensité du champ électrique, le gradient de température en un point.

Nous pouvons désigner un vecteur par $\vec{E}$

E représentant l'intensité du vecteur. Nous choisirons cette convention.

1.3 Représentant d'un vecteur:

Choisissons un trièdre trirectangle Ox_1, Ox_2, Ox_3. Les composantes du vecteur sur les axes [c'est-à-dire les projections du vecteur sur les axes) représentent le vecteur en intensité et directions.

$$\vec{E} \quad \left| \begin{array}{l} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array} \right. \qquad \text{ou} \qquad \vec{E} = E_1, E_2, E_3$$

Un vecteur est un tenseur d'ordre 1 [cf. suite) .

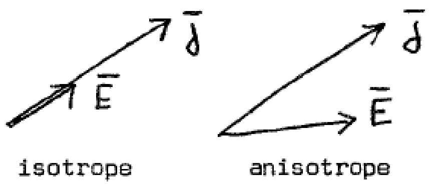
1.4-tenseur de range 2 (ou d'orde 2)

Nous pouvons généraliser la notion de vecteur. Appliquons un champ électrique Représenté par le vecteur $\vec{E}$, sur un conducteur. Il se produit un courant électrique.

La densité de courant (intensité par unité de surface perpendiculaire au courant:

est représentée par le vecteur $\vec{J}$)

Si le conducteur est isotrope et d'après la loi d'Ohm, on a



$$\vec{J} = \delta . \vec{E} \qquad (1)$$

δ = Conductivité.

Si dans le système d'axes Ox_1, Ox_2, Ox_3

$$\vec{J} = [j_1, j_2, j_3] \qquad \text{et} \qquad \vec{E} = [E_1, E_2, E_3]$$

On a $J_1 = \sigma\, E_1$ $\qquad J_2 = \sigma\, E_2 \qquad J_3 = \sigma\, E_3 \qquad (2)$

Chaque composante de $\vec{J}$ est proportionnelle à la composante correspondante de $\vec{E}$.

Par contre, si le conducteur est anisotrope [cas d'un cristal) la relation entre les composantes de $\vec{j}$ et de $\vec{E}$ n'a plus la forme simple de l'équation (2).

Remarque: Les cristaux du système cubique forment un groupe particulier dont la conductivité est isotrope.

L'équation (2) est remplacée, pour les cristaux, par les relations (3)

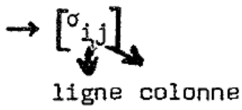
$$\left.\begin{aligned} j_1 &= \sigma_{11}E_1 + \sigma_{12}E_2 + \sigma_{13}E_3 \\ j_2 &= \sigma_{21}E_1 + \sigma_{22}E_2 + \sigma_{23}E_3 \\ j_3 &= \sigma_{31}E_1 + \sigma_{32}E_2 + \sigma_{33}E_3 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

σ_{ij}, étant des constantes.

II y a donc des composantes de $\vec{j}$ non seulement sur l'axe 1 mais aussi sur les autres axes : la composante dans la direction du champ est donnée par σ_{11} et les deux composantes transversales par σ_{21} et σ_{31}. De façon semblable, σ_{23} mesure la composante de $\vec{j}$ parallèle à x_2 quand le champ est parallèle à x_3.

Ainsi la conductivité d'un cristal est une propriété qui est décrite par neuf coefficients, que l'on peut écrire sous la forme d'un tableau carré, entre deux crochets, qui symbolise un tenseur de rang 2:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$



σ_{ij}: sont les composantes du tenseur.

On dit σ_{ij} tenseur d'ordre deux.

La notation introduite traduit bien ces distinctions : scalaire s'écrit sens indice, les composantes d'un vecteur avec 1 indice, celles d'un tenseur de rang 2 avec deux indices. Le nombre des indices donne le rang du tenseur

D'une façon générale, si une propriété T lie deux vecteurs $\vec{P} = (p_1, p_2, p_3)$ et $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$ de telle sorte que:

$$\begin{aligned} P_1 &= T_{11}\, q_1 + T_{12}\, q_2 + T_{13}\, q_3 \\ P_2 &= T_{21}\, q_1 + T_{22}\, q_2 + T_{23}\, q_3 \\ P_3 &= T_{31}\, q_1 + T_{32}\, q_2 + T_{33}\, q_3 \end{aligned} \qquad (6)$$

T_{ij} étant des constantes, on dit que T_{ij} représente un tenseur de rang deux.

Un grand nombre de propriétés, en physique, font appel à des tenseurs de rang deux:

exemple ï conductivité électrique, thermique, perméabilité etc...

1.5) Notation des indices muets

Il faut simplifier les notations. Les équations (6) peuvent s'écrire :

$$P_i = \sum_{j=1}^{3} T_{ij}\, q_j \quad i = (1, 2, 3) \qquad (7)$$

On supprime le signe $\sum$:

$$P_i = T_{ij}\, q_j \quad (ij = 1, 2, 3) \qquad (8)$$

en adoptant la convention d'Einstein ; quand un indice intervient 2 fois dans un terme monôme, la sommation par rapport à cet indice est sous-entendue.

Ainsi (6), (7) et (8) sont équivalentes. Dans l'équation (8), *j* est dit indice muet et i indice libre.

P_i: désigne vecteur $\vec{P}\,[p_1, p_2, p_3]$

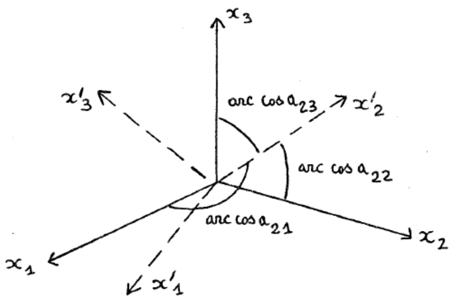
q_i : désigne vecteur $\vec{q}$

T_{ij}: désigne tenseur $[T_{ij}]$

1.6)Transformation des axes:

Considérons un changement d'axes c'est-à-dire le passage d'un système d'axes trirectangles à un autre trirectangles avant la même origine. Sur chaque axe, l'unité de longueur reste la même. Le premier système est x_1, x_2, x_3, le second x'_1, x'_2, x'_3.

matrice de passage



Les relations angulaires liant les axes sont données par le tableau suivant (tableau des cos. directeurs).

	x_1	x_2	x_3
x'_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
x'_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
x'_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}

Par exemple; les cos directeurs de x'_2 par rapport à x_1, x_2, x_3 sont a_{21}, a_{22} et a_{23} et les cos directeurs de x_3, x'_1 , x'_2 et x'_3 sont a_{13}, a_{23} et a_{33}- Ainsi:

$$a_{ij} = \text{cos angle}\,(x'_i, x_j)$$

nouveaux axes — anciens

Anciens axes

		x_1	x_2	x_3
	x'_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
Nouveaux	x'_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
	x'_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}

Le tableau des a_{ij} est une matrice : désigné symboliquement par (a_{ij}).

Les 9 composantes ne sont pas indépendantes les unes des autres. Vous pourrez d'ailleurs en exercice établir les relations qui existent entre les cos. directeurs aij.

Les 9 coefficients a_{ij} ne sont pas indépendants. Considérons le nombre de degrés de liberté de la transformation: si les axes Ox_1, Ox_2 et Ox_3 sont donnés, il faut 2 angles pour préciser la direction de Ox_1 (latitude et longitude). Les nouveaux axes peuvent encore tourner autour de Ox'_1 et un autre angie, l'angle de rotation autour de Ox'_1 est nécessaire pour les fixer complètement. Ainsi trois quantités indépendantes suffisent pour définir la transformation : nous devons donc trouver 6 relations indépendantes entre les 9 coefficients a_{ij}.

Chaque ligne du tableau [1] représente les 3 cos. directeurs d'une droite par rapport à 3 axes orthogonaux Ox_1, Ox_2, Ox_3. On a donc:

$$\begin{array}{ll} {a_{11}}^2 + {a_{12}}^2 + {a_{13}}^2 & a_{1k}a_{1k} = 1 \\ {a_{21}}^2 + {a_{22}}^2 + {a_{23}}^2 & a_{2k}a_{2k} = 1 \\ {a_{31}}^2 + {a_{32}}^2 + {a_{33}}^2 & a_{3k}a_{3k} = 1 \end{array}$$

ou $\quad a_{ik}a_{jk} = 1 \quad$ si $\quad i = j$

De plus, 2 lignes successives du tableau CD représentent les cos. directeurs de 2 axes rectangulaires.

$$\begin{array}{ll} a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} = 0 & a_{1k}a_{2k} = 0 \\ a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} = 0 & a_{2k}a_{3k} = 0 \\ a_{31}a_{31} + a_{32}a_{12} + a_{33}a_{13} = 0 & a_{3k}a_{1k} = 0 \end{array}\Bigg\}$$

ou $\quad a_{ik}a_{jk} = 0 \quad$ si $\quad i \neq j$

Les équations (2) et (3) sont appelées relations d'orthogonalité (6)

On peut les exprimer en une seule équation :

$$a_{ik}a_{jk} = \sigma_{ij}$$

σ_{ij}= symbole de KRONECKER = $\begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ = matrice unité (σ_{ij})

Le même raisonnement peut être fait pour les colonnes mais les relations n'apportent pas de renseignements nouveaux.

2) Produit tensoriel:

on définit le produit tensoriel du vecteur $\vec{u}$ par le vecteur $\vec{V}$ noté,$\vec{u}(\times)\vec{V}$, comme le tenseur d'ordre deux.

$$\vec{u}(\times)\vec{V} = \begin{bmatrix} u_1V_1 & u_1V_2 & u_1V_3 \\ u_2V_1 & u_2V_2 & u_2V_3 \\ u_3V_1 & u_3V_2 & u_3V_3 \end{bmatrix}$$

Le résultat d'un produit tensoriel est simple, ***n*** l'ordre du 1er tenseur et ***m*** l'ordre du second (***m***=1 pour un vecteur, 2 pour un tenseur d'ordre 2)

Le résultat du produit tensoriel $A = b(\times)c$ est un tenseur d'ordre (n+m).

2.1 Calcul:

2.1.1 Matrice: définition

Une matrice A est un tableau rectangulaire d'éléments de K

$$A = \begin{bmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & \cdots & a_{1.p} \\ a_{n.1} & a_{n.2} & \cdots & a_{n.p} \end{bmatrix}$$

* A est dit de taille n x p si elle n linges et p colonnes

* les nombres du tableau sont appelés les coefficients de A

* $a_{j.i}$: est les coefficients en i- eme linge et j-eme colonne

Exemple: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$, matrice 2x3.

* Deux matrices sont égales si elles ont mêmes coefficients.

n=p matrice carrée, on note$M_n(K) = M_{n.n}(K)$.

$$\begin{pmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} \cdots & a_{1.n} \\ \vdots & a_{2.2} & \\ a_{n.1} & \cdots \cdots & a_{n.n} \end{pmatrix}$$

$a_{1.1}, a_{1.2}, a_{1.3}, \ldots, a_{n.n}$ Forment la diagonale principale.

2.2 Somme de deux Matrices:

La somme C=A+B est la Motrice n x p définie par

$$C_{ij} = a_{ji} + b_{ij}$$

Exemple: $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ alors $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

Par contre si $B' = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$, alors A+B' n'est pas définie.

* **définition**: Produit d'une matrice par un scolaire.

$\propto . A = (\propto . a_{ij})$ Exemple: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\propto A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Proposition:

$A + B = B + A$

$A + (B + C) = (A + B) + C$

$A + 0 = A$, la matrice nulle est l'élément neutre de l'addition

$$(\propto + B)A = \propto A + BA$$

$$\propto (A + B) = \propto A + \propto B$$

***Définition**: produit de deux matrices:

$A = (a_{ij})$ Une matrice n x p et $B = (b_{ij})$ une matrice p x q alors le produit A.B est une matrice n x q définie par $C_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$

$$C_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj} + \cdots + a_{ip}b_{pj}$$

Exemple: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ donc

$$C = A.B = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$$

$$AB \neq B.A$$

$AB = 0$ N'implique pas $A = 0$ ou $B = 0$

Exemple: $A = \begin{pmatrix} 0 - 1 \\ 0 \quad 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 - 3 \\ 0 \quad 0 \end{pmatrix}$ et $Ab = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

* $A(BC) = (AB).C$

* $A(BC) = AB + AC$

$(B + C)A = BA + C.A$

2.3 Motrice Identité:

La motrice carrée suivante s'appelle la motrice identité notéeI_n ou I.

$$\mathrm{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ & & 1 & 0 \\ 0 & n & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On définit le symbole de Kronecker S_{ij}

$S_{ij} = \begin{cases} 0. \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases}$ alors $\mathrm{I}_n = (S_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$

Proposition: si A est une matrice n x p, alors

$$\mathrm{I}_n . A = A$$

$A^{\circ} = \mathrm{I}_n$, $A^2 = A.A$, $A^3 = A.A.A$

2.4 Inverse de matrice:

Exemple: soit la matrice $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

Calcul des cofacteurs

ligne 1: $B_{11} = +\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3$, $B_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -1$, $B_{13} = +\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2$

ligne 2: $B_{21} = +\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$, $B_{22} = +\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 2$, $B_{23} = -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

ligne 3: $B_{31} = +\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -3$, $B_{32} = -\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$, $B_{33} = +\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 3$

$$N = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & +3 \end{vmatrix}$$

$${}^{t}N = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -1 & +2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

L'inverse de B est $B^{-1} = \frac{1}{D_B}.\, {}^{t}N$

$$D_B = |B| = -2\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -6 - 1 + 4 = -3$$

$$B^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -3 & 0 & +3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & +1 & -3 \end{bmatrix}$$

Un système linéaire a n lignes et p un connues:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_{21} \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Ecrit aussi: $\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1p} \\ \vdots \\ a_{n1} \dots a_{np} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_p \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_n \end{pmatrix}}_{B}$

cas au le nombre d'équation égal le nombre d'inconnues:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x} - \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B}$$

La solution du système $Ax = B$ est uniquement est: $X = A^{-1}.B$

A matrice carrée de taille n x n.

* A est: triangulaire inferieure si ses éléments au dessus de la diagonale sont nuls $i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$.

* A est triangulaire supérieure si ses éléments en dessous de la matrice diagonale sont nuls $i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{n1} \dots & & & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & \\ 0 & 0 & & \dots a_{nn} \end{pmatrix}$$

triangulaire inferieure triangulaire supérieure

2.5 Motrice transposée:

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de taille n x p.

La matrice transposée de A, notée A^T est la matrice de taille p x n définie par:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \to A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & & \\ a_{1p} & a_{2p} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Exemple: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \\ -7 & 8 & 9 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$
$$(\propto A)^T = \propto A^T$$
$$(AB)^T = A^T + B^T$$

2.6 Matrice symétrique:

Une matrice carré A de taille n x n est symétrique si elle est égale à sa transpose, c'est a - dire si $A = A^T$.

Donc $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout $i, j = 1, \dots n$

Exemple: $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ est symétrique

matrice antisymétrique si $A^T = -A$ alors, $a_{ij} = -a_{ji}$ pour tout $i, j = 1, \dots n$

Exemple: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique

les éléments diagonaux d'une matrice antisymétrique sont toujours tous nuls (car en prenant $i = j$ an a $a_{ij} = -a_{ij}$).

Exercice : 01)

Considérons les matrices A à coefficients réels :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer A^n

Exercice : 02)

On considère la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -6 & 11 \\ 0 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

1) Donner le format de A
2) Donner la valeur de chacun des éléments a_{14} , a_{23} , a_{33} et a_{32}
3) Ecrire la matrice transposée A_t de A et donner son format

Exercice : 03)

On donne
.
A= $\begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et B= $\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

Calculez $A+B$, $A-B$, $3A$, $4B$, $3A-4B$

Exercice : 03)

On considère la matrice

A= $\begin{pmatrix} 3 & -10 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$

1) A l'aide de la calculatrice, donner la matrice inverse A^{-1} (mettre les coefficients sous forme fractionnaire)

2) En déduire la résolution des systèmes suivants :

a) $\begin{cases} 3x - 10y = 4 \\ -2x + 8y = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 10y = 1.5 \\ -2x + 8y = -0.4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 10y = 15 \\ -2x + 8y = -5 \end{cases}$