Chapitre 4
CONTRAINTES

V.1. Introduction

Les équations de bilan de la mécanique des fluides sont établies dans ce chapitre et le suivant. Pour écrire ces équations, on doit faire appel à la notion de dérivée matérielle introduite au chapitre II, aux expressions du Penseur des taux de déformation du chapitre III et aux théorèmes de transport du chapitre IV. Différentes méthodes peuvent être utilisées pour obtenir les équations fondament aies de la mécanique des fluides. Nous suivrons ici deux approches. Dans la première, on considère un volume de contrôle matériel et on analyse la variation dans le temps de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie contenues dans ce volume. L'écriture d'équations locales à partir des bilans globaux cor- respondant à un volume matériel quelconque nécessite la transformation de tous les termes en intégrales de volume. Cette opération est facilement effectuée à l'aide des théorèmes de transport et de la relation de Green-Ostrogradsky. Dans la deuxième approche on con- sidère un volume de contrôle élémentaire fixe. On utilise en pratique un pavé élémentaire dont les côtés sont Oz, fip, Nc et dont l'un des sommets se trouve au point (z, y, z). On exprime pour cet élément les flux entrant et sortant par les facettes ainsi que la variation in stationnaire dans le pavé de la propriété dont on souhaite établir le bilan. Cette méthode élémentaire est facilement appliquée dans un système de coordonnées cartésiennes mais on peut aussi utiliser des volumes élémentaires adaptés à des géométries particulières (par exemple une couronne si l'on s'intéresse à un écoulement axisymétrique). des équations obtenues dans un système de coordonnées particulières peuvent être écrites sous forme intrinsèque à l'aide des opérateurs vectoriels classiques. On retrouve ainsi les équations de conservation déduites de façon plus générale par l'analyse des bilans sur un volume matériel quelconque.

Le bilan de masse est développé à la section 2. Une forme spéciale du théorème de transport, le théorème de Reynolds est présentée à la section 3. Le bilan de quantité de mouvement est analysé à la section 4. Ce bilan fait intervenir le vecteur contrainte qu'il faut exprimer en fonction de la pression et du Penseur des contraintes visqueuses. On doit pour cela utiliser les résultats de l'analyse de l'état des contraintes dans un fluide. Cette analyse est menée dans l'annexe .fi.

Les équations de Navier-Stokes, l'équation de bilan pour l'énergie cinétique et les diverses formes du bilan d'énergie sont présentées au chapitre VI.

Bibliographie

Les équations fondamentales de la mécanique des fluides sont établies dans de nombreux ouvrages de base. La méthode la plus couramment utilisée est celle du volume de contrôle élémentaire comme par exemple dans Bird, Stewart et Lightfoot 1960, Cebeci et Bradshaw 1977, Shapiro 1953, Tsien 1958, Liepmann et Roshko 1957. Whitaker 1968, Barrère et Prud'homme 1972, Kuethe et Chow 1986 utilisent des volumes de contrôle fixes ou matériels.

Loi fondamentale de la dynamique

Conservation de la masse

Forme locale

Considérons un volume matériel $\mathrm{V}_m(t)$. La masse contenue dans ce volume est

$$m = \int_{\mathrm{V}_m(t)} \rho d\mathrm{V}$$

ou ρ désigne la densité locale. Si le volume matériel ne contient ni sources ni puits, lamasse qui se trouve dans $\mathrm{V}_m(t)$ est constante et on peut écrire:

$$\frac{d}{dt} m = \frac{d}{dt} \int_{\mathrm{V}_m(t)} \rho d\mathrm{V} = 0$$

Nous pouvons maintenant appliquer le théorème de transport au volume $\mathrm{V}_m(t)$:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathrm{V}_m(t)} \rho d\mathrm{V} = \int_{\mathrm{V}_m(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathrm{V} + \int_{\mathrm{A}_m(t)} \rho v.nd\mathrm{A}$$

et d'après (V,2) on peut écrire :

$$\int_{\mathrm{V}_m(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathrm{V} + \int_{\mathrm{A}_m(t)} \rho v.nd\mathrm{A} = 0$$

Si le volume $\mathrm{V}_m(t)$ ne contient pas de surface de discontinuité, l'intégrale sur la surface A peut être remplacée par une intégrale de volume et le théorème de Green-Ostrogradsky permet d'écrire :

$$\int_{\mathrm{V}_m(t)} \rho v.nd\mathrm{A} = \int_{\mathrm{V}_m(t)} \nabla.\rho v dV$$

Dans ces conditions, (Y,4) devient :

$$\int_{\mathrm{V}_m(t)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla.\rho v\right] dV = 0$$

Le volume d'intégration est arbitraire et par conséquent l'intégrande doit être identique ment nul:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}.\rho \boldsymbol{v} = 0} \quad (V,7)$$

Cette équation locale exprime la conservation de la masse. Elle est applicable en tout point d'un fluide continu ne contenant pas de sources ou de puits.

L'équation (V,7) est souvent désignée sous le nom d'équation de continuité. On peut l'écrire sous une forme légèrement différente en développant $\nabla.\rho v$.

D'après une identité vectorielle classique:

$$\nabla.\rho v = \rho \nabla.v + v.\nabla \rho$$

En substituant cette relation dans (V,7), on obtient:

$$\frac{d\rho}{dt} = v.\nabla \rho + \rho \nabla.v = 0$$

Cette expression fait apparaître la dérivée matérielle:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v.\nabla \rho$$

et on peut écrire (V,7) sous la forme:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla.v = 0 \qquad \text{ou encore} \qquad \frac{1 d\rho}{\rho dt} = -\nabla.v$$

Autre démonstration, bilan de masse sur un volume élémentaire:

Nous allons donner ici une autre démonstration de l'équation de continuité qui ne s'appuie pas sur le théorème de transport. Les calculs sont plus lourds et cette deuxième méthode de démonstration n'a pas notre préférence.

Nous considérons maintenant comme volume de contrôle un cube élémentaire fixe. de système de coordonnées cartésiennes utilisé $Oxyz$ a ses axes parallèles aux côtés du cube. Le volume du cube est $\nabla x \nabla y \nabla z$. On va maintenant écrire le principe de conservation de la masse sous la forme :

$$\left\{\begin{matrix}\text{Taux de variation de}\\ \text{la masse contenue dans}\\ \text{le volume } \nabla x \nabla y \nabla z\end{matrix}\right\} \qquad \left\{\begin{matrix}\text{Débit massique pénétrant la}\\ \text{dans le volume}\\ \nabla x \nabla y \nabla z\end{matrix}\right\}$$

$$-\left\{\begin{matrix}\text{Débit massique sortant}\\ \text{du volume}\\ \nabla x \nabla y \nabla z\end{matrix}\right\}$$

une forme spéciale du théorème de transport Le théorème de Reynolds

Considérons le théorème de transport pour un volume matériel écrit sous la forme:

$$\frac{d}{dt}\int_{V_{m(t)}} f dV = \int_{V_{m(t)}} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla . fv\right) dV$$

spécialisons cette expression à une fonction $f = \rho\Phi$.

On a :

$$\frac{d}{dt}\int_{V_{m(t)}} \rho\Phi dV = \int_{V_{m(t)}} \left(\frac{\partial}{\partial t}\rho\Phi + \nabla . \rho\Phi v\right) dV$$

que l'on peut écrire en développant le second membre :

$$\frac{d}{dt}\int_{V_{m(t)}} \rho\Phi dV = \int_{V_{m(t)}} \left\{\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla . \rho v\right) + \rho\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\rho\Phi + v . \nabla\Phi\right)\right\} dV$$

le premier terme entre croches est nul et le second fait apparaître la dérivée matérielle de Φ:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + v . \nabla\Phi$$

Ainsi:

$$\frac{d}{dt}\int_{V_{m(t)}} \rho\Phi dV = \int_{V_{m(t)}} \rho\frac{d\Phi}{dt} dV$$

Cette expression est souvent désignée dans la littérature (par le nom whitaker 1986) sous le nom de théorème de Reynolds.

Equation de conservation de la quantité de mouvement

Introduction

Considérons à nouveau un volume de contrôle matériel $\mathrm{V}_m(t)$. le quantité de mouvement contenue dans ce volume est :

$$\int_{\mathrm{V}_{m(t)}} \rho v dV$$

Le principe fondamental de la dynamique indique que la variation de quantité de mouvement ment de ce système matériel est égale à la somme de toutes les forces extérieures qui lui sont appliquées.

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathrm{V}_{m(t)}} \rho v dV = \boldsymbol{F}$$

Dans la plupart des situations (classiques), deux types de forces agissent sur le fluide contenu dans V_m.

(1) les forces de volume que l'on peut exprimer sous la forme

$$\int_{\mathrm{V}_{m(t)}} \boldsymbol{\rho g dV}$$

(2) les forces de surface qui agissent par l'intermédiaire de la surface A_m. Nous écrirons ce type de forces sous la forme :

$$\int_{\mathrm{A}_{m(t)}} \boldsymbol{t}(\boldsymbol{n})\boldsymbol{d}A$$

Dans cette expression, ri désigne la normale extérieure et :

$$\partial f = \boldsymbol{t}(\boldsymbol{n})\boldsymbol{d}A$$

représente la force élémentaire qui s'exerce sur l'élément de surface $\boldsymbol{d}A$ de normale $\boldsymbol{n}$ et $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n})$ est le vecteur contrainte agissant sur $\boldsymbol{d}A$.

L'expression (V,28) peut donc s'écrire sous la forme :

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathrm{V}_m(t)}\rho\boldsymbol{v}dV = \int_{\mathrm{V}_m(t)}\rho\boldsymbol{g}dV + \int_{\mathrm{A}_m(t)}\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n})\boldsymbol{d}A$$

Pour simplifier cette première présentation des équations de la mécanique de équations de fluides. nous allons projeter l'équation précédente sur les axes d'un système cartésien fixe:

La projection sur l'axe *i*(*i*=1, 2, 3) a pour expression :

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathrm{V}_m(t)}\rho v_i dV = \int_{\mathrm{V}_m(t)}\rho g_i dV + \int_{\mathrm{A}_m(t)} t_i(\boldsymbol{n})\boldsymbol{d}A$$

Dans cette expression, $t_i(\boldsymbol{n})$ désigne la projection sur l'axe *i* du vecteur contrainte. pour continuer, il faut écrire $t_i(\boldsymbol{n})$ de façon plus explicite. On a besoin pour cela de résultats fondamentaux de la mécanique des milieux continus.

Tenseur des contraintes

Une analyse détaillée de l'état des contraintes est effectuée à l'annexe A. cette analyse conduit aux résultats suivants :

$$t_i(\boldsymbol{n}) = t_{ij}n_j \qquad (i=1, 2, 3 \text{ et } j=1, 2, 3)$$

La première expression indique que la composante *i* du vecteur contrainte et donnée par le produit scalaire du Penseur des contraintes ***T*** dont les composants sont t_{ij} et du vecteur normal ***n*** de composantes n_j. La seconde expression indique que le tenseur t_{ij} est symétrique.

Pour fixer les idées, nous donnons ci-dessous les expression de trois composants du vecteur contrainte sous forme totalement explicite :

$$t_1(\boldsymbol{n}) = t_{11}n_1 + t_{12}n_2 + t_{13}n_3$$
$$t_2(\boldsymbol{n}) = t_{21}n_1 + t_{22}n_2 + t_{23}n_3$$
$$t_3(\boldsymbol{n}) = t_{31}n_1 + t_{32}n_2 + t_{33}n_3$$

D'un point de vue physique, il est intéressant de décomposer la contrainte ***T*** en deux parties:

• la contrainte associée à la pression,

• la contrainte associée aux forces visqueuses.

La pression agit de façon isotrope et sa valeur ne dépend que de l'**état** thermodynamique du fluide. Les contraintes visqueuses sont au contraire essentiellement liées à l'**état de déformation du fluide**. On peut écrire dans ces conditions:

$$t_{ij} = \qquad -\rho\delta_{ij} \quad + \qquad t_{ij}$$

Tenseur des contraintes	Tenseur des contraintes associées à la pression	Tenseur des contraintes visqueuse

La projection du vecteur contrainte sur l'axe *i* est alors donnée par:

$$t_i(\boldsymbol{n}) = \left(-p\delta_{ij} + \tau_{ij}\right)n_j$$

soit encore :

$$t_i(\boldsymbol{n}) = -pn_i + t_{ij}n_j$$

En clair cette expression s'écrit :

$$\begin{aligned} t_1(\boldsymbol{n}) &= pn_1 + t_{11}n_1 + pt_{12}n_2 + t_{13}n_3 \\ t_2(\boldsymbol{n}) &= pn_2 + t_{21}n_1 + t_{22}n_2 + t_{23}n_3 \\ t_3(\boldsymbol{n}) &= pn_3 + t_{31}n_1 + t_{32}n_2 + t_{33}n_3 \end{aligned}$$

Première forme locale de l'équation de conservation de la quantité de mouvement

Muni de ces résultats, on peut maintenant reprendre l'analyse de l'équation (V, 33) reproduite ci-dessous pour la commodité:

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathrm{V}_m(t)} \rho v_i dV = \int_{\mathrm{V}_m(t)} \rho g_i dV + \int_{\mathrm{A}_m(t)} t_i(\boldsymbol{n})\boldsymbol{d}A$$

Considérons d'abord le troisième terme :

$$\int_{\mathrm{A}_m(t)} t_i(\boldsymbol{n})\boldsymbol{d}A = \int_{\mathrm{A}_m(t)} \left(-p\delta_{ij} + \tau_{ij}\right)n_j\boldsymbol{d}A$$

au second membre de cette expression, nous voyons apparaître les flux d'un vecteur dont les composantes sont: $-p\delta_{i1} + \tau_{i1}, -p\delta_{i2} + \tau_{i2}, -p\delta_{i3} + \tau_{i3}$

D'après le théorème de Green-Ostrogradsky, écrit sous la forme:

$$\int_{A_m(t)} p_j n_j dA = \int_V \frac{\partial b_j}{\partial x_j} dV$$

l'expression (V,41) peut s'écrire sous la forme :

$$\int_{A_m(t)} t_i(\boldsymbol{n})\boldsymbol{d}A = \int_{V_m(t)} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(-p\delta_{ij} + \tau_{ij}\right)\boldsymbol{dV}$$

soit encore :

$$\int_{A_m(t)} t_i(\boldsymbol{n})\boldsymbol{d}A = \int_{V_m(t)} \frac{\partial p}{\partial x_j} dV + \int_{V_m(t)} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} dV$$

Considérons à présent le premier terme :

$$\frac{d}{dt}\int_{V_m(t)} \rho v_i dV$$

D'après le théorème de Reynolds, on peut écrire :

$$\frac{d}{dt}\int_{V_m(t)} \rho v_i dV = \int_{V_m(t)} \rho \frac{dv_i}{dt} dV$$

En rassemblant les résultats (V ,44) et (V,46), on obtient finalement:

$$\int_{V_m(t)} \rho \frac{dv_i}{dt} dV = \int_{V_m(t)} \left[\rho g_i - \frac{\partial b}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}\right] dV$$

Le volume de contrôle $V_m(t)$ est arbitraire et les intégrandes apparaissant dans les deux membres doivent être identiques :

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial b}{\partial x_i} + \rho g_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

La signification physique de cette équation apparaît clairement:

$$\left\{\begin{matrix}\text{Quantité}\\ \text{d'accélération}\\ \text{par unité}\\ \text{de volume}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\text{force associées}\\ \text{à la préssion par}\\ \text{unité de}\\ \text{volume}\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\text{force}\\ \text{de volume}\\ \text{par unité}\\ \text{de volume}\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\text{Contraintes}\\ \text{visiqueses}\\ \text{par unité}\\ \text{de volume}\end{matrix}\right\}$$

pour fixer les idées, nous allons maintenant écrire l'équation (V, 48) sous forme explicite et pour les trois composantes:

$$\rho \frac{dv_1}{dt} = -\frac{\partial b}{\partial x_1} + \rho g_1 + \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_3}$$
$$\rho \frac{dv_2}{dt} = -\frac{\partial b}{\partial x_2} + \rho g_2 + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_3}$$
$$\rho \frac{dv_3}{dt} = -\frac{\partial b}{\partial x_3} + \rho g_3 + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{33}}{\partial x_3}$$

on peut aussi écrire l'équation (V, 48) sous forme vectoriel compacte:

$$\boxed{\rho \frac{dv}{dt} - \boldsymbol{\nabla} p + \rho \boldsymbol{g} + \nabla . \tau}$$

Cette notation fait apparaître la divergence du tenseur τ, $\nabla . \tau$ et un vecteur dont la composante suivant l'axe *i* est: $(\nabla . \tau)_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \tau_{ij}$

Ecoulements non visqueux: équations d'Euler

Les équations de conservation de la quantité de mouvement et simplifient notablement lorsque l'on considère des écoulements de **fluides idéaux.**

Le fluide idéal est par définition dénué de viscosité et le tenseur des contraintes visqueuses Penseur disparaît des équations (V,48) ou (V,51). On a dans ce cas :

$$\rho \frac{dv}{dt} = \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i$$

ou: $\rho \frac{dv}{dt} - \boldsymbol{\nabla} p + \rho \boldsymbol{g}$

Ces expressions sont désignées sous le nom d'**équations d'Euler**

Nous verrons dans la suite que les effets de viscosité et de conduction de chaleur sont importants au voisinage immédiat des surfaces solides qui se trouvent dans l'écoulement ou à ces frontières. La région dans laquelle viscosité et conduction doivent être prises en compte est appelée **couche limite**. Les couches limites sont caractères par une épaisseur faible. A l'extérieur des couches limites, l'écoulement peut être généralement considéré comme celui d'un fluide idéal et les équations du mouvement sont celles que nous venons de présenter (équations d'Euler).

Dans les couches limites, les forces associées à la viscosité jouent un rôle important et le terme $\nabla . \tau$ doit être conservé.

Equations de Navier-Stokes

Lorsque le fluide en écoulement est newtonien les équations de conservation de la quantité de mouvement prennent la forme particulièrement simple des équations de **Navier-Stokes**. Nous allons maintenant établir ces équations en supposant, pour simplifier, que la viscosité dynamique y reste constante dans tout l'écoulement. Si cette viscosité n'est pas constante, des termes supplémentaires apparaissent dans les équations du mouvement. L'écriture de ces termes ne présente pas de difficulté et elle est laissée en exercice pour le lecteur.

Nous partons ici de l'équation de conservation de la quantité de mouvement projetée suivant l'axe i:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

Cette équation exprime l'égalité entre la quantité d'accélération par unité de volume et les forces extérieures qui s'appliquent à l'unité de volume (pression, forces volumiques, contraintes visqueuses). Dans le cas d'un fluide newtonien, les contraintes visqueuses ont pour forme:

$$\tau_{ij} = \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\mu(\nabla . v)\delta_{ij}$$

Nous devons maintenant calculer $\partial\tau_{ij}/\partial x_j$. Comme μ est constant, on a :

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \mu\left[\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\right] - \frac{2}{3}\mu\frac{\partial}{\partial x_j}(\nabla . v)$$

ou encore :

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \mu\left[\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\nabla . v)\right] - \frac{2}{3}\mu\frac{\partial}{\partial x_i}(\nabla . v)$$

On obtient finalement:

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \mu \nabla v_i + \frac{\mu}{3}\frac{\partial}{\partial x_i}(\nabla . v)$$

et l'équation (VI, 1) devient:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + \mu \nabla v_i + \frac{\mu}{3}\frac{\partial}{\partial x_i}(\nabla . v)$$

Sous forme explicite, on peut écrire:

$$\rho \frac{dv_1}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_1} + \rho g_1 + \mu \nabla v_1 + \frac{\mu}{3}\frac{\partial}{\partial x_1}(\nabla . v)$$
$$\rho \frac{dv_2}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_2} + \rho g_2 + \mu \nabla v_2 + \frac{\mu}{3}\frac{\partial}{\partial x_2}(\nabla . v)$$
$$\rho \frac{dv_3}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_3} + \rho g_3 + \mu \nabla v_3 + \frac{\mu}{3}\frac{\partial}{\partial x_3}(\nabla . v)$$

Quantité d'accélération par unité de volume	Force de pression par unité de volume	Forces volumiques	Forces visqueuses par unité de volume

On peut aussi représenter ces trois équations sous forme vectorielle compacte :

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\nabla p + \rho g + \mu \nabla^2 v + \frac{\mu}{3} \nabla(\nabla . v)$$

Les expressions précédentes sont appelées équations de Navier-Stokes.

Lorsque le fluide est incompressible, $(\nabla . v) = 0$ et le dernier terme disparaît. On a alors :

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\nabla p + \rho g + \mu \nabla^2 v$$

Equation de bilan pour l'énergie cinétique

L'équation de bilan pour l'énergie cinétique s'obtient en formant le produit scalaire de l'équation de conservation de la quantité de mouvement et du vecteur vitesse *v*.

En notations indicielles, ce produit scolaire a pour forme :

$$\rho v_i \frac{dv_i}{dt} = -v_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i v_i + v_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

ou encore:

$$\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} v^2\right) = -v_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i v_i + v_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

Avec des notations vectorielles, on peut écrire cette équation sous la forme :

$$\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} v^2\right) = \quad -v . \nabla p \quad + \quad \rho g . v \quad + \quad v . (\nabla . \tau)$$

Taux de variation de l'énergie cinétique par unité de volume	Travail des forces de pression par unité de volume et de temps.	Travail des forces volumiques par unité de volume et de temps.	Travail des forces visqueuses par unité de volume et de temps.

on peut aussi écrire le premier nombre de l'équation précédent sous la forme équivalent: $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}pv^2\right) + \nabla.\left(\frac{1}{2}pv^2 v\right)$ On a alors.

Nous verrons plus loin comment les expressions (VI,12) ou (VI,13) peuvent être utilisées pour établir des équations de bilan pour l'énergie interne ou l'enthalpie.

Ces équations sont aussi utilisées lorsqu'on souhaite faire le bilan d'énergie cinétique tur-bulente.

Equation de conservation de l'énergie

Pour établir une équation locale exprimant la conservation de l'énergie, nous partons de l'expression du premier principe de la thermodynamique pour un volume matériel $V_m(t)$.

L'énergie contenue dans le volume $V_m(t)$ a pour expression: $\int_{\mathrm{V}_{m(t)}}\rho\left(e + \frac{1}{2}v^2\right)dV.$

Le taux de variation de cette énergie est donné par:

$$\int_{\mathrm{V}_{m(t)}}\rho\left(e+\frac{1}{2}v^2\right)dV = \dot{W} + \dot{Q}$$

Le travail par unité de temps $\dot{W}$ qui apparaît au second membre est celui des forces de volume et des contraintes appliquées à la surface du volume :

$$\dot{W} = \int_{\mathrm{V}_{Vm(t)}}\rho\boldsymbol{g}.vdV + \int_{\mathrm{V}_{Am(t)}}t(\boldsymbol{n}).\boldsymbol{v}dV$$

Nous supposons ici qu'il n'y a pas de source de chaleur à l'intérieur du volume et nous désignons par ***q*** le flux de chaleur par conduction. Ainsi, ***-q.n*** représente la chaleur qui passe par unité de surface et de temps à travers la surface de contrôle $\mathrm{V}_{Am}(t)$:

$$\dot{Q} = -\int_{V_{m(t)}}\boldsymbol{q}.\boldsymbol{n}dA$$

En substituant les expressions (VI,15) et (VI,16) dans l'équation (VI,14) on obtient:

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathrm{V}_{m(t)}}\rho\left(e+\frac{1}{2}v^2\right)dV=\int_{\mathrm{V}_{Vm(t)}}\rho\boldsymbol{g}.\,vdV+\int_{\mathrm{V}_{Am(t)}}t(\boldsymbol{n}).\,\boldsymbol{v}dV-\int_{\mathrm{V}_{Am(t)}}\boldsymbol{v}.\,\boldsymbol{n}dA$$

Pour déduire une équation locale de cette relation, il faut transformer les premier, troisième et quatrième termes.

Considérons d'abord le premier terme. Le théorème de transport nous permet d'écrire:

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathrm{V}_{m(t)}}\rho\left(e+\frac{1}{2}v^2\right)dV=\int_{\mathrm{V}_{m(t)}}\rho\frac{d}{dt}\left(e+\frac{1}{2}v^2\right)dV$$

On peut aussi écrire:

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathrm{V}_{m(t)}}\rho\left(e+\frac{1}{2}v^2\right)dV$$
$$=\int_{\mathrm{V}_{m(t)}}\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(e+\frac{1}{2}v^2\right)dV+\int_{\mathrm{A}_{m(t)}}\rho\left(e+\frac{1}{2}v^2\right)\boldsymbol{v}.\,\boldsymbol{n}dA$$

ou encor:

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathrm{V}_{m(t)}}\rho\left(e+\frac{1}{2}v^2\right)dV=\int_{\mathrm{V}_{m(t)}}\left[\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(e+\frac{1}{2}v^2\right)+\nabla.\,\rho v\left(e+\frac{1}{2}v^2\right)\right]dV$$

Considérons à présent le troisième terme :

$$\int_{\mathrm{A}_{m(t)}}t(\boldsymbol{n}).\,\boldsymbol{v}dA+\int_{\mathrm{A}_{m(t)}}t(\boldsymbol{n})\boldsymbol{v}_i dA$$

Remplaçons maintenant t;(ii) par son expression en fonction de la pression et du tenseur des contraintes visqueuses :

$$t_i(\boldsymbol{n})=-pn_i+t_{ij}n_j$$

On obtient ainsi :

$$\int_{\mathrm{A}_{m(t)}}t(\boldsymbol{n}).\,\boldsymbol{v}dA+\int_{\mathrm{A}_{m(t)}}\left(-pn_iv_i+t_{ij}v_in_j\right)dA$$

On peut maintenant transformer cette intégrale de surface en intégrale de volume à l'aide du théorème de Green-Ostrogradsky:

$$\int_{\mathrm{A}_{m(t)}}t(\boldsymbol{n}).\,\boldsymbol{v}dA+\int_{\mathrm{V}_{m(t)}}\left[-\frac{b}{\partial x_i}(pv_i)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(t_{ij}v_i\right)\right]dV$$

Il reste à transformer le quatrième terme de l'expression (VI,17) en intégrale de volume.

On obtient :

$$\int_{\mathrm{A}_m(t)} \boldsymbol{q}.\boldsymbol{n} dA + \int_{\mathrm{V}_m(t)} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} dV$$

On peut maintenant écrire (VI,17) sous la forme :

$$\int_{\mathrm{V}_m(t)} \rho \frac{d}{dt}\left(e + \frac{1}{2}v^2\right) dV = \int_{\mathrm{V}_m(t)} \rho g_i v_i dV + \int_{\mathrm{V}_m(t)} \left[-\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} t_{ij} v_i\right] dV$$

$$-\int_{\mathrm{V}_m(t)} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} dV$$

Le volume $V_m(t)$ est arbitraire et par conséquent:

$$\rho \frac{d}{dt}\left(e + \frac{1}{2}v^2\right) = \rho g_i v_i - \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} t_{ij} v_i - \frac{\partial q_i}{\partial x_i}$$

Sous forme vectorielle, on obtient:

$$\rho \frac{d}{dt}\left(e + \frac{1}{2}v^2\right) = \rho \boldsymbol{g}.v - \boldsymbol{\nabla}.(\rho v) + \boldsymbol{\nabla}.(\boldsymbol{\tau}.v) - \boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{q}$$

Taux de variation de l'énergie totale par unité de volume et de temps	Puissance des forces volumiques	Puissance des forces de pression	Puissance des forces visqueuses	Flux de chaleur

Le premier membre peut encore s'écrire sous la forme équivalente :

$$\rho \frac{d}{dt}\left(e + \frac{1}{2}v^2\right) = \frac{\partial}{\partial t}\rho\left(e + \frac{1}{2}v^2\right) + \nabla.\rho\left(e + \frac{1}{2}v^2\right)v$$

et l'équation de conservation de l'énergie prend la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(e + \frac{1}{2}v^2\right) + \nabla.\rho\left(e + \frac{1}{2}v^2\right)v = p\boldsymbol{g}.v - \boldsymbol{\nabla} pg.v + \boldsymbol{\nabla}.(\boldsymbol{\tau}.v) - \boldsymbol{\nabla}.\mathbf{q}$$

Autres formes pour l'équation de conservation de l'énergie:

Un grand nombre de formes différentes existent pour l'équation de conservation de l'énergie. Nous nous proposons de démontrer deux d'entre elles, toutes les autres étant laissées enexercice pour le lecteur.

Variante 1.

Considérons à nouveau l'équation (VI,29) et faisons passer le terme $-\nabla.pv$ au premier membre. Onpeut écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(e + \frac{1}{2}v^2\right) + \nabla.\rho\left(e + \frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho}\right)v = p\boldsymbol{g}.v + \boldsymbol{\nabla}.(\boldsymbol{\tau}.v) - \boldsymbol{\nabla}.\mathbf{q}$$

Comme $h = e + p/\rho$, on peut encore écrire:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(e+\frac{1}{2}v^2\right)+\nabla.\rho\left(h+\frac{1}{2}v^2+\right)=p\boldsymbol{g}.v+\boldsymbol{\nabla}.(\boldsymbol{\tau}.v)-\boldsymbol{\nabla}.\mathbf{q}$$

Variante 2. Equation pour l'énergie interne

On va ici éliminer l’énergie cinétique de l’équation (VI,28). Pour cela, retranchons de l'équation de conservation de l’énergie, l’équation de bilan pour l'énergie cinétique (VI,12). On obtient ainsi:

$$\rho\frac{d}{dt}e=\mathbf{\nabla}.\rho v+v.\boldsymbol{\nabla p}+\mathbf{\nabla}.(\boldsymbol{\tau}.v)-\mathrm{v}.(\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{\tau})-\mathbf{\nabla}.\boldsymbol{q}$$

Les deux premiers termes du second membre s'associent pour donner :

$$-\mathbf{\nabla}.\rho v+v.\boldsymbol{\nabla p}=-p\mathbf{\nabla}.$$

Les deux termes suivants peuvent s’écrire :

$$\mathbf{\nabla}.(\boldsymbol{\tau}.v)-\mathrm{v}.(\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{\tau})=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(t_{ij}v_j\right)-v_j\frac{\partial}{\partial x_i}t_{ij}=t_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}v_j$$

On voit ici apparaître le double produit scalaire du tenseur des contraintes visqueuses et du gradient de vitesse.

On peut écrire ce double produit scolaire sous la forme compacte: $\tau_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\tau_{ij}$

En définitive l'équation (VI,32) prend la forme:

$$\rho\frac{d}{dt}e=-p\mathbf{\nabla}.v+\tau:\mathbf{\nabla}v-\mathbf{\nabla}.\boldsymbol{q}$$

Taux de variation de l’énergie interne par unité de Volume	Puissance des forces de pression par unité de volume	Puissance des forces visqueuses par unité de volume	Flux de chaleur par unité de volume

La fonction de dissipation visqueuse

On désigne le double produit scolaire de l'expression (VI,35) sous le nom de fonction de dissipation visqueuse:

$$\widehat{\Phi} = \tau : \boldsymbol{\nabla v}$$

Cette expression est toujours positive ou nulle. Ainsi les forces visqueuses entraînent toujours un accroissement de l'énergie interne du fluide et donc de sa température. Si le fluide est newtonien, la fonction de dissipation visqueuse s'exprime simplement en fonction des gradients de vitesse. Les expressions de $\widehat{\Phi}$ dans trois systèmes de coordonnées sont données au tableau 1.