Série déformation

Exercice 01 :

Dans l'espace rapporté au repère orthonormé (e_1, e_2, e_3), un milieu continu occupe à l'instant

t = 0 un domaine.

Le milieu subit une déformation entre les instants **0** et **t** telle que la représentation lagrangienne du mouvement est donnée par :

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + X_2/3 \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$.

Calculer le tenseur gradient de la transformation
, le tenseur des dilatations de Cauchy-Green.

Exercice 02 : On considère un mouvement défini dans la base B = $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$

représentation lagrangienne (ω est une constante positive)

$\{x_1 = X_1 \cos(\omega t) - X_2 \sin(\omega t) \quad ; x_1 = X_1 \cos(\omega t) - X_2 \sin(\omega t) ; \qquad x_3 = X_3\}$

1) Calculer le tenseur gradient, $\bar{F}$, le tenseur des dilatations $\bar{C}$, et le tenseur des déformations $\bar{E}$, '',dans l'hypothèse des petites déformations.
2) Calculer le champ de vitesse, le champ d'accélération.

Exercice : 03

En un point (M) d'un milieu continu l'état de contrainte est donné par le tenseur suivant :

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 120 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 10 \\ 0 & 10 & 40 \end{bmatrix}$$

1. Déterminer les contraintes principales σ_1 , σ_2 et σ_3
2. Déterminer les contraintes : totale T, normale σ_N et tangentielle τ_t, suivant une facette de normale unitaire $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\vec{e}_2$

1. Contraintes principales

$$\det[\sigma_{ij} - \lambda.\delta_{ij}] = 0$$

$$\det = \begin{bmatrix} 120-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 40-\lambda & 10 \\ 0 & 10 & 40-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(120-\lambda)[(40-\lambda)^2 - 10^2] = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 120 \\ \lambda_2 = 30 \\ \lambda_3 = 50 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 120 \text{ Mpa} \\ \sigma_2 = 30 \text{ Mpa} \\ \sigma_3 = 50 \text{ Mpa} \end{cases}$$

2. Contrainte totale

$$T_i = \sigma_{ij}.n_j$$

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 120 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 10 \\ 0 & 10 & 40 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \begin{cases} T_1 = 40\sqrt{3} = 69.28 \text{ Mpa} \\ T_2 = \frac{40}{3}\sqrt{6} = 32.65 \text{ Mpa} \\ T_3 = \frac{10}{3}\sqrt{6} = 8.16 \text{ Mpa} \end{cases}$$

$$T = \sqrt{T_1^2 + T_2^2 + T_3^2} = 77.02 \text{ Mpa}$$

3. Contrainte normale

$$\sigma_N = n_i\sigma_{ij}n_j = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40\sqrt{3} & \frac{40}{3}\sqrt{6} & \frac{10}{3}\sqrt{6} \end{pmatrix} = 66.66 \text{ Mpa}$$

4. Contrainte tangentielle

$$\tau = \sqrt{T^2 - \sigma_N^2} = 38.58 \text{ Mpa}$$

- On note $\mathbb{E}$ le tenseur de Green-Lagrange défini par:

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2}.({}^t\mathbb{F}\mathbb{F} - \mathbb{I}) = \frac{1}{2}.(\mathbb{C} - \mathbb{I})$$

Le taux d'allongement

$$\mathbf{d} = \mathbf{u}_i \frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial \mathbf{x}_j} \mathbf{u}_j = \mathbf{u}_i\, \mathbf{D}_{ij}\, \mathbf{u}_j + \mathbf{u}_i\, \mathbf{\Omega}_{ij}\, \mathbf{u}_j$$

Exercice 01

Tenseur gradient de la transformation

$$\underline{\underline{F}}(\vec{X},t) = \overrightarrow{grad}[\vec{\Phi}(\vec{X},t)] = \overrightarrow{grad}[\vec{x}(\vec{X},t)]$$
$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$$

$$F := \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tenseur des dilatations de Cauchy-Green

$$d\vec{x}^{T}.d\vec{x}' = d\vec{X}^{T}\underline{\underline{C}}\ d\vec{X}' \quad \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^{T}\underline{\underline{F}}$$

$$C := \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{10}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$