Chapitre IV

Déformation et rotation

La déformation d'un milieu continu est caractérisée par le déplacement relatif des divers points matériels qui constituent ce milieu. Nous présentons, dans ce chapitre, l'aspect géométrique des déformations par la description des mouvements simples: translation, rotation, dilatation, déformation angulaire. Il s'agit d'un simple rappel des notions présentées dans le cours de Mécanique des Milieux Continus.

En Mécanique des Fluides, le paramètre important n'est pas tant la déformation que la vitesse à laquelle la déformation intervient, et nous introduisons ici la notion de taux de déformation et de taux de rotation .

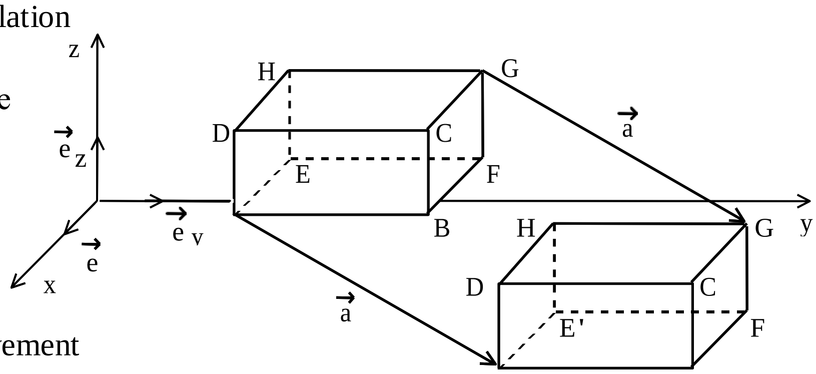
Translation

• Définition: Une translation pure est un mouvement dans lequel toutes les particules subissent le même déplacement.

En notant $\vec{x}$ la position d'une particule fluide un instant donné, $\vec{x}'$ sa position à un instant ultérieur et $\vec{a}$ le déplacement:

$$\vec{x}' = \vec{x} + \vec{a}(t)$$

La figure représente la translation d'un élément fluide de forme géométrique simple.



Le volume matériel initial conserve sa forme. Le mouvement de translation s'effectue sans déformation.

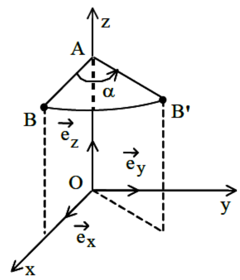
Le vecteur vitesse, défini par (3.5): $\vec{V}(\vec{x}, t) = \frac{\partial \vec{a}(t)}{\partial t} = \frac{d\vec{a}}{dt} = \vec{V}(t)$ est le même pour toutes les particules.

Rotation

a) <u>Définition:</u> Une rotation pure est mouvement dans lequel toutes les particules tournent d'un même angle autour d'un axe donné.

b) <u>Illustration:</u> Soit par exemple la rotation d'un angle $\alpha(t)$ autour de l'axe Oz; une particule initialement en B se déplace au point B' tel que AB' = AB et $\alpha = \widehat{BAB'}$.

On peut donc écrire: $\begin{cases} x' = xcosa - ysina \\ y' = \mathrm{xsina + ycosa} \\ z' = z \end{cases}$

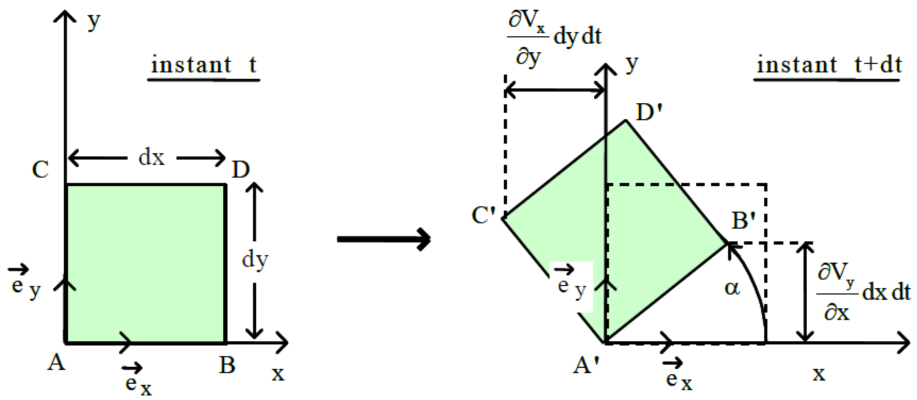


ou encore sous forme matricielle: $\vec{x}' = R\vec{x}$ où R est la matrice antisymétrique de la rotation

$$R = \begin{pmatrix} cosa - sina & 0 \\ sina \quad cosa & 0 \\ 0 \qquad 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) <u>Taux de rotation:</u>

Considérons le déplacement de la ligne fluide AB. Si V_y est la vitesse du point A dans la direction $\vec{e}_y$, la vitesse du point B est $V_y + \frac{\partial V_y}{\partial x} dx$. Le déplacement du point B pendant l'intervalle de temps dt est $V_y \mathrm{dt} + \frac{\partial V_y}{\partial x} dx\mathrm{dt}$ et le segment fluide AB subit donc une rotation d'angle $\alpha = \frac{\partial V_y}{\partial x} dxdt/\ dx = \frac{\partial V_y}{\partial x} dt$ On peut donc exprimer le taux de rotation instantané du segment fluide AB: $\frac{\partial V_y}{\partial x} dt/\ dt = \frac{\partial V_y}{\partial x}$



De même le taux de rotation instantané du segment fluide AC est $\frac{\partial V_x}{\partial y} dydt/dydt = -\frac{\partial V_x}{\partial y}$ et le rotation moyen autour de l'axe Oz est donc:

On peut aisément généraliser ce résultat au cas d'une rotation tridimensionnelle:

$$\Omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial_x} - \frac{\partial V_x}{\partial_y}\right)$$

On peut aisément généraliser ce résultat au cas d'une rotation tridimensionnelle:

$$\begin{cases} \Omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial_y} - \frac{\partial V_y}{\partial_z}\right) \\ \Omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial_z} - \frac{\partial V_z}{\partial_x}\right) \\ \Omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial_x} - \frac{\partial V_x}{\partial_y}\right) \end{cases}$$

d) <u>Vecteur tourbillon:</u>

Le vecteur $\varepsilon_{ijk} \mathrm{V}_{\mathrm{k,j}} \vec{\mathrm{e}}_{\mathrm{i}} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{\mathrm{V}}$ est souvent appelé vorticité de l'écoulement. On appelle vecteur tourbillon le vecteur $\vec{\Omega}$ défini par (4.2) comme la moitié de la vorticité

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{\mathrm{V}}$$

et qui s'interprète comme une vitesse angulaire locale.

Un écoulement est dit irrotationnel si $\vec{\Omega} = \vec{0}$. Le rotationnel du champ de vitesse étant nul celui-ci dérive d'un potentiel:

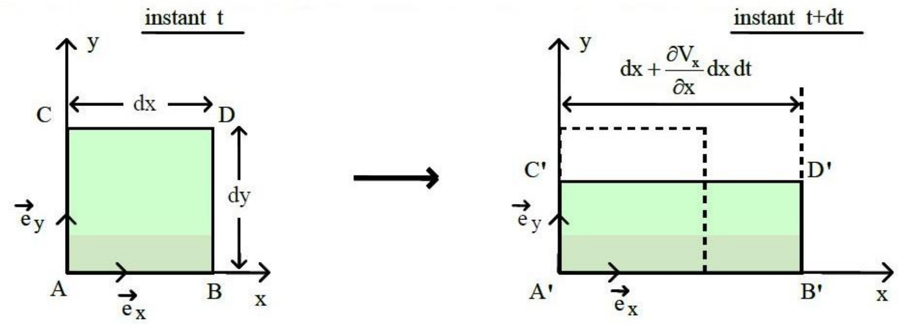
$$\vec{V} = \overrightarrow{grad}\Phi$$

et l'analyse de l'écoulement peut être faite à l'aide de cette fonction potentiel Φ.

Dilatation

a) Définition: On appelle dilatation la déformation unitaire associée à une variation de la vitesse dans la direction du mouvement.

b) Illustration: On observe une dilatation pure dans la direction x sur le schéma ci-dessous.

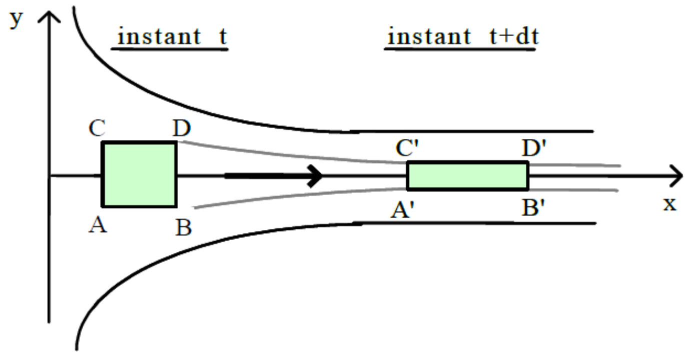


Si V^x désigne la vitesse au point A, on peut exprimer la vitesse en B par: $V_x = \frac{\partial V_x}{\partial_x}$ et la longueur du segment A'B' par $d_x + \frac{\partial V_x}{\partial_x} dxdt$. La variation relative de longueur du segment AB sera donc: $\left[\left(d_x + \frac{\partial V_x}{\partial_x} dxdt\right) - dx\right] / d_x + \frac{\partial V_x}{\partial_x} dt$

On définit donc le taux de dilatation linéaire dans la direction x par

$$\frac{\partial V_x}{\partial_x}$$

On observe, par exemple, une dilatation (dans la direction de l'écoulement) des particules fluides dans une section convergente d'une conduite. Au taux de dilatation contraction $\partial V_x / \partial x$ dans la direction x correspond un taux de $\partial V_y / \partial y$. dans la direction y.



De façon générale, on appelle taux de dilatation volumique (ou cubique) la somme

$$\frac{\partial V_x}{\partial_x} + \frac{\partial V_y}{\partial_y} + \frac{\partial V_z}{\partial_z} = div\,\vec{V}$$

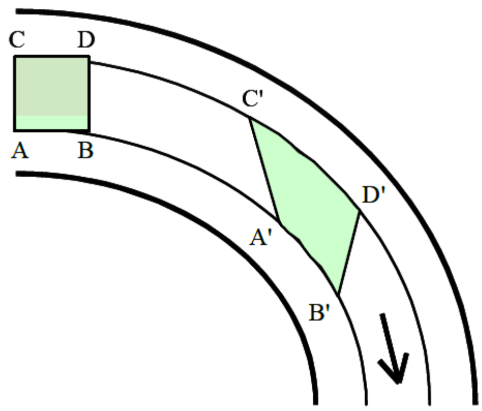
Cisaillement

a) <u>Définition:</u> On appelle cisaillement la déformation angulaire associée à une variation de la vitesse dans la direction normale au mouvement.

b) <u>Illustration:</u> Un cisaillement a lieu par exemple dans une conduite coudée puisque l'écoulement est alors plus rapide dans la partie intérieure du coude que dans sa partie extérieure.

Le segment fluide CD se déplace plus rapidement que le segment fluide AB. La

déformation angulaire est proportionnelle à la différence de vitesse.

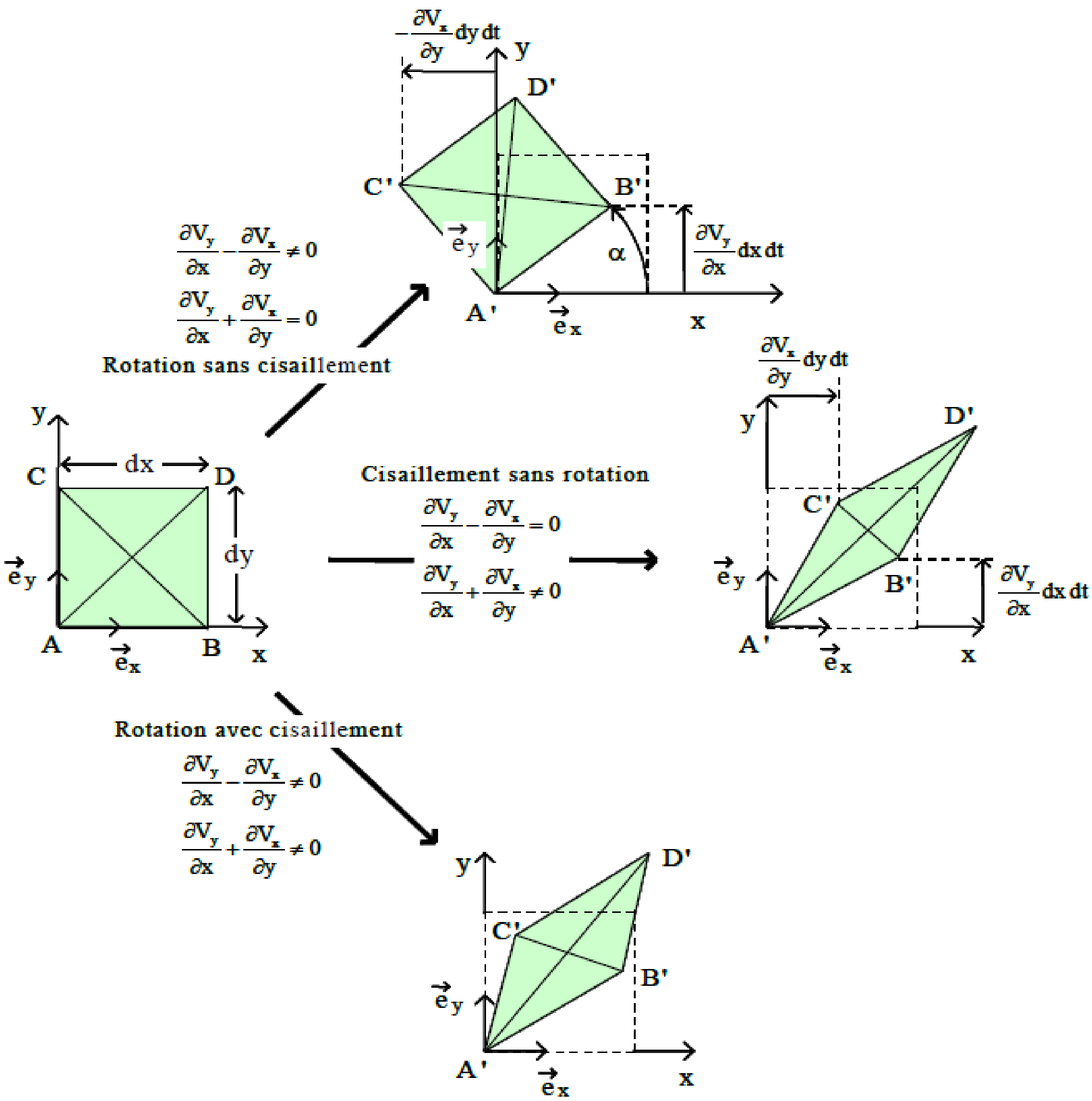


Considérons par exemple la déformation représentée sur le schéma de droite de la figure de la page suivante. Si V_x est la vitesse du point A, $V_x + \frac{\partial V_x}{\partial_y}dy$ représente celle du point C. Pendant l'intervalle de temps dt le point A parcourt la distance $V_x dt$. alors que le point C parcoure la distance $V_x dt \frac{\partial V_x}{\partial_y}$ dydt. Dans ces conditions le segment AC pivote autour de A d'un angle $\frac{\partial V_x}{\partial_y} dydt/dy \frac{\partial V_x}{\partial_y}$ dt à la vitesse angulaire $\frac{\partial V_x}{\partial_y} dt/dt \frac{\partial V_x}{\partial_y}$.

De la même manière si la vitesse du point B diffère de celle du point A, le segment AB pivote autour de A avec une vitesse $\frac{\partial V_x}{\partial_y}$. La vitesse de déformation de l'angle $\widehat{CAB}$ est la somme de ces deux vitesses angulaires:

$$\frac{\partial V_x}{\partial_y} + \frac{\partial V_x}{\partial_y}$$

Sur le schéma considéré nous avons pris $\frac{\partial V_x}{\partial_y}$ et $\frac{\partial V_x}{\partial_y}$ égaux. Dans ce cas particulier la direction de la bissectrice principale est conservée et la rotation moyenne est nulle. On dit que la particule fluide subit un cisaillement pur.



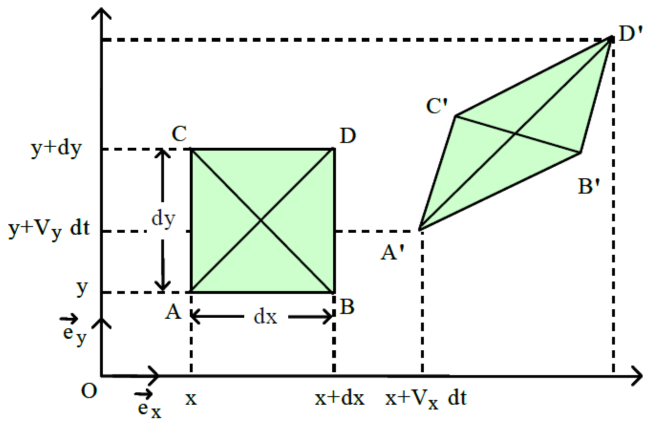
• Si les deux taux de déformation $\frac{\partial V_x}{\partial y}$ et $\frac{\partial V_x}{\partial y}$ ne sont pas égaux la particule subit à la fois une rotation et une déformation (schéma du bas sur la figure).

• Dans le cas ou les taux de déformation sont égaux et opposés .

Décomposition du mouvement général d'une particule

Cas 2D

Nous allons voir que dans le cas général un mouvement quelconque peut être décomposé en mouvements simples purs: translation, dilatation, déformation angulaire (cisaillement) et rotation. Considérons, pour simplifier l'exposé, un mouvement bidimensionnel quelconque (figure). La généralisation au cas tridimensionnel ne présentera aucune difficulté.



Vitesse au point A(x,y): $V_a \begin{cases} V_X \\ V_Y \end{cases}$

Vitesse au point D(x+dx, y+dy):

$$\vec{V}_D \begin{cases} V_x + \frac{\partial V_x}{\partial_y} + dx\frac{\partial V_x}{\partial_y}dy \\ V_y + \frac{\partial V_y}{\partial_x} + dx\frac{\partial V_y}{\partial_y}dy \end{cases}$$

À l'instant t+dt le point A est passé en A' de coordonnées: $\begin{cases} x + V_x\,dt \\ x + V_y\,dt \end{cases}$ et le point D en D' de coordonnées:

$$\begin{cases} x + dx + \left(V_x + \frac{\partial V_x}{\partial_y} + dx\frac{\partial V_x}{\partial_y}dy\right)dt \\ y + dy + \left(V_y + \frac{\partial V_y}{\partial_x} + dx\frac{\partial V_y}{\partial_y}dy\right)dt \end{cases}$$

On peut réécrire (4.6) en faisant apparaître l'expression des mouvements simples de translation, dilatation, déformation angulaire et rotation; il suffit d'ajouter et retrancher $1/2(\partial V_y/\,\partial x)dydt$ à la première coordonnée et $1/2(\partial V_x/\,\partial y)dydt$ à la seconde:

$$
\begin{cases}
\underset{\text{Positioninit.}}{x + dx} + \underset{\text{Translation}}{V_x\,dt} + \underset{\text{Dilatation}}{\frac{\partial V_x}{\partial_x} + dxdt} + \underset{\text{Déformationangulaire}}{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial_y} + \frac{\partial V_y}{\partial_x}\right)dydt} + \underset{\text{Rotation}}{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial_y} - \frac{\partial V_y}{\partial_x}\right)dydt} \\
\underset{\text{Positioninit.}}{y + dy} + \underset{\text{Translation}}{V_y\,dt} + \underset{\text{Dilatation}}{\frac{\partial V_y}{\partial_y} + dxdt} + \underset{\text{Déformationangulaire}}{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial_y} + \frac{\partial V_y}{\partial_x}\right)dydt} + \underset{\text{Rotation}}{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial_x} - \frac{\partial V_x}{\partial_y}\right)dydt}
\end{cases}
$$

Cas 3D

Il est aisé de généraliser l'expression (4.7) au mouvement général d'une particule fluide dans un écoulement tridimensionnel. On obtient:

$$
\begin{cases}
x + dx + V_x\,dt + \frac{\partial V_x}{\partial_x}dxdt + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial_y} + \frac{\partial V_y}{\partial_x}\right)dydt + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial_z} - \frac{\partial V_z}{\partial_x}\right)dz\right]dt \\
x + dy + V_y\,dt + \frac{\partial V_y}{\partial_y}dydt + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial_z} + \frac{\partial V_z}{\partial_y}\right)dydt + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial_x} - \frac{\partial V_x}{\partial_y}\right)dx\right]dt \\
\underset{\substack{\text{Position}\\ \text{initiale}}}{x + dz} + \underset{\text{Translation}}{V_z\,dt} + \underset{\text{Dilatation}}{\frac{\partial V_z}{\partial_z}dzdt} + \underset{\substack{\text{Déformationangulaire}\\ \text{(Cisaillement)}}}{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial_x} + \frac{\partial V_x}{\partial_z}\right)dydt + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial_y} - \frac{\partial V_y}{\partial_z}\right)dy\right]dt}
\end{cases}
$$

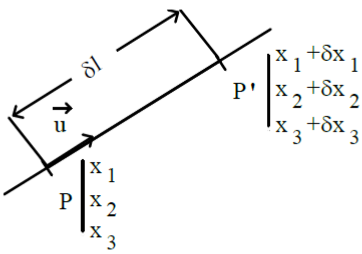
$$
\left.
\begin{aligned}
&+\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial_y} + \frac{\partial V_y}{\partial_x}\right)dydt + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial_z} - \frac{\partial V_z}{\partial_x}\right)dz\right]dt \\
&+\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial_z} + \frac{\partial V_z}{\partial_y}\right)dydt + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial_x} - \frac{\partial V_x}{\partial_y}\right)dx\right]dt \\
&+\underset{\text{Rotation}}{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial_x} + \frac{\partial V_x}{\partial_z}\right)dydt + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial_y} - \frac{\partial V_y}{\partial_z}\right)dy\right]dt}
\end{aligned}
\right\}
$$

Taux de d'allongement d'un segment fluide

Nous allons maintenant déterminer le taux de d'allongement **d** d'un segment fluide, c'est-à-dire sa **variation de longueur par unité de longueur et de temps.**

Soit δl la longueur initiale d'un segment fluide PP' orienté selon le vecteur unitaire $\vec{u}$. Conformément aux notations indiquées sur la figure on a:

$$(\delta l)^2 = \delta x_i \delta x_i$$



$$\text{et} \qquad u_i = \lim_{\delta l \to 0} \frac{\delta x_i}{\delta l}$$

Le taux d'allongement du segment est défini par:

$$\mathrm{d} = \lim_{\delta l \to 0} \left[\frac{1 \mathrm{d}(\delta l)}{\delta l \, \mathrm{dt}} \right]$$

qu'on peut encore écrire:

$$\mathrm{d} = \lim_{\delta l \to 0} \left[\frac{1}{2} \frac{1}{(\delta l)^2} \frac{\mathrm{d}(\delta l)^2}{\mathrm{dt}} \right] = \lim_{\delta l \to 0} \left[\frac{1}{2} \frac{1}{(\delta l)^2} \frac{\mathrm{d}(\delta x_i + \delta x_i)}{\mathrm{dt}} \right]$$

$$= \lim_{\delta l \to 0} \left[\frac{\delta x_i}{(\delta l)^2} \frac{\mathrm{d}(\delta x_i)}{\mathrm{dt}} \right]$$

Or, puisque $x_i = x_i\,(\mathrm{P}') - x_i(\mathrm{P})$, on a:

$$\frac{\mathrm{d}(\delta x_i)}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}[x_i(\mathrm{P}')]}{\mathrm{dt}} - \frac{\mathrm{d}[x_i(\mathrm{P})]}{\mathrm{dt}} = \mathrm{V}_i(\mathrm{P}') - \mathrm{V}_i(\mathrm{P}) + \delta \mathrm{V}_i = \frac{\delta \mathrm{V}_i}{\delta x_j} \delta x_j + \mathrm{O}\left(\left(\delta x_j \right)^2 \right)$$

où les V_i sont les composantes du vecteur vitesse qu'on a développé en série de Taylor autour du point P.

En substituant cette dernière expression dans la relation (4.10) on obtient:

$$\mathbf{d} = \lim_{\delta l \to 0} \left[\frac{\delta x_j}{\delta l} \frac{\partial \mathrm{V}_i}{\partial x_i} \frac{\delta x_i}{\delta l} \right]$$

soit encore, en exprimant les composantes de u d'après (4.9):

$$\mathbf{d} = u_i \frac{\partial \mathrm{V}_i}{\partial x_j} u_j$$

Ainsi, le taux d'allongement dans la direction est déterminé par le tenseur gradient de la vitesse locale.

En notant $\overline{\overline{\mathrm{G}}} = \overline{\overline{\mathrm{grad}\vec{\mathrm{V}}}}$ le tenseur gradient des vitesses, on écrira: $\mathbf{d} = \vec{u} \bullet \overline{\overline{\mathrm{G}}} \bullet \vec{u}$

avec
$$\mathrm{G}_{ij} = \begin{pmatrix} \mathrm{V}_{1,1} & \mathrm{V}_{1,2} & \mathrm{V}_{1,3} \\ \mathrm{V}_{2,1} & \mathrm{V}_{2,2} & \mathrm{V}_{2,3} \\ \mathrm{V}_{3,1} & \mathrm{V}_{3,2} & \mathrm{V}_{3,3} \end{pmatrix}$$

Tenseur des taux de déformation et tenseur des taux de rotation

On décompose classiquement le tenseur gradient des vitesses $\overline{\overline{\mathrm{G}}}$ en la somme de sa partie symétrique $\overline{\overline{\mathrm{D}}}$ et de sa partie antisymétrique $\overline{\overline{\Omega}}$ (voir les définitions **§1.2.3-c**):

$$\overline{\overline{\mathrm{G}}} = \overline{\overline{\mathrm{D}}} + \overline{\overline{\Omega}}$$

avec
$$\mathrm{D}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{V}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathrm{V}_j}{\partial x_i}\right) \qquad \mathrm{D}_{ij} = \mathrm{D}_{ji}$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{V}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \mathrm{V}_j}{\partial x_i}\right) \qquad \Omega_{ij} = \Omega_{ji}$$

Le tenseur $\overline{\overline{\mathrm{D}}}$ est justement nommé tenseur des taux de déformation (stetching tensor); il est symétrique.

$$\mathrm{D}_{ij} = \begin{pmatrix} \mathrm{V}_{1,1} & \frac{1}{2}(\mathrm{V}_{1,2} + \mathrm{V}_{2,1}) & \frac{1}{2}(\mathrm{V}_{1,3} + \mathrm{V}_{3,1}) \\ \frac{1}{2}(\mathrm{V}_{1,2} + \mathrm{V}_{2,1}) & \mathrm{V}_{2,2} & \frac{1}{2}(\mathrm{V}_{3,3} + \mathrm{V}_{3,3}) \\ \frac{1}{2}(\mathrm{V}_{1,3} + \mathrm{V}_{3,1}) & \frac{1}{2}(\mathrm{V}_{2,3} + \mathrm{V}_{3,2}) & \mathrm{V}_{3,3} \end{pmatrix}$$

Le tenseur $\overline{\overline{\Omega}}$ est appelé tenseur des taux de rotation (spin tensor); il est antisymétrique.

$$\Omega_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}(\mathrm{V}_{1,2} - \mathrm{V}_{2,1}) & \frac{1}{2}(\mathrm{V}_{1,3} - \mathrm{V}_{3,1}) \\ \frac{1}{2}(\mathrm{V}_{1,2} - \mathrm{V}_{2,1}) & 0 & \frac{1}{2}(\mathrm{V}_{3,3} - \mathrm{V}_{3,3}) \\ \frac{1}{2}(\mathrm{V}_{1,3} - \mathrm{V}_{3,1}) & \frac{1}{2}(\mathrm{V}_{2,3} - \mathrm{V}_{3,2}) & 0 \end{pmatrix}$$

Les composantes cartésiennes de ces tenseurs sont données en coordonnées rectangulaires, cylindriques et sphériques en Annexes.

• Nous allons maintenant montrer que seul D_{ij} intervient dans la détermination du taux d'allongement **d**. On peut en effet décomposer l'égalité (4.11):

$$\mathrm{d} = u_i \frac{\partial \mathrm{V}_i}{\partial x_j} u_i = u_i \mathrm{D}_{\mathrm{ij}} u_j + u_i \Omega_{ij} u_j$$

Le dernier terme de cette expression peut être écrit sous la forme:

$$u_i \Omega_{ij} u_j = \frac{1}{2} u_i \Omega_{ij} u_j + u_j \Omega_{ij} u_i$$

ou encore, en permutant les indices muets du dernier terme:

$$u_i \Omega_{ij} u_j = \frac{1}{2} u_i \Omega_{ij} u_j + u_j \Omega_{ij} u_i = \frac{1}{2} u_i \left(\Omega_{ij} + \Omega_{ij}\right) u_j$$

Comme $\overline{\overline{\Omega}}$ est antisymétrique $\Omega_{ij} + \Omega_{ij} = 0$ et l'on voit que $u_i \Omega_{ij} u_j = 0$

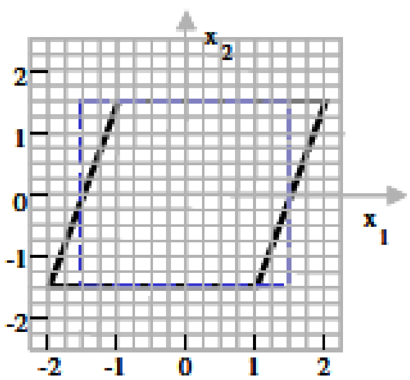
En définitive, le taux d'allongement dans la direction $\vec{u}$ est déterminé uniquement par le tenseur des taux de déformation $\overline{\overline{\mathrm{D}}}$ (et par les composantes ui de la direction considérée):

$$\mathbf{d} = u_i \mathrm{D}_{ij} u_j$$

soit, sous forme intrinsèque: $\mathbf{d} = \vec{u} \bullet \overline{\overline{\mathrm{D}}} \bullet \vec{u}$

Exercices

Exercice 1 :



Un disque plat est soumis à du glissement simple

Calculer :

_ le tenseur gradient de la transformation

_ le tenseur des dilatations de Cauchy-Green

_ la dilatation selon les trois axes X1, X2

_ l’angle entre les axes 1 et 2 après transformation

_ le tenseur des déformations de Green-Lagrange

_ la déformation selon les trois axes

_ le tenseur petites déformations

Exercice 2

Un solide est déformé en déformation uni-axiale. selon X1. :

où t correspond au temps et b est une constante arbitraire.

Calculer :

_ le tenseur gradient de la transformation

_ le tenseur des dilatations de Cauchy-Green

_ la dilatation selon les trois axes X1, X2

_ l’angle entre les axes 1 et 2 après transformation

_ le tenseur des déformations de Green-Lagrange

__ la déformation selon les trois axes

__ le tenseur gradient des déplacements

__ le tenseur petites déformation