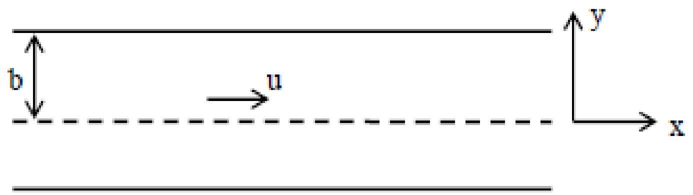
Série : Navier Stokes

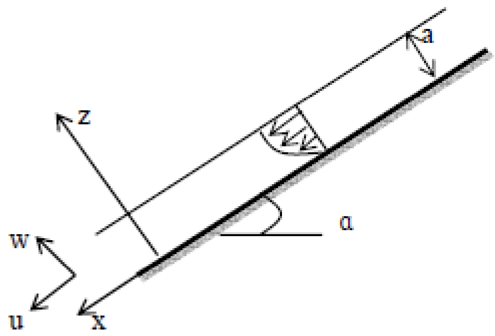
Exercice : 01) Etablir l'équation de mouvement d'un écoulement permanent d'un fluide réel incompressible se produit entre deux plaques planes lisses parallèles ?

(Ecoulement monodimensionnel suivant x).

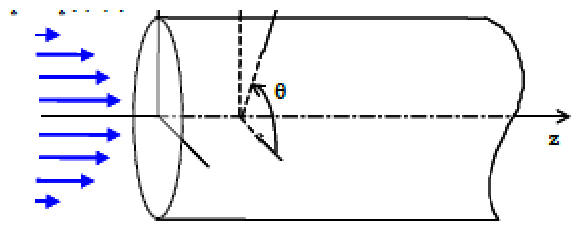


Exercice : 02) Sur une plaque plane lisse, faisant avec l'horizontal un angle α, en mouvement permanent bidimensionnel établi et sous une épaisseur à, coule sous l'effet de la pesanteur, un liquide de viscosité ν.

Etablir l'équation de Navier Stokes.



Exercice : 03) un écoulement parallèle permanent dans un conduit cylindrique rectiligne.



Etablir L'équation de quantité de mouvement en projection sur les trois axes, coordonnées cylindriques.

Exercice : 04) L'équation de ***Navier-Stokes***

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)-\rho g$$

Écrivez l'équation avec des variables sans dimension

Solution

L'équation d'Euler s'écrit :

Suivant x : $\rho.(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z})=\frac{-\partial p}{\partial x}+\mu\Delta u$

Suivant y : $\rho.(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z})=\frac{-\partial p}{\partial y}+\mu\Delta v$

Suivant z : $\rho.(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z})=\frac{-\partial p}{\partial z}+\mu\Delta w$

On a aussi écoulement monodimensionnel :

$$\begin{cases} v=w=0 \\ \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=0 \\ \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0 \\ \frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0 \end{cases}$$

Et puisque c'est incompressible et permanent, on peut écrire de l'équation de continuité :

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \\ \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial w}{\partial t}=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Les trois équations d'Euler deviennent : $\frac{-\partial p}{\partial x}+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, $\frac{\partial p}{\partial y}=0$, et $\frac{\partial p}{\partial z}=0$

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial p}{\partial z}=0$$

Qui démontre que c'est un écoulement de Couette.

Exercice 02 : l'équation de Navier Stokes à 2 dimensions

Suivant x : $\rho.(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+w\frac{\partial u}{\partial z})=\frac{-\partial p_g}{\partial x}+\mu.(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2})$

Suivant z : $\rho.(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial z})=\frac{-\partial p_g}{\partial z}+\mu.(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2})$

De l'équation de continuité, on écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

L'écoulement est permanent : $\frac{\partial}{\partial t}=0$

L'écoulement est établi : $\frac{\partial}{\partial x}=0 \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial z}=0$

$\Rightarrow$ w est nul et u ne dépend que de z, ce qui nous permet d'écrire :

$$\frac{\partial p_g}{\partial x}=\mu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$\frac{\partial p_g}{\partial z}=0$ avec $P_g = p + \rho.g.h$

$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial z}+\rho.g.\frac{\partial h}{\partial z}=0$ soit : $\frac{\partial p}{\partial z}+\rho.g.Cos\alpha=0$

Après intégration de cette 'équation, nous obtenons :

p = $\rho.g.z.Cos\alpha$ + f(x)

Puisque la pression est constante sur la surface libre : z = a $\Rightarrow$ f(x) = 0.

$$\Rightarrow \mu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial p}{\partial x}+\rho.g.\frac{\partial h}{\partial x}=0 - \rho.g.Sin\alpha$$

En intégrant, nous trouvons :

$$\mu\frac{\partial u}{\partial z}= \rho.g.z.Sin\alpha + A$$

$$\Rightarrow \mu.u = -\rho.g.\frac{z^2}{2}.Sin\alpha + A.z + B$$

Sur la paroi nous avons : z = 0, u = 0 $\Rightarrow$ B = 0

A la surface libre, la contrainte est nulle : z = a : $\mu\frac{\partial u}{\partial z}=0 \Rightarrow$ A = $\rho.g.a.Sin\alpha$

$$\Rightarrow u = \rho.g.\frac{Sin\alpha}{u}.(a.z-\frac{z^2}{2})$$

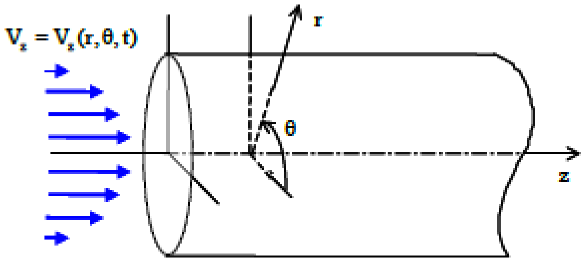
Exercice 03 :

$$\begin{cases} V_r = 0 \\ V_\theta = 0 \\ V_z = V_z(r,\theta,z,t) \end{cases}$$

Pour un fluide isovolume, l'équation de continuité se réduit dans cette situation à:

$$\frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$$

Les profils de vitesse sont inchangés d'une section droite à une autre: $\vec{V} = V_z(r,\theta,t)\vec{e}_z$



L'équation de quantité de mouvement en projection sur les trois axes se réduit à:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P^*}{\partial r} = 0 \\ \dfrac{\partial P^*}{\partial \theta} = 0 \\ \dfrac{\partial V_z}{\partial t} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{dP^*}{dz} + \nu\left[\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial V_z}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2}\right] \end{cases} \tag{12.5}$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{dP^*}{dz} + \nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2}\right]$$

Tableau 1. L'équation de continuité dans trois systèmes de coordonnées

Coordonnées cartésiennes :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0$$

Coordonnées cylindriques : $u = v_r, v = v_\theta, w = v_r$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\rho\, r\, u) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho\, v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0$$

Coordonnées sphériques : $u = v_r, v = v_\theta, w = v_\phi$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(\rho\, r^2 u) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}(\rho w) = 0$$

Tableau 2. Equations de Navier-Stokes pour les écoulements incompressibles

Coordonnées rectangulaires x, y, z, vitesse (u, v, w)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\Big) + g_x$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\Big(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\Big) + g_y$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\Big) + g_z$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Tableau 3. Equations de Navier-Stokes pour les écoulements incompressibles

Coordonnées cylindriques r, θ, z, vitesse (u, v, w)

Direction radiale :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$
$$= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\Big[\frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru)\Big) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\Big] + g_r$$

Direction tangentielle :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{uv}{r} + w\frac{\partial v}{\partial z}$$
$$= -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu\Big[\frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv)\Big) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\Big] + g_\theta$$

Direction axiale :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} + w\frac{\partial w}{\partial z}$$
$$= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\Big[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial w}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\Big] + g_z$$