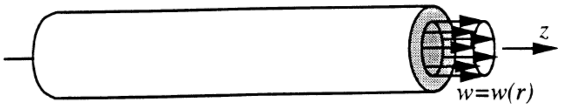
Chapitre 7

. Quelques Solutions exactes des équations de Navier-Stokes

Les équations de Navier-Stokes décrivent le mouvement des fluides et sont fondamentales en mécanique des fluides. Bien qu'elles soient généralement difficiles à résoudre, certaines solutions exactes sont connues pour des cas spécifiques et simplifiés. Voici quelques exemples de solutions exactes :

L’écoulement de Poiseuille dans un tube cylindrique

Considérons maintenant l’écoulement parallèle d’un fluide visqueux dans un tube cylindrique de rayon R (figure 6) et supposons que l'écoulement soit axisymétrique et stationnaire.



Dans ces conditions, la pression ne dépend plus que de la coordonnée axiale $p = p(z)$ et la composante de vitesse w ne dépend plus que de la coordonnée radiale $w = w(r)$.

L'équation devient ici:

$$\mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) = \frac{dp}{dz}$$

Les conditions aux limites pour ce problème sont $w(R) = 0$, qui traduit le non glissement sur la paroi du conduit, et $w(0) < \infty$ qui exprime que la vitesse reste finie sue l'axe. la solution générale de l'équation a pour forme:

$$w(r) = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} r^2 + c_1 ln\, r + c_2$$

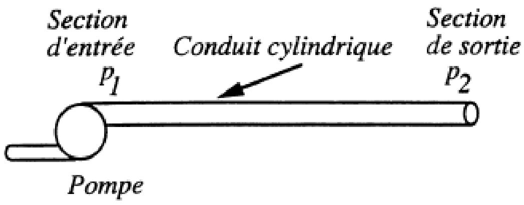
La constante c, est nulle, car $w(0) < \infty$ et c_2 est donnée par l conduit:

$$0 = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} R^2 + c_2$$

Le profil de vitesse a donc pour forme :

$$w(r) = -\frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dz}(R^2 - r^2)$$

Il s'agit encore d'un profil parabolique. Dans l'expression précédente, le gradient de pression axial $-dp/dz = (p_1 - p_2)/l$ est imposé, de l'extérieur, au fluide qui s'école dans le conduit. Ce gradient est obtenu par exemple à l'aide d'un système de pompage comme celui schématisé sur la figure 6b.



La vitesse maximum sur l'axe a pour valeur :

$$w_M = -w(r) = \frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dz}R^2$$

et la vitesse moyenne est donnée par :

$$\int 0 \;\; w(r)dr \; w = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^{2\pi}$$

$$\frac{w_M}{2} \; \overline{w} = \frac{1}{8\mu}\frac{dp}{dz}R^2$$

Cette vitesse est égale à la moitié de la vitesse sur l'axe.

Le débit volume est immédiatement obtenu sous la forme:

$$Q = \pi R^2 \overline{w} = -\frac{\pi R^4}{8\mu}\frac{dp}{dz}$$

soit encore :

$$Q = \pi R^2 \overline{w} = -\frac{\pi R^4}{8\mu}\frac{p_1 - p_2}{l}$$

ce débit est proportionnel au gradient de pression et au rayon a la puissance quatre.

L’analyse qui vient d'être effectuée est uniquement applicable à des écoulements laminaires.

Cette situation prévaut tant que le nombre de Reynolds ne dépasse pas une certaine valeur critique. Ce nombre a pour expression:

$$Re = \frac{\rho \overline{w} D}{\mu}$$

- **Écoulement de Couette :**

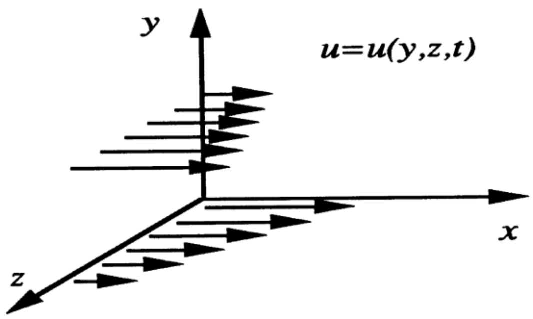
L'écoulement de Couette se produit entre deux plaques parallèles, où l'une des plaques se déplace à une vitesse constante par rapport à l'autre, qui est fixe.

Solution : Pour un fluide incompressible et newtonien, la vitesse u(y)u(y) entre les plaques (situées à y=0y=0 et y=hy=h) est donnée par :

u(y)=(U / h) y

où U est la vitesse de la plaque en mouvement.

Equation générale des écoulement parallèles :



La composonte de vitesse u ne dépend donc pas de x u = u(y,z,t), v=0, w=0
Considérons a présent l’équation de conservation de la quantité de mouvement projetée sur les axes y, z . ces équation s’écrivent , en léabsence de forces de volume ;

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

Ainsi la pression ne dépend ni de y ni de z, et p= p(x,t).

L'équation de conservation de la quantité de mouvement projetée suivant l'axe des x prend alors la forme particulliérement simple

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

Nous utiliserons cette équation plus loin .

Envisageons a present un écoulement parallele dans un conduit cylindrique .

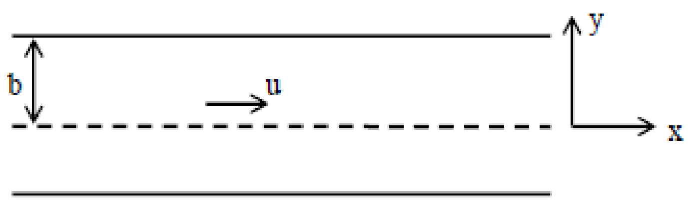
Dans cette situation , il est plus commode d'utiliser les équation de Navier Stokes écrites en coordonnées cylindriques. Nous supposons les vitesses radiale u et tangentielle v nulles.

L'écoulement est défini par :

u=0 , v=0, w=w(r,θ, t)

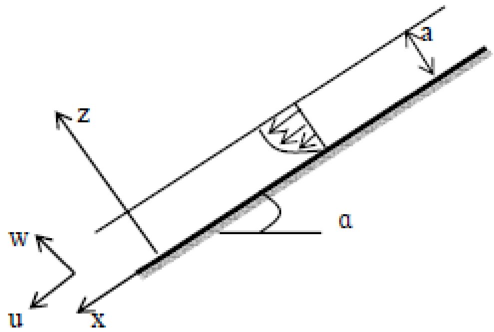
Exercice : 01) Etablir l'équation de mouvement d'un écoulement permanent d'un fluide réel incompressible se produit entre deux plaques planes lisses parallèles ?

(Ecoulement monodimensionnel suivant x).

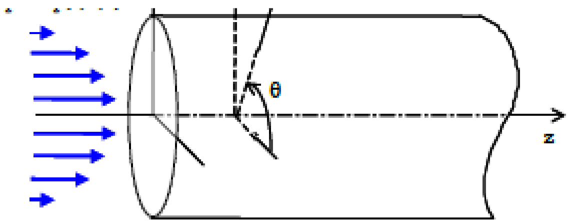


Exercice : 02) Sur une plaque plane lisse, faisant avec l'horizontal un angle α, en mouvement permanent bidimensionnel établi et sous une épaisseur à, coule sous l'effet de la pesanteur, un liquide de viscosité ν.

Etablir l’équation de Navier Stokes.



Exercice : 03) un écoulement parallèle permanent dans un conduit cylindrique rectiligne.



Etablir L’équation de quantité de mouvement en projection sur les trois axes, coordonnées cylindriques.

Exercice : 04) L’équation de ***Navier-Stokes***

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\,\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)-\rho g$$

Écrivez l'équation avec des variables sans dimension