

Chapitre

3

Écoulement de Prandtl-Meyer

3.1 Définition et analyse de l'écoulement de Prandtl-Meyer

La théorie des écoulements de Prandtl-Meyer en supersonique est utile dans les cas où il y a une détente d'un écoulement, ou bien une compression isentropique. Une détente est considérée comme isentropique en soi. Par contre, la compression s'effectue par onde de choc, phénomène entropique. Il existe pourtant une façon d'obtenir une compression pratiquement isentropique. Selon la théorie des chocs, plus la déviation de l'écoulement est faible, moins le choc oblique entraînera de pertes. À la limite, une succession de faibles déviations générerait une série d'ondes de chocs obliques dont les pertes seraient pratiquement nulles. Les angles de ces chocs ainsi que les propriétés des écoulements se calculeront alors avec la théorie de Prandtl-Meyer.

La théorie de Prandtl-Meyer sert plus souvent au calcul des ondes de détente. Contrairement à un choc oblique qui est une discontinuité, la détente est établie sur une région en forme d'éventail délimité par les lignes de Mach μ_1 et μ_2 dont les propriétés dépendent respectivement du nombre de Mach avant et après la détente.

Il y a trois paramètres permettant de déterminer une onde de détente: Mach, ν et μ . Par analogie avec les ondes de choc, ν est similaire à δ la déviation de l'écoulement. Quant à μ , il est similaire à θ , l'angle du choc, mais est appelé angle de Mach. La relation qui relie Mach et ν peut s'écrire sous deux formes, dépendamment de la variable recherchée.

$$\nu = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \operatorname{tng}^{-1} \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1} (M^2 - 1)} - \operatorname{tng}^{-1} \sqrt{M^2 - 1} \quad (3.1)$$

Equation 1 : relation Prandtl-Meyer pour ν

ν : Angle de déviation d'une onde de Prandtl-Meyer

$$M = \left\{ \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left[\operatorname{tng} \left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \left[\operatorname{tng}^{-1} \sqrt{M^2 - 1} + \nu \right] \right) \right]^2 + 1 \right\}^{1/2} \quad (3.2)$$

Équation (3.2): Relation de Prandtl-Meyer pour le nombre de Mach

Cette relation donne la valeur de déviation normalisée à 0 pour Mach 1. Il existe des abaques de ces valeurs pour différentes valeurs de Mach, ce qui est pratique étant donné que l'une des formes de cette relation est implicite.

Afin d'obtenir les propriétés de l'écoulement, il manque la relation pour la ligne de Mach ν qui a été donnée par équation (3.3) : Angle de Mach. La déviation de l'écoulement est donc la différence entre les ν pour Mach avant et après la détente.

$$\sin(\mu) = \frac{a}{v} = \frac{1}{M} \quad (3.3)$$

L'angle de Mach (μ) est un paramètre important pour les calculs d'écoulements isentropiques supersoniques et est directement lié au nombre de Mach.

Tout comme pour les ondes de choc obliques, les ondes de détentes peuvent avoir les mêmes interactions; réflexions etc. La façon de les calculer est basée sur les mêmes principes que pour les chocs.

3.2 Lignes de Mach ou ondes de Mach

Comme pour le choc droit, l'onde de choc oblique ne peut exister que si le nombre de Mach amont normal est supersonique, c'est-à-dire pour $M_1 \sin \epsilon \geq 1$. Ceci implique d'ailleurs que l'écoulement est lui-même supersonique ($M_1 \geq 1$). Dans le cas limite où $M_1 \sin \epsilon = 1$, $\delta = 0$, ce qui revient à dire que l'écoulement ne subit aucune déviation. L'onde de choc oblique est alors appelée onde de Mach. Sa direction est donnée par $\sin \epsilon = 1/M_1$, et la pression, densité, vitesse, température subissent des variations infiniment faibles au travers de cette ligne.

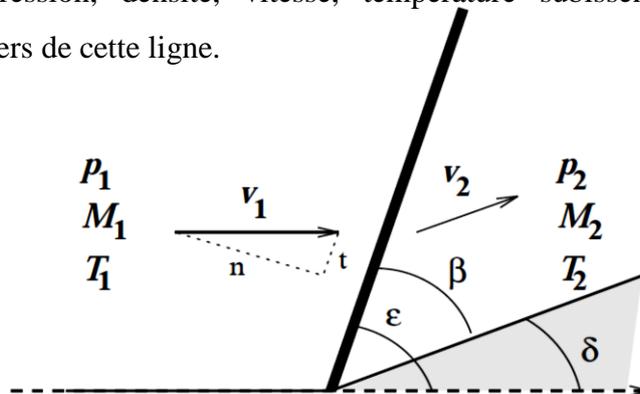


Fig. 3-1. Configuration pour bilan à travers un choc oblique

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{T_2}{T_1} = 1 \quad (3.4)$$

Nous appellerons l'angle correspondant à cette configuration angle de Mach, noté μ . Il n'existe pas d'onde de choc oblique stationnaire faisant avec l'écoulement amont un angle inférieur à μ .

$$\mu = \sin^{-1} \left(\frac{1}{M_1} \right) \quad (3.5)$$

Les lignes de Mach sont donc des lignes inclinées d'un angle $\pm\mu$ par rapport à la direction locale de l'écoulement (fig. 2).

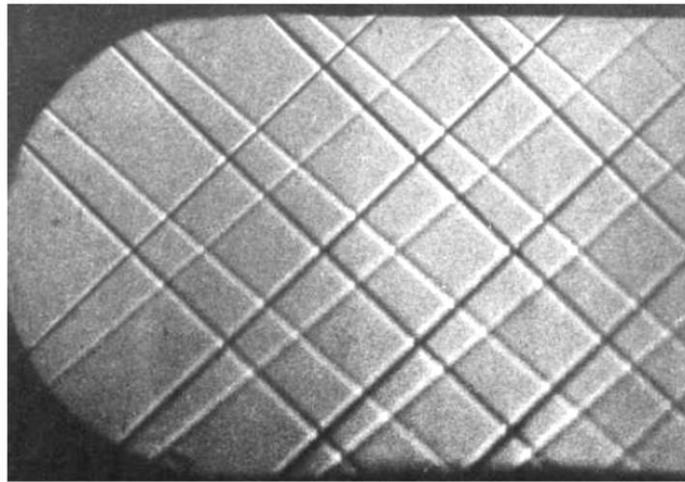


Fig. 3-2. Lignes de Mach (ondes de choc obliques extrêmement faibles) sont observées ici expérimentalement à Mach 1.5 en plaçant des morceaux de ruban adhésif sur la paroi

3.3 Processus de compression de Prandtl-Meyer

Nous avons considéré pour l'instant le cas d'un coin à partir duquel se forme un choc oblique qui comprime l'écoulement (de façon adiabatique mais absolument pas isentropique) (Fig. 3 (a)). Si nous remplaçons ce coin par une succession de segments faiblement inclinés les uns par rapport aux autres, on observe, à chaque rupture de pente, la formation d'un choc faible, avec de faibles variations de pression et de vitesse à travers ces chocs, données par les formules que l'on vient d'établir. Chaque choc faible sépare deux régions dans lesquelles les propriétés de l'écoulement sont uniformes. L'état dans la région en amont de l'un de ces chocs détermine l'état en aval de ce choc, qui lui-même détermine l'état en aval du choc faible suivant : on a donc une influence exclusive de l'amont sur l'aval, tant que la déflexion ne devient pas suffisamment grande pour que l'écoulement devienne subsonique (Fig. 3 (b)).

Si on pousse maintenant le raisonnement à sa limite infinitésimale en faisant tendre $\Delta\theta$ vers θ , les régions d'écoulement uniforme se réduisent à des lignes de Mach, sur lesquelles les propriétés de l'écoulement sont constantes et on passe continûment de l'état 1 à l'état 2, le processus de compression est isentropique (Fig. 3 (c)).

Le passage à la limite $\Delta\theta \rightarrow \theta$ se traduit au niveau de la variation de vitesse par la transformation de l'expression différentielle :

$$\frac{dw}{w} = \frac{-d\theta}{\sqrt{M^2-1}} \tag{3.6}$$

(et similairement pour la pression). Dans la formule ci-dessus, M désigne le nombre de Mach local en amont de la ligne de Mach considérée, et $d\theta$ correspond à la déflexion infinitésimale à travers cette ligne de Mach.

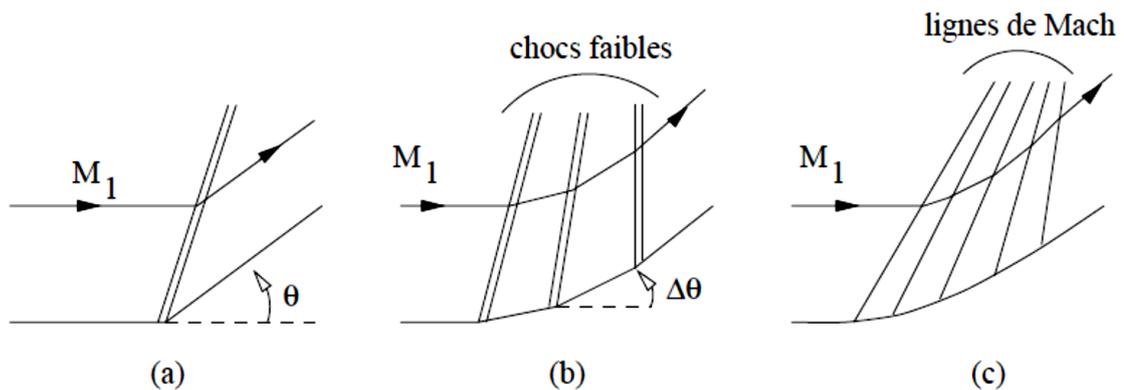
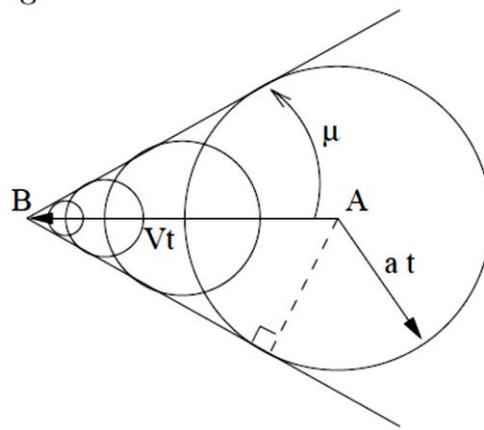


Fig. 3-3. Choc oblique à la compression isentropique.

Notion de ligne de Mach Nous revenons maintenant à la notion de ligne de Mach précédemment introduite. Imaginons une source de perturbation se propageant dans un plan à une vitesse supersonique : $V = 2a$. Cela signifie concrètement que la source de perturbation se propage 2 fois plus vite que les perturbations qu'elle crée (puisque celles-ci se déplacent à la vitesse du son a).

Supposons qu'en un temps t , la source se déplace de A vers B (en couvrant typiquement une distance unité). Quand elle arrive en B , les perturbations créées initialement en A se sont propagées de façon isotrope sur une distance $1/2$ puisque $a = V/2$; de même pour les perturbations créées en des points intermédiaires. On a donc la configuration suivante :



L'enveloppe de ces perturbations correspond à une onde : la ligne de Mach.

L'angle formé par cette ligne avec la direction de propagation est facile à calculer :

$$\sin(\mu) = \frac{a t}{V t} = \frac{1}{M} \quad (3.7)$$

Donc $\mu = \sin^{-1}\left(\frac{1}{M}\right)$ est appelé l'angle de Mach.

3.4 Processus de détente de Prandtl-Meyer

3.4.1 Description

Dans le cas d'une paroi *concave* une onde de choc se crée qui fait tourner l'écoulement vers le choc. Dans le cas d'une paroi *convexe*, la présence d'un choc oblique est *thermodynamiquement impossible*. En fait, le mécanisme que l'on vient de décrire dans le cas de la compression supersonique se produit à nouveau mais engendre le contraire d'une compression, i.e. une *détente*.

A travers chacune des lignes de Mach, on a une variation infinitésimale des grandeurs caractéristiques de l'écoulement : très petite *augmentation* de la vitesse, très petite *diminution* de la pression (le fluide se détend). Globalement, on a donc : $M_2 > M_1$ et $p_2 < p_1$. L'ensemble du processus peut être considéré comme isentropique. Dans le cas d'un coin, la détente est *centrée* sur ce coin (Fig. 4). On souhaite maintenant connaître l'état 2 derrière la détente en fonction de l'état 1 en amont de cette détente.

3.4.2 Fonction de Prandtl-Meyer

L'état 2 résulte de la superposition des variations infinitésimales correspondant à chaque ligne de Mach. La relation (3.6) établie précédemment s'applique dans le cas du processus

isentropique de détente en adoptant une convention de signe adéquate ; si on compte μ positivement dans le cas d'un coin convexe (Fig. 5).

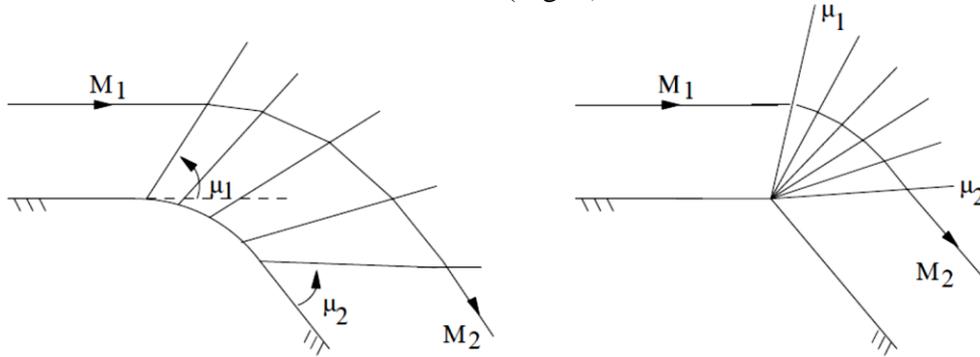


Fig. 3-4. Détente sur une paroi convexe et détente centrée sur un coin convexe.

On aura une augmentation infinitésimale de la vitesse w liée à une déflexion élémentaire $d\mu$ par la relation :

$$\frac{dw}{w} = \frac{d\theta}{\sqrt{M^2-1}}$$

On peut aussi écrire cette relation sous la forme :

$$d\theta = \sqrt{M^2-1} \frac{dw}{w}$$

Pour traiter le cas d'un angle fini μ , il faut pouvoir intégrer la relation ci-dessus, ce qui suppose que l'on puisse exprimer dw/w en fonction de dM et de M . On pourra alors intégrer entre un angle de déviation nulle correspondant à M_1 et l'angle θ associé au coin, correspondant à M_2 . Connaissant l'angle θ et M_1 nous pourrions déterminer le nombre de Mach M_2 derrière la détente. Pour y parvenir, nous cherchons donc à exprimer dw/w en fonction de M et de dM . On peut établir- la démonstration de ce résultat fait l'objet de l'exercice ci-dessous - la relation suivante :

$$d\theta = \frac{\sqrt{M^2-1}}{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2} \frac{dM}{M}$$

On note $v(M) = \int \frac{\sqrt{M^2-1}}{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2} \frac{dM}{M}$, et $v(M)$ est définie comme étant la *fonction de Prandtl-Meyer*.

En intégrant la relation ci-dessus entre l'état 1 et l'état 2 on obtient :

$$v(M_2) = \theta + v(M_1) \tag{3.8}$$

La fonction $v(M)$ peut être définie *analytiquement* - elle s'exprime à partir de fonctions du type *arctg* - ; elle est de toute façon tabulée (Annexe I de ce cours).

Connaissant M_1 , on trouve $v(M_1)$ dans la table ; connaissant l'angle θ , on peut calculer $v(M_2)$ par (8) ; connaissant $v(M_2)$ on en déduit M_2 par "lecture inverse" de la table.

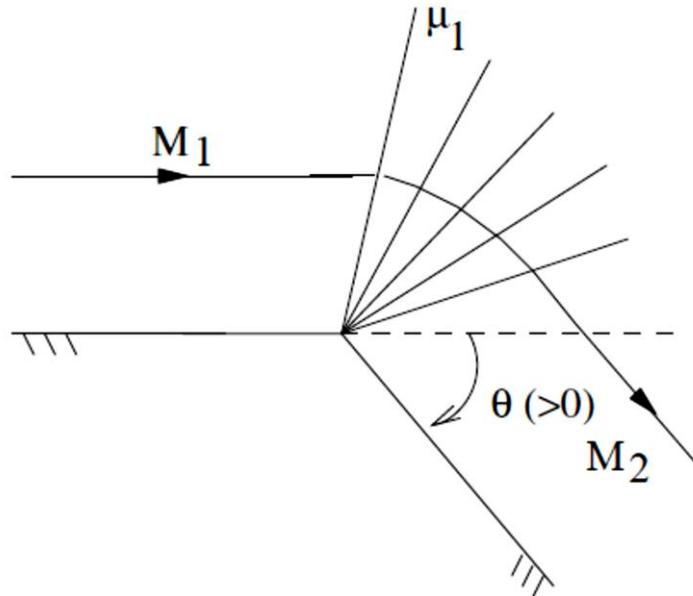


Fig. 3-5. Configuration de l'écoulement à travers une détente centrée sur un coin.

Définir complètement l'état 2 est alors très simple :

1) la température totale étant une constante de l'écoulement on a (3.10) :

$$\frac{T_0}{T_1} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \quad \text{et} \quad \frac{T_0}{T_2} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2$$

D'où

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2} \tag{3.9}$$

On note que $T_2 < T_1$: la température diminue à la traversée d'une détente.

2) La détente étant un phénomène isentropique, on peut utiliser la loi d'état et la relation

$p \rho^\gamma = C^{st}$ pour établir :

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \tag{3.10}$$

On note que $p_2 < p_1$: le fluide se détend.

Exercice : Fonction de Prandtl-Meyer * Montrer que la relation $\frac{dw}{w} = \frac{d\theta}{\sqrt{M^2-1}}$ peut se

$$\text{transformer en } d\theta = \frac{\sqrt{M^2-1}}{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2} \frac{dM}{M}$$

Solution : Pour aboutir à la relation souhaitée il est clair qu'il faut exprimer $\frac{dw}{w}$ en fonction

$$\text{de } dM \text{ et de } M. \text{ Pour ce faire, on part de : } w = aM ; \text{ on en tire : } \frac{dw}{w} = \frac{da}{a} + \frac{dM}{M}$$

On souhaite maintenant exprimer $\frac{da}{a}$ en fonction de dM et de M . On utilise :

$$\frac{a^2}{a_0^2} = \frac{T}{T_0} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{-1}$$

où $()_0$ désigne une propriété aux conditions d'arrêt. Posons pour simplifier la démarche :

$$f(M) = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2. \text{ De } \frac{a^2}{a_0^2} = \frac{1}{f(M)}, \text{ on tire facilement :}$$

$$\frac{da}{a} = -\frac{1}{2} \frac{f'(M)}{f(M)} dM$$

Donc

$$\frac{dw}{w} = \frac{2f(M) - Mf'(M)}{2f(M)} \frac{dM}{M}$$

Et on obtient la relation désirée en remplaçant $f(M)$ et $f'(M)$ par leur expression en fonction du nombre de Mach.

Annexe I. Un tableau des valeurs de la fonction de Prandtl-Meyer. Pour une valeur donnée

$$\text{de la fonction de Prandtl-Meyer } \nu(M) : \nu(M) = \int \frac{\sqrt{M^2-1}}{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2} \frac{dM}{M} =$$

$$\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} (M^2 - 1) \right) - \tan^{-1}(\sqrt{M^2 - 1})$$

Table I fournit la valeur du nombre de Mach M correspondant et de l'angle de Mach associé $\text{Sin}^{-1}(\frac{1}{M})$.

$\nu(deg)$	M	$\mu(deg)$	$\nu(deg)$	M	$\mu(deg)$	$\nu(deg)$	M	$\mu(deg)$
0.0	1.000	90.000	17.5	1.689	36.293	35.0	2.329	25.430
0.5	1.051	72.099	18.0	1.706	35.874	35.5	2.349	25.196
1.0	1.082	67.574	18.5	1.724	35.465	36.0	2.369	24.965
1.5	1.108	64.451	19.0	1.741	35.065	36.5	2.390	24.736
2.0	1.133	61.997	19.5	1.758	34.673	37.0	2.410	24.510
2.5	1.155	59.950	20.0	1.775	34.290	37.5	2.431	24.287
3.0	1.177	58.180	20.5	1.792	33.915	38.0	2.452	24.066
3.5	1.198	56.614	21.0	1.810	33.548	38.5	2.473	23.847
4.0	1.218	55.205	21.5	1.827	33.188	39.0	2.495	23.631
4.5	1.237	53.920	22.0	1.844	32.834	39.5	2.516	23.418
5.0	1.256	52.738	22.5	1.862	32.488	40.0	2.538	23.206
5.5	1.275	51.642	23.0	1.879	32.148	40.5	2.560	22.997
6.0	1.294	50.619	23.5	1.897	31.814	41.0	2.582	22.790
6.5	1.312	49.658	24.0	1.915	31.486	41.5	2.604	22.585
7.0	1.330	48.753	24.5	1.932	31.164	42.0	2.626	22.382
7.5	1.348	47.896	25.0	1.950	30.847	42.5	2.649	22.182
8.0	1.366	47.082	25.5	1.968	30.536	43.0	2.671	21.983
8.5	1.383	46.306	26.0	1.986	30.229	43.5	2.694	21.786
9.0	1.400	45.566	26.5	2.004	29.928	44.0	2.718	21.591
9.5	1.418	44.857	27.0	2.023	29.632	44.5	2.741	21.398
10.0	1.435	44.177	27.5	2.041	29.340	45.0	2.764	21.207
10.5	1.452	43.523	28.0	2.059	29.052	45.5	2.788	21.017
11.0	1.469	42.894	28.5	2.078	28.769	46.0	2.812	20.830
11.5	1.486	42.287	29.0	2.096	28.491	46.5	2.836	20.644
12.0	1.503	41.701	29.5	2.115	28.216	47.0	2.861	20.459
12.5	1.520	41.134	30.0	2.134	27.945	47.5	2.886	20.277
13.0	1.537	40.585	30.5	2.153	27.678	48.0	2.910	20.096
13.5	1.554	40.053	31.0	2.172	27.415	48.5	2.936	19.916
14.0	1.571	39.537	31.5	2.191	27.155	49.0	2.961	19.738
14.5	1.588	39.035	32.0	2.210	26.899	49.5	2.987	19.561
15.0	1.605	38.547	32.5	2.230	26.646	50.0	3.013	19.386
15.5	1.622	38.073	33.0	2.249	26.397	50.5	3.039	19.213
16.0	1.639	37.611	33.5	2.269	26.151	51.0	3.065	19.041
16.5	1.655	37.160	34.0	2.289	25.908	51.5	3.092	18.870
17.0	1.672	36.721	34.5	2.309	25.668	52.0	3.119	18.701

TABLE I - (1) Fonction de Prandtl-Meyer $\nu(M)$, nombre de Mach M et angle de Mach μ

$\nu(deg)$	M	$\mu(deg)$	$\nu(deg)$	M	$\mu(deg)$	$\nu(deg)$	M	$\mu(deg)$
52.5	3.146	18.532	70.0	4.339	13.325	87.5	6.390	9.003
53.0	3.174	18.366	70.5	4.382	13.191	88.0	6.472	8.888
53.5	3.202	18.200	71.0	4.426	13.059	88.5	6.556	8.774
54.0	3.230	18.036	71.5	4.470	12.927	89.0	6.642	8.660
54.5	3.258	17.873	72.0	4.515	12.795	89.5	6.729	8.546
55.0	3.287	17.711	72.5	4.561	12.665	90.0	6.819	8.433
55.5	3.316	17.551	73.0	4.608	12.535	90.5	6.911	8.320
56.0	3.346	17.391	73.5	4.655	12.406	91.0	7.005	8.207
56.5	3.375	17.233	74.0	4.703	12.277	91.5	7.102	8.095
57.0	3.406	17.076	74.5	4.752	12.149	92.0	7.201	7.983
57.5	3.436	16.920	75.0	4.801	12.021	92.5	7.302	7.871
58.0	3.467	16.765	75.5	4.852	11.894	93.0	7.406	7.760
58.5	3.498	16.611	76.0	4.903	11.768	93.5	7.513	7.649
59.0	3.530	16.458	76.5	4.955	11.642	94.0	7.623	7.538
59.5	3.562	16.306	77.0	5.009	11.517	94.5	7.735	7.428
60.0	3.594	16.155	77.5	5.063	11.392	95.0	7.851	7.318
60.5	3.627	16.005	78.0	5.118	11.268	95.5	7.970	7.208
61.0	3.660	15.856	78.5	5.174	11.145	96.0	8.092	7.099
61.5	3.694	15.708	79.0	5.231	11.022	96.5	8.218	6.989
62.0	3.728	15.561	79.5	5.289	10.899	97.0	8.347	6.881
62.5	3.762	15.415	80.0	5.348	10.777	97.5	8.480	6.772
63.0	3.797	15.270	80.5	5.408	10.656	98.0	8.618	6.664
63.5	3.832	15.126	81.0	5.470	10.535	98.5	8.759	6.556
64.0	3.868	14.983	81.5	5.532	10.414	99.0	8.905	6.448
64.5	3.904	14.840	82.0	5.596	10.294	99.5	9.055	6.340
65.0	3.941	14.698	82.5	5.661	10.175	100.0	9.210	6.233
65.5	3.979	14.557	83.0	5.727	10.056	100.5	9.371	6.126
66.0	4.016	14.417	83.5	5.795	9.937	101.0	9.536	6.019
66.5	4.055	14.278	84.0	5.864	9.819	101.5	9.708	5.913
67.0	4.094	14.140	84.5	5.935	9.701	102.0	9.885	5.806
67.5	4.133	14.002	85.0	6.006	9.584			
68.0	4.173	13.865	85.5	6.080	9.467			
68.5	4.214	13.729	86.0	6.155	9.350			
69.0	4.255	13.593	86.5	6.232	9.234			
69.5	4.297	13.459	87.0	6.310	9.119			

TABLE I - (2) Fonction de Prandtl-Meyer $\nu(M)$, nombre de Mach M et angle de Mach μ