Université de M'sila

Faculté de : Technologie **Socle commun**

Série de TD N° 03

Exercice 01 :

On donne les équations de mouvements suivantes :(Le temps en secondes, la distance et le déplacement en mètre).

- $x(t) = t^2 - 4t + 5$ $\quad 0 \leq t \leq 5$
- $x(t) = -t^2 + 2t + 1$ $\quad 0 \leq t \leq 2.5$
- $x(t) = 4sin(10t)$ $\quad \frac{\pi}{20} \leq t \leq \frac{3\pi}{10}$

Pour chaque équation diviser le temps en 5 intervalles égaux

1°/ *Donner le vecteur position pour la dernière seconde.*

2°/ *Quelle est la distance parcourue pendant ces 5 secondes ?*

3°/ *Donner les équations des trajectoires et les équations du mouvement ' $s(t)$' caractérisés par les équations paramétriques suivantes : (on prend $S_0 = 0$)*

- $x(t) = 3sint$; $y(t) = 3cost$
- $x(t) = acos^2t$ $\quad y(t) = asin^2t$

Exercice 02 :

Un point $M(x,y)$ suit une trajectoire d'équation : $y = 3(x+2)$ et d'équation horaire $s(t) = 2t^2$

Sachant qu'à l'instant initial $t = 0$ $x = -2$ et $y = 0$

1°/ *Donner les équations paramétriques $x(t)$; $y(t)$ du mouvement.*

2°/ *Donner l'accélération tangentielle et normale ainsi que le rayon de courbure*

Exercice 03 :

Un véhicule que l'on considère comme un point matériel qui se déplace en translation à la vitesse constante v, il rencontre un ralentisseur(dos-d'âne) dont le profil est donné par la fonction $y = f(x)$. On s'intéresse à la partie du ralentisseur,

1°/ *Déterminer le vecteur vitesse* $\vec{v}$ *en fonction de* $\dot{x}$ *et* $f'(x) = \frac{df}{dx}$.

2°/ *Déterminer le vecteur accélération. En déduire que la composante* a_y *peut se mettre sous la forme* $a_y = \frac{v^2 f''}{\left(1+f'^2\right)^2}$

3°/ *Déterminer les composantes tangentielle et normale de l'accélération. Déduire le rayon de courbure.*

Exercice 04 :

Le point M *décris un cercle de centre* O *et de rayon* R *avec une vitesse de module*

$v = \frac{v_0}{1+\alpha t}$. v_0 *et* α *sont des constantes positives*

1°/ *Etablir l'expression de l'abscisse curviligne* $s(t)$ *du point* M *sachant qu'initialement* $s(0) = 0$

2°/ *Déduire l'expression de la période* T *du mouvement de* M *en fonction du temps.*

3°/ *Déterminer les composantes normales et tangentielles de l'accélération.*

Exercice 05 :(fig.1)

Dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$,*on donne le système bielle-manivelle où la manivelle* OA *de longueur* l *est animée d'un mouvement circulaire uniforme de vitesse angulaire* ω, *entraîne une bielle* AB *de même longueur (*$AB = l$*), cette dernière entraîne à son tour un coulisseau* B.

1°/ *Quelles sont les trajectoires des points* A,B *et* M *milieu de* AB.

2°/ *Donner les expressions des vecteurs vitesses de ces points* A,B *et* M *et leurs modules.*

3°/ *Donner les expressions des vecteurs accélérations de ces points* A,B *et* M *et leurs modules.*

4°/ *Montrer que les mouvements des points* A *et* M *sont des mouvements centraux.*

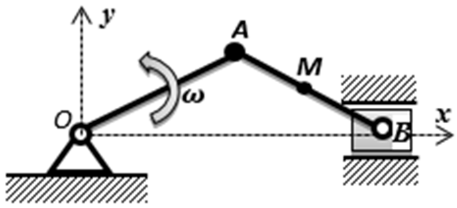


fig.1

L. Laïssaoui

Exercice 06 : (*Supplémentaire fig.2*)

Un point $\boldsymbol{M}$ se déplace sur une ellipse d'équation : $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{c^2}=\mathbf{1}.$ *La direction entre* $\overrightarrow{OM}$ *et* $\overrightarrow{ox}$ *est caractérisé par* $\boldsymbol{\varphi}$ *et les équations de mouvement sont données par* $\begin{cases} x = x_0 cos(\omega t+\varphi) \\ y = y_0 sin(\omega t+\psi) \end{cases}$

On suppose que $\boldsymbol{\omega}$ *est constante et à l'instant initial* $\boldsymbol{M}$ *se trouve à* $\boldsymbol{M_0}$ *c-à-d* $\boldsymbol{x=b}$

1°/ *Déterminer* x_0 φ *et* ψ*.En déduire* y_0

2°/ *Déterminer les composantes du vecteur vitesse dans la base cartésienne* $\vec{v}\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix}$.

3°/ *Déterminer les composantes du vecteur accélération dans la base cartésienne* $\vec{a}\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{pmatrix}$.

4°/ *Montrer que l'accélération peut se mettre sous la forme* $\vec{a}=-\alpha\overrightarrow{OM}$. $\boldsymbol{\alpha}$ *est une constante à déterminer*

Exercice 07 : (*DM*)

1°/ *Ecrire la base cartésienne* $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ *dans la base sphérique* $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\varphi)$

2°/ *Montrer que les vecteurs unitaires de la base sphérique s'écrivent comme suit :*

$\frac{d\vec{u}_r}{dt}=\vec{\Omega}\wedge\vec{u}_r$ $\quad\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}=\vec{\Omega}\wedge\vec{u}_\theta$ $\quad\frac{d\vec{u}_\varphi}{dt}=\vec{\Omega}\wedge\vec{u}_\varphi$. *Donner l'expression de* $\vec{\Omega}$

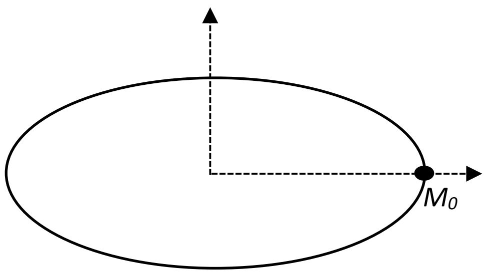


fig.2

L. Laïssaoui

Corrigé du TD n° 03 — 2020/2021

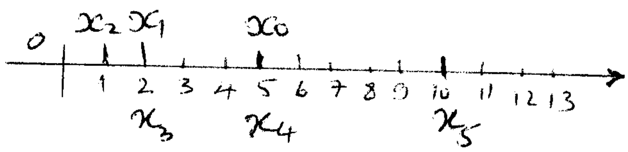
• Exercice 01

1°/ $x = t^2 - 4t + 5 \qquad 0 \le t \le 5$

– 5 intervalles égaux : $\Delta t = \frac{t_5 - t_1}{5} = 1s \qquad \Delta t = 1s$

– les positions en chaque instant : $t = [0, 1, 2, 3, 4, 5]$

$$\begin{cases} x_0 = x(0) = (0)^2 - 4(0) + 5 = 5\ m \\ x_1 = x(1) = (1)^2 - 4(1) + 5 = 2\ m \\ x_2 = x(2) = (2)^2 - 4(2) + 5 = 1\ m \\ x_3 = x(3) = (3)^2 - 4(3) + 5 = 2m \\ x_4 = x(4) = (4)^2 - 4(4) + 5 = 5\ m \\ x_5 = x(5) = (5)^2 - 4(5) + 5 = 10m \end{cases}$$



• La position finale est : $\boxed{\vec{r} = x_5 \vec{i} = 10\vec{i}}$

• La distance parcourue : $S = |x_1 - x_0| + |x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + |x_4 - x_3| + |x_5 - x_4|$

$S = |2-5| + |1-2| + |2-1| + |5-2| + |10-5|$

$\boxed{S = 13m}$

2°/ $x(t) = -t^2 + 2t + 1 \qquad 0 \le t \le 2,5$

– 5 intervalles égaux : $\Delta t = \frac{t_5 - t_1}{5} = \frac{2,5 - 0}{5} = 0,5s$

$t = [0; 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5]$

– les positions en chaque instant :

- $x_0 = x(0) = -(0)^2 + 2(0) + 1 = 1\ m$
- $x_1 = x(0,5) = -(0,5)^2 + 2(0,5) + 1 = 1,75\ m$
- $x_2 = x(1) = -(1)^2 + 2(1) + 1 = 2\ m$
- $x_2 = x(1,5) = -(1,5)^2 + 2(1,5) + 1 = 1,75\ m$
- $x_3 = x(1,5) = -(2)^2 + 2(2) + 1 = 1\ m$
- $x_4 = x(2) = -(2,5)^2 + 2(2,5) + 1 = -0,25\ m$
- $x_5 = x(2,5)$

• La position finale est : $\boxed{\vec{r} = x_5 = -\frac{1}{4}\vec{i}\ m}$

- La distance parcourue : $S = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \Delta x_4 + \Delta x_5$

$$S = |x_1 - x_0| + |x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + |x_4 - x_3| + |x_5 - x_4| = \frac{13}{4} = 3{,}25\,m$$

$$\boxed{S = 3{,}25\,m}$$

- $x(t) = 4\sin(10t)$ $\qquad \frac{\pi}{20} \leq t \leq \frac{3\pi}{10}$

- 5 intervalles égaux : $\Delta t = \frac{x_5 - x_1}{5} = \frac{\pi}{20}\,s$

$t = [\pi/20 ; \frac{\pi}{10}, \frac{3\pi}{20}, \frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{10}]$

- Les positions à chaque instant.

~~$x_0 = x(0) = 4\sin(10 \cdot 0) = 0\,m$~~

$$\begin{cases} x_0 = x(\pi/20) = 4\sin(10 \cdot \pi/20) = 4\,m \\ x_1 = x(\pi/10) = 4\sin(\pi) = 0\,m \\ x_2 = x(3\pi/20) = 4\sin\left(10 \cdot \frac{3\pi}{20}\right) = -4\,m \\ x_3 = x(\pi/5) = 4\sin(10\,\pi/5) = 0\,m \\ x_4 = x(\pi/4) = 4\sin(5\pi/2) = 4\,m \\ x_5 = x\left(\frac{3\pi}{10}\right) = 4\sin\left(10 \cdot \frac{3\pi}{10}\right) = 0\,m \end{cases}$$

- La position finale, $\boxed{\vec{r} = \vec{0}}$
- La distance parcourue, $S = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| + |\Delta x_3| + |\Delta x_4| + |\Delta x_5|$

$|\Delta x_1| = |x_1 - x_0| = 4$; $|\Delta x_2| = |x_2 - x_1| = 4\,m$

$|\Delta x_3| = |x_3 - x_2| = 4$; $|\Delta x_4| = |x_4 - x_3| = 4$

$|\Delta x_5| = |x_5 - x_4| = 4 \Rightarrow \boxed{S = 20\,m}$

3°/

$$\begin{cases} x = 3\sin t \\ y = 3\cos t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 9\sin^2 t \\ y^2 = 9\cos^2 t \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 9(\underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}_{1})$$

$\Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 = 9}$ c'est une équation d'un cercle de centre $C(0,0)$; de rayon $R = 3$

- Equation du mouvement, $s(t)$:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad \text{or} \quad \begin{cases} dx = 3\cos t \, dt \\ dy = -3\sin t \, dt \end{cases}$$

$$\Rightarrow dx^2 + dy^2 = 3^2(\cos^2 t + \sin^2 t)(dt)^2 = (3\,dt)^2$$

$$\Rightarrow ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = 3\,dt \Rightarrow \int_{S_0=0}^{S} dS = \int_{t_0=0}^{t} 3\,dt$$

$$\Rightarrow S\Big|_{S_0=0}^{S} = 3t\Big|_{t_0=0}^{t} \Rightarrow \boxed{S = 3t}$$

$$* \begin{cases} x = a\cos^2 t \\ y = a\sin^2 t \end{cases} \Rightarrow x + y = a(\cos^2 t + \sin^2 t) = a$$

$$\Rightarrow \boxed{x + y = a}$$ c'est l'équation d'une droite

- Equation du mouvement, $s(t)$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad \begin{cases} x = a\cos^2 t \\ y = a\sin^2 t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = -2a\sin t\cos t \, dt \\ dy = 2a\cos t\sin t \, dt \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{dx^2 + dy^2} = ds = \sqrt{(4a^2\sin^2 t\cos^2 t + 4a^2\sin^2 t\cos^2 t)\,dt^2}$$

$$ds = \sqrt{2}\,a \cdot \underbrace{2\sin t\cos t}_{\sin 2t}\,dt \Rightarrow \boxed{ds = \sqrt{2}a\sin t}$$

* **Exercice: 02** : trajectoire d'équation: $y = 3(x+2)$

l'équation horaire $s(t) = 2t^2$

à $t = 0 \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$ $x(t) = ?$ $y(t) = ?$

on a, $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \Rightarrow ds = \sqrt{dx^2\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$

puisque : $y = 3(x+2) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3$

$$\Rightarrow ds = \sqrt{1+3^2}\, dx = \sqrt{10}\, dx$$

$$\int_{s_0}^{s} ds = \int_{x_0}^{x} \sqrt{10} \Rightarrow s\Big|_{s_0=0}^{s} = \sqrt{10}\, x\Big|_{x_0=-2}^{x} \Rightarrow \boxed{x(t) = \sqrt{\tfrac{2}{5}}\, t^2 - 2}$$

$$y = 3(x+2) = 3\left(\sqrt{\tfrac{2}{5}}\, t^2 - 2 + 2\right) \Rightarrow \boxed{y(t) = 3\sqrt{2/5}\, t^2}$$

2°/ $\vec{OM} = \begin{cases} x(t) = \sqrt{2/5}\, t^2 - 2 \\ y(t) = 3\sqrt{2/5}\, t^2 \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \begin{cases} \dot{x}(t) = 2\sqrt{2/5}\, t \\ \dot{y}(t) = 6\sqrt{2/5}\, t \end{cases}$

$\vec{v} \begin{cases} \dot{x} = 2\sqrt{2/5}\, t = v_x \\ \dot{y} = 6\sqrt{2/5}\, t = v_y \end{cases}$, $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \Rightarrow \boxed{v = |\vec{v}| = 4t\, m/s}$

$$\boxed{v = 4t\ m/s}$$

$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} : \begin{cases} a_x = \ddot{x}(t) = 2 \cdot \sqrt{2/5} \\ a_y = \ddot{y}(t) = 6\sqrt{2/5} \end{cases}$ $|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 4\ m/s^2$

$$\boxed{|\vec{a}| = a = 4\ m/s^2}$$

or $\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$: dans le repère cartesien
$\vec{a} = \vec{a}_N + \vec{a}_T$, dans le repère intrinsèque

$\Rightarrow |\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{a_T^2 + a_N^2}$ ou $a_T = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{dv}{dt}$

$a_N = v^2/R \leftarrow$ rayon de Courbure

a_T : accélération tangentielle.

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(4t) = 4$$

$$a_N = v^2/R = \sqrt{a^2 - a_T^2} = \sqrt{4^2 - 4^2} = 0 \qquad \boxed{a_N = 0}$$

$a_N = 0 \Rightarrow R \to \infty$:

ou bien puisque $y = (3x+2)$; est une droite $\Rightarrow R \to \infty$

* **Exercice 03 :** $y = f(x)$

$\vec{OM} = \begin{cases} x(t) \\ y(t) = f(x) \end{cases}$ 1°/ $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \begin{cases} \dot{x} \\ \dot{y} = \frac{df}{dt} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \dot{x} f'(x) \end{cases}$

$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ et $f'(x) = \frac{dy}{dt} = \frac{df}{dx}$

$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} = \dot{x}(\vec{i} + f'\vec{j})$

$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\dot{x}^2(1+f'^2)}$

2°/ $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dy} = \begin{cases} \ddot{x} = \\ \ddot{y} = \frac{d}{dt}(\dot{x} f'(x)) = \ddot{x} f'(x) + \dot{x}^2 f'' \end{cases}$

$f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{df'}{dx}$ $\vec{a} \begin{cases} a_x = \ddot{x} \\ a_y = \ddot{y} = \ddot{x} f' + \dot{x}^2 f'' \end{cases}$

la Composante de $\vec{a}$ suivant $\vec{Oy}$ est a_y ;

on a : $v^2 = \dot{x}^2(1+f'^2) \Rightarrow \dot{x}^2 = \frac{v^2}{1+f'^2}$

$\frac{d\dot{x}^2}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{1+f'^2}\right) \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{v^2 f' f''}{(1+f'^2)^2}$

or $a_y = \ddot{x} f' + \dot{x}^2 f'' = f'\left[\frac{-v^2 f' f''}{(1+f'^2)^2}\right] + \left(\frac{v^2 f''}{1+f'^2}\right)$

$$\boxed{a_y = \frac{v^2 f''}{(1+f'^2)^2}}$$

3°/ $a_T = ?$ $a_N = ?$ $R = ?$

$a_x = \ddot{x}$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + (\ddot{x}f' + \dot{x}^2 f'')^2}$$

or $\ddot{x} = -\dfrac{v^2 f' f''}{(1+f'^2)^2}$

$a_y = \dfrac{v^2 f''}{(1+f'^2)^2}$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{v^2 f''}{(1+f'^2)^{3/2}}}$$

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2}$$

a_T : l'accélération tangentielle

$$a_T = \frac{dv}{dt}$$

a_N : accélération normale

$$a_N = v^2/R$$

R : rayon de courbure.

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}(1+f'^2)\right)^{1/2} = \frac{\ddot{x}(1+f'^2)^{1/2} + \dot{x}^2 f' f''}{\sqrt{1+f'^2}}$$

avec $\dot{x}^2 = \dfrac{v^2}{(1+f'^2)}$

$$\Rightarrow \boxed{a_T = 0} \Rightarrow a = a_N = \frac{v^2 f''}{(1+f'^2)^{3/2}}$$

$$a_N = \frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{v^2}{a_N} = \frac{\cancel{v^2}\sqrt{(1+f'^2)^3}}{\cancel{v^2} f''}$$

$$\boxed{R = \frac{(1+f'^2)^{3/2}}{f''}}$$

* **Exercice 04 :** $v = \dfrac{v_0}{1+\alpha t}$ $(v, \alpha) > 0$

1°/ $s(t) = ?$: $v = \dfrac{ds}{dt} \Rightarrow ds = v\,dt \Rightarrow \int_{s_0}^{s} ds = \int_{t_0=0}^{t} v\,dt$

$$\Rightarrow s\Big|_{s_0}^{s} = \int_{t_0=0}^{t} \frac{v_0\,dt}{1+\alpha t} = \frac{v_0}{\alpha} \ln(1+\alpha t)\Big|_{t=0}^{t}$$

$s_0 = 0$

$$\boxed{s(t) = \frac{v_0}{\alpha} \ln(1+\alpha t)}$$

2°/ Periode $T = ?$ le mobile décrit un mouvement circulaire qui parcours le perimètre $S = 2\pi R$ pendant le temp "T" qui est la periode de ce mouvement.

$$S(T) = \frac{v_0}{\alpha} \ln(1+\alpha T) = 2\pi R \Rightarrow \boxed{T = \left(e^{\frac{2\pi R\alpha}{v_0}} - 1\right)}$$

3°/ $a_N = ?$ $a_T = ?$

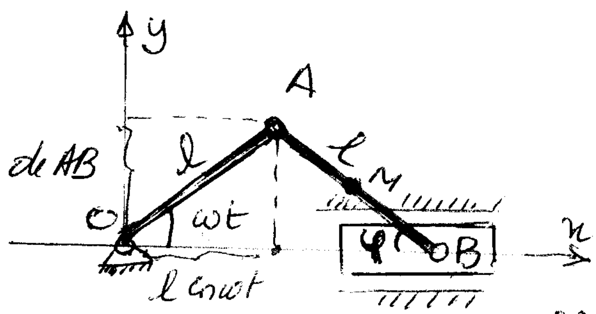
$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{v_0}{1+\alpha t}\right) = \frac{-\alpha v_0}{(1+\alpha t)^2}$$

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{v_0^2/(1+\alpha t)^2}{R} = \frac{v_0^2}{R(1+\alpha t)^2}$$

$$\boxed{a_T = -\frac{\alpha v_0}{(1+\alpha t)^2}}$$

$$\boxed{a_N = \frac{v_0^2}{R(1+\alpha t)^2}}$$

* **Exercice 05**



1°/ Trajectoires de "A", "B", "M" milieu de AB

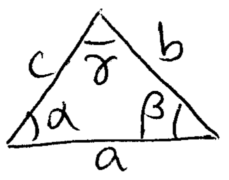
- Trajectoire de A :

$$\text{"A"} : \begin{cases} x_A = l \cos \omega t \\ y_A = l \sin \omega t \end{cases} \Rightarrow x_A^2 + y_A^2 = l^2(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t) = l^2$$

A$_1$ execute un mouvement circulaire

• Trajectoire du point "B" : B : $\begin{cases} x_A = l\cos\omega t + AB\cos\varphi \\ y_B = 0 \end{cases}$

on applique la règle des sinus

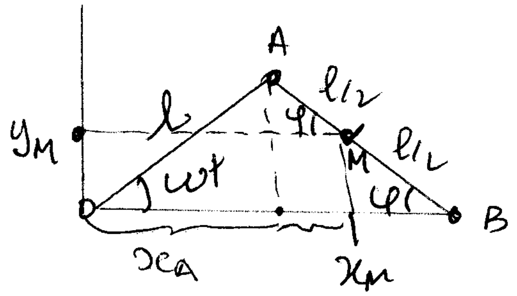


$\frac{\sin\alpha}{b} = \frac{\sin\beta}{c} = \frac{\sin\gamma}{a}$: on trouve $\omega t = \varphi$ et on a $AB = l$

$\Rightarrow x_A = l\cos\omega t + AB\cos\varphi = l\cos\omega t + l\cos\omega t = 2l\cos\omega t$

B : $\begin{cases} x_A = 2l\cos\omega t \\ y = A \end{cases}$ $\Rightarrow$ B execute un m^{vt} rectiligne (enligne droite)

• Point M : milieu de AB : M : $\begin{cases} x_M = x_A + \frac{AB}{2}\cos\varphi \\ y_M = \frac{AB}{2}\sin\varphi \end{cases}$



puisque : $AB = l$, $\varphi = \omega t$

$\Rightarrow \begin{cases} x_M = l\cos\omega t + \frac{l}{2}\cos\omega t = \frac{3}{2}l\cos\omega t \\ y_M = \frac{l}{2}\sin\omega t = l/_2\sin\omega t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{\frac{3l}{2}} = \cos\omega t \\ \frac{y}{l/2} = \sin\omega t \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{x^2}{(3l/2)^2} = \cos^2\omega t \\ \frac{y^2}{(l/2)^2} = \sin^2\omega t \end{cases} \Rightarrow \frac{x_M^2}{(3l/2)^2} + \frac{y_M^2}{(l/2)^2} = \cos^2\omega t + \sin^2\omega t = 1$

$\Rightarrow \boxed{\frac{x_M^2}{(3l/2)^2} + \frac{y_M^2}{(l/2)^2} = 1}$ "M" execute un mouvement elliptique (c'est une ellipse)

$$2°/ \ (\vec{v}_A, v_A) = ? \qquad \vec{v}_A = \frac{d\vec{OA}}{dt} = \begin{cases} \frac{dx_A}{dt} = \frac{d}{dt}(l\cos\omega t) = \dot{x}_A \\ \frac{dy_A}{dt} = \frac{d}{dt}(l\sin\omega t) = \dot{y}_A \end{cases} \quad 9$$

$$\Rightarrow \vec{v}_A = \begin{cases} \dot{x}_A = -\omega l \sin\omega t \\ \dot{y}_A = \omega l \cos\omega t \end{cases} \qquad \vec{v} = \dot{x}_A \vec{i} + \dot{y}_A \vec{j}$$

$$\boxed{\vec{v} = \omega l(-\sin\omega t\,\vec{i} + \cos\omega t\,\vec{j})}$$

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} \qquad \begin{cases} v_x = \dot{x}_A \\ v_y = \dot{y}_A \end{cases} \qquad |\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$v = \sqrt{\omega^2 l^2 \cos^2\omega t + \omega^2 l^2 \sin^2\omega t} = \sqrt{\omega^2 l^2 (\underbrace{\cos^2\omega t + \sin^2\omega t}_{1})}$$

$$\boxed{v = |\vec{v}| = \omega l}$$

- $(\vec{v}_B, v_B)$ $\quad B: \begin{cases} x_B = 2l\cos\omega t \\ y_B = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_B: \begin{cases} \frac{dx_B}{dt} = -2l\omega\sin\omega t = \dot{x}_B \\ \frac{dy_B}{dt} = 0 = \dot{y}_B \end{cases}$

$$\boxed{\vec{v} = \dot{x}_B \vec{i} + \dot{y}_B \vec{j} = -2l\omega \sin\omega t\, \vec{i}} \qquad \vec{v}_B: \begin{cases} \dot{x}_B = v_{xB} \\ \dot{y}_B = v_{yB} \end{cases}$$

$$|\vec{v}_B| = v_B = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{4 l^2 \omega^2 \sin^2\omega t}$$

$$\boxed{v_B = 2l \sin\omega t} \quad \text{ou bien } \vec{v} = |\vec{v}|\vec{u}_v = -2l\omega\sin\omega t\,\vec{i}$$

$$\Rightarrow |\vec{v}| = 2l\omega\sin\omega t$$

- $(\vec{v}_M, \vec{v}_M)$, $\quad M: \begin{cases} x_M = 3l/2 \cos\omega t \\ y_M = l/2 \sin\omega t \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_M = \begin{cases} \dot{x}_M = \frac{dx_M}{dt} \\ \dot{y}_M = \frac{dy_M}{dt} \end{cases}$

$$\vec{v}_M = \begin{cases} \dot{x}_M = -3l\omega/2 \sin\omega t \\ \dot{y}_M = l\omega/2 \cos\omega t \end{cases} \qquad \boxed{\vec{v}_M = \frac{l\omega}{2}(-3\sin\omega t\,\vec{i} + \cos\omega t\,\vec{j})}$$

$$|\vec{v}_M| = v_M = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{l\omega}{2}\right)^2 (9\sin^2\omega t + \cos^2\omega t)}$$

$$v_M = \sqrt{\left(\frac{l\omega}{2}\right)^2 (8\sin^2\omega t + \underbrace{\sin^2\omega t + \cos^2\omega t}_{1})} = \frac{l\omega}{2}\sqrt{1 + 8\sin^2\omega t}$$

$$\boxed{v_M = \frac{l\omega}{2}(1 + 8\sin^2\omega t)^{1/2}}$$

3°/ $(\vec{a}_A, |\vec{a}_A| = a_A)$ $\quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}$

• A : $\begin{cases} \dot{x}_A = -l\omega \sin\omega t \\ \dot{y}_A = l\omega \cos\omega t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_A = a_{xA} = -l\omega^2 \cos\omega t \\ \ddot{y} = a_{yA} = -l\omega^2 \sin\omega t \end{cases}$

$$\boxed{\vec{a}_A = a_{xA}\vec{i} + a_{yA}\vec{j} = -l\omega^2(\cos\omega t\,\vec{i} + \sin\omega t\,\vec{j})} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$$

$$|\vec{a}_A| = a_A = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(l\omega^2)^2(\underbrace{\cos^2\omega t + \sin^2\omega t}_{1})} = l\omega^2$$

$$\boxed{a_A = l\omega^2}$$

• B $\begin{cases} \dot{x}_B = -2l\omega \sin\omega t \\ \dot{y}_B = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{a} \begin{cases} \ddot{x}_B = -2l\omega^2 \cos\omega t = a_x \\ \ddot{y}_B = 0 = a_y \end{cases}$

$$\boxed{\vec{a}_B = -2l\omega^2 \cos\omega t\,\vec{i}} \qquad \vec{a} = |\vec{a}|\,\vec{u}_B \Rightarrow |\vec{a}| = 2l\omega^2$$

$$\boxed{a_B = 2l\omega^2}$$

• M : $\begin{cases} \dot{x}_M = -3\omega l/2 \sin\omega t \\ \dot{y}_M = l\omega/2 \cos\omega t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_M = \frac{d\dot{x}_M}{dt} = -3\omega^2 l/2 \cos\omega t = a_{xM} \\ \ddot{y}_M = \frac{d\dot{y}_M}{dt} = -\omega^2 l/2 \sin\omega t = a_{yM} \end{cases}$

$$\boxed{\vec{a}_M = a_{xM}\vec{i} + a_{yM}\vec{j} = -\frac{\omega^2 l}{2}(3\cos\omega t\,\vec{i} + \sin\omega t\,\vec{j})}$$

$$|\vec{a}_M| = a_M = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{\left(\frac{\omega^2 l}{2}\right)^2(9\cos^2\omega t + \sin^2\omega t)} = \frac{\omega^2 l}{2}\sqrt{1 + 8\cos^2\omega t}$$

$$\boxed{a_M = \omega^2 l/2\,(1 + 8\cos^2\omega t)^{1/2}}$$

4°/ Pour que le m^{vt} soit central il faut que son accélération st ~~oriente~~ toujours orientée vers un centre

A : $\vec{OA} = x_A\vec{i} + y_A\vec{j} = l(\cos\omega t\,\vec{i} + \sin\omega t\,\vec{j})$
$\vec{a}_A = -l\omega^2(\cos\omega t\,\vec{i} + \sin\omega t\,\vec{j})$ $\quad \boxed{\vec{OA} = -\omega^2 a_A}$

m : $\vec{OM} = x_M\vec{i} + y_M\vec{j} = \frac{3}{2}l\cos\omega t\,\vec{i} + \frac{l}{2}\sin\omega t\,\vec{j}$
$\vec{a}_M = -\omega^2\left(\frac{3l}{2}\cos\omega t\,\vec{i} + \frac{l}{2}\sin\omega t\,\vec{j}\right)$ $\quad \vec{OM} = -\omega^2 \vec{a}_M$

$\Rightarrow \vec{a}_A = -\frac{\vec{OA}}{\omega^2}, \quad \vec{a}_M = -\vec{OM}/\omega^2$