

# **CHAPITRE 3 : Similitude dynamique des écoulements de fluides**

## 1 Ecoulements semblables

Lorsqu'un système est trop complexe pour permettre la résolution complète des équations fondamentales, ou que son comportement est chaotique, l'analyse dimensionnelle offre une méthode simple pour établir des relations entre les différentes grandeurs caractérisant ce système. En regroupant ces différentes grandeurs en nombres sans dimension, il devient possible de trouver des similitudes entre le comportement de systèmes similaires mais différents (comme un prototype et une maquette).

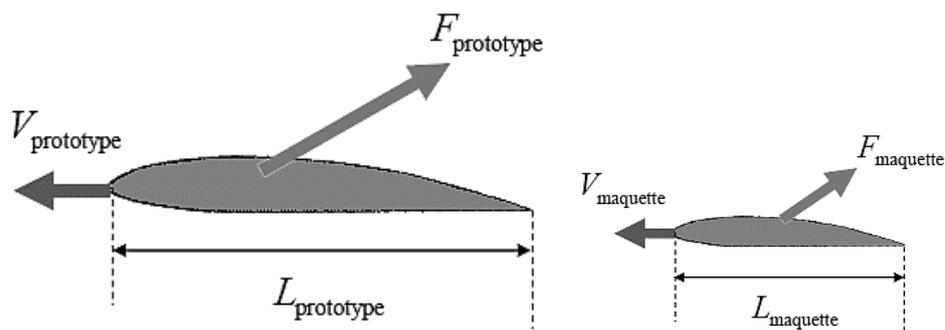
### 2. Ecoulements similaires prototype-modèle réduits

#### 2. a) Le prototype

Le prototype est le modèle en grandeur réelle

#### 2. b) La maquette

La maquette est un modèle réduit (parfois plus grand) du prototype. Elle est beaucoup moins coûteuse que le prototype. Elle se prête à une étude plus facile et à des modifications moins onéreuses.



*Prototype et maquette*

## Les essais sur une maquette

Les essais sur une maquette permettent :

- De vérifier les calculs.
- De trouver des solutions que les théories actuelles sont incapables de fournir.

Pour tout système, les résultats des mesures expérimentales sur le modèle ne peuvent être transposés au prototype que si les données définissant les problèmes posés satisfont à un certain nombre de relations. Ce sont les conditions de similitude mécanique :

1. **Similitude géométrique** : Les dimensions linéaires du modèle et du prototype doivent être proportionnelles.
2. **Similitude cinématique**: Les trajectoires des particules et les échelles de temps doivent être proportionnelles entre le modèle et le prototype.
3. **Similitude dynamique**: Les forces dans le modèle et le prototype doivent être proportionnelles.

Ces conditions assurent que le comportement observé dans le modèle est représentatif de celui du prototype, permettant ainsi une extrapolation fiable des résultats obtenus lors des essais sur maquette.

### le théorème de Vaschy-Buckingham

En mathématiques, le théorème de Vaschy-Buckingham ou théorème Pi, est un des théorèmes de base de l'analyse dimensionnelle. Ce théorème établit que si une équation physique met en jeu  $n$  variables physiques, celles-ci dépendant de  $k$  unités fondamentales, alors il existe une équation équivalente mettant en jeu  $n - k$  variables sans dimension construites à partir des variables originelles.

Bien que nommé d'après les physiciens Aimé Vaschy et Edgar Buckingham, ce théorème a d'abord été démontré par le mathématicien français Joseph Bertrand<sup>3</sup> en 1878.

### 3. Exemples de similitude de Reynolds et de Froude

#### 3.1 Le nombre de Reynolds :

Le nombre de Reynolds est défini comme  $Re = \rho u L / \mu$

avec  $L$  une échelle de longueur,  $u$  une échelle de vitesse,  $\mu$  la viscosité du fluide, et  $\rho$  sa masse volumique. Le nombre de Reynolds est le plus souvent interprète comme

Le rapport des forces d'inertie sur les forces de viscosité. Il sert notamment à classer

le régime d'écoulement en distinguant :

- les écoulements laminaires ( $Re \ll 1$ ) ;
- les écoulements turbulents ( $Re \gg 1$ ).

Si on introduit  $\nu$  la viscosité cinématique du fluide , alors on a aussi :  $Re = uL/\nu$ .

#### 3.2 Le nombre de Froude

Le nombre de Froude est défini comme

$$Fr = u/\sqrt{gh},$$

Avec  $h$  une échelle de hauteur,  $u$  une échelle de vitesse,  $g$  l'accélération de la gravité.

Le nombre de Froude est le plus souvent interprète comme le rapport de l'énergie cinétique sur l'énergie potentielle. Il sert notamment en hydraulique à classer le régime d'écoulement en distinguant :

- $Fr > 1$  les écoulements supercritiques (appelées aussi torrentiels) ;
- $Fr < 1$  : les écoulements subcritiques (appelées aussi fluviaux)

#### 4. Analyse dimensionnelle

L'analyse dimensionnelle a pour rôle de mettre en évidence l'importance des unités en sciences physiques, fournissant un cadre précis à toutes les formules littérales. Elle propose des méthodes pour sélectionner les grandeurs appropriées et les présenter correctement. En tant qu'outil théorique, l'analyse dimensionnelle permet d'interpréter les problèmes en tenant compte des dimensions des grandeurs physiques impliquées. Lors de l'établissement d'une expression, elle permet de vérifier son homogénéité et de la corriger si nécessaire, car une expression non homogène est nécessairement incorrecte. C'est une technique très utile dans tous les domaines expérimentaux de l'ingénierie. En identifiant les grandeurs impliquées dans un phénomène physique, l'analyse dimensionnelle peut fournir une équation reliant toutes les grandeurs physiques impliquées, c'est ce qu'on appelle la modélisation.

Dimensions, unités et système international

Les grandeurs physiques qui décrivent un phénomène sont caractérisées par leurs dimensions. Une grandeur peut avoir la dimension d'une longueur, d'une énergie, d'une masse, d'une vitesse, etc. La notion de dimension est très générale et n'implique aucun choix particulier d'unité. Le système international, noté SI ou MKSA pour Mètre, Kilogramme, Seconde, Ampère, compte sept unités de base (voir Table 3.1) destinées à quantifier des grandeurs physiques indépendantes. Chaque unité a un symbole.

La dimension est la grandeur physique associée à une grandeur physique indépendamment de l'unité utilisée pour la mesure de cette grandeur. Ainsi :

- la dimension longueur sera notée (L) et son unité sera le mètre (m) ;
- la dimension masse sera notée (M) et son unité sera le kilogramme (kg) ;
- la dimension temps sera notée (T) et son unité sera la seconde (s).

On dit que deux grandeurs physiques sont homogènes si elles ont la même dimension. Il ne faut pas confondre dimension et unité. En effet, une grandeur physique a une et une seule dimension, mais elle peut être exprimée dans plusieurs systèmes d'unités différents.

## Les dimensions de référence

Il est crucial de déterminer combien de dimensions de référence sont nécessaires pour décrire les variables. Comme nous l'avons vu dans le paragraphe 3.2, F (force), L (longueur), et T (temps) constituent un ensemble pratique de dimensions de base pour caractériser les grandeurs mécaniques. Cependant, il n'y a rien de fondamentalement unique à propos de cet ensemble. En effet, M (masse), L (longueur), et T (temps) conviennent également. En réalité, tout ensemble de quantités mesurables peut être utilisé comme dimensions de base, à condition que la combinaison sélectionnée permette de décrire toutes les quantités secondaires. Toutefois, l'utilisation de FLT ou MLT comme dimensions de base est la plus simple, et ces dimensions peuvent être utilisées pour décrire des phénomènes de mécanique des fluides.

Dans le tableau ci-dessous, nous présentons les dimensions (en MLT et en FLT) et les unités SI de certaines grandeurs physiques courantes en mécanique des fluides.

### Grandeur physique Dimension (MLT) Dimension (FLT) Unité SI

Longueur	L	L	m
Masse	M	$F \cdot T^2/L$	kg
Temps	T	T	s
Force	$M \cdot L/T^2$	F	N
Vitesse	L/T	L/T	m/s
Accélération	$L/T^2$	$L/T^2$	$m/s^2$
Énergie	$M \cdot L^2/T^2$	$F \cdot L$	J
Puissance	$M \cdot L^2/T^3$	$F \cdot L/T$	W

Ce tableau illustre comment les différentes grandeurs physiques peuvent être exprimées en utilisant les dimensions de base M, L, T (ou F, L, T) et leurs unités correspondantes dans le système international (SI).