Chapitre 6

Cinématique des milieux continus :

1) Cinématique:

Il s'agit de l'étude des fluide en mouvement: on s'attachera à faire une description des écoulements sons avoir recours au calcul des force mises enjeu:

1.1 Définitions:

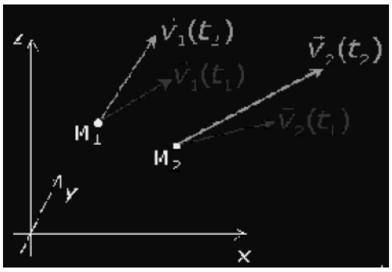
1.1.1 : la particule fluide:

- la particule fluide est choisie comme entité élémentaire permettant une description complète des écoulements:
- il s'agit d'un "paquet" des molécules entourant un point M donné; celles - ci sont alors supposées avoir toutes la même vitesse au même instant.

2: Description d'Euler et de Lagrange:

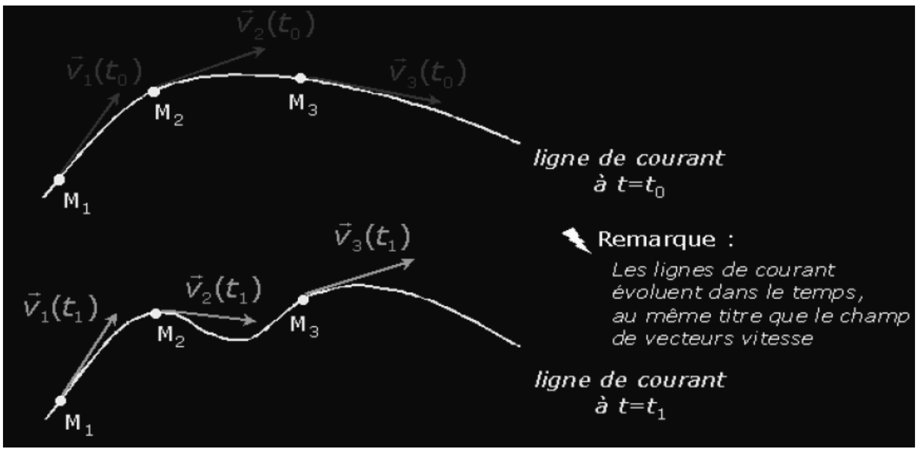
2.1- Description d'Euler:

Cette Description de l'écoulement consiste à établir à un instant **t** donne l'ensemble des vitesses associées à chaque point de l'espace occupé par le fluide:



- la vitesse $\vec{V}_m(t)$ associée au point **m** évalue au cours du temps.
- A chaque instant **t**, l'écoulement du fluide est décrit au moyen d'un champ de vecteur vitesse.

Dans cette description d'Euler, on appelle "**ligne de courant**" la courbe qui, en chaque de ses points, est tangente aux vecteurs vitesse.

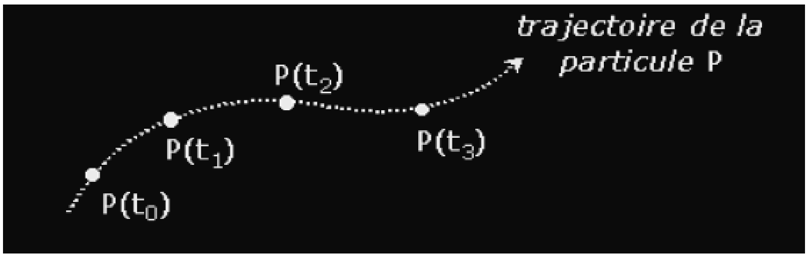


Description des Lagrange:

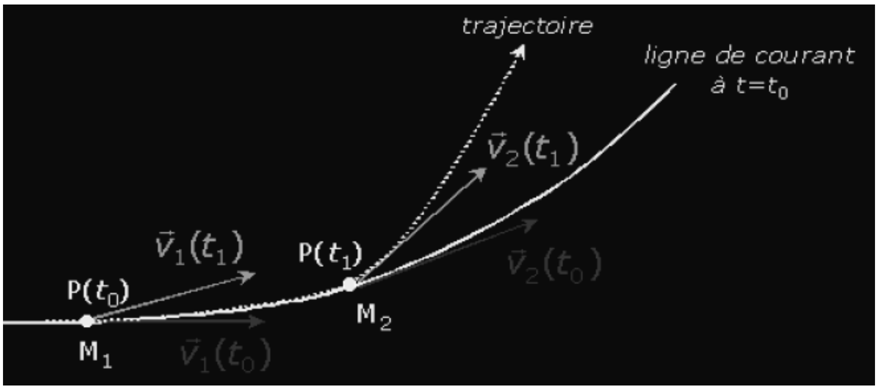
Cette Description de l'écoulement consiste à suivre une particule donnée au cours de son mouvement au sein du fluide.

Ici, c'est l'évaluation de la position des particules qui permet la description de l'écoulement.

Ainsi, le lieu géométrique des positions successives occupées par une particule constitue ce qu'on appelle la "**trajectoire**" de cette particule.



-il ne fait pas confondre ligne de courant et trajectoire. Ce sont deux notions bien différentes.

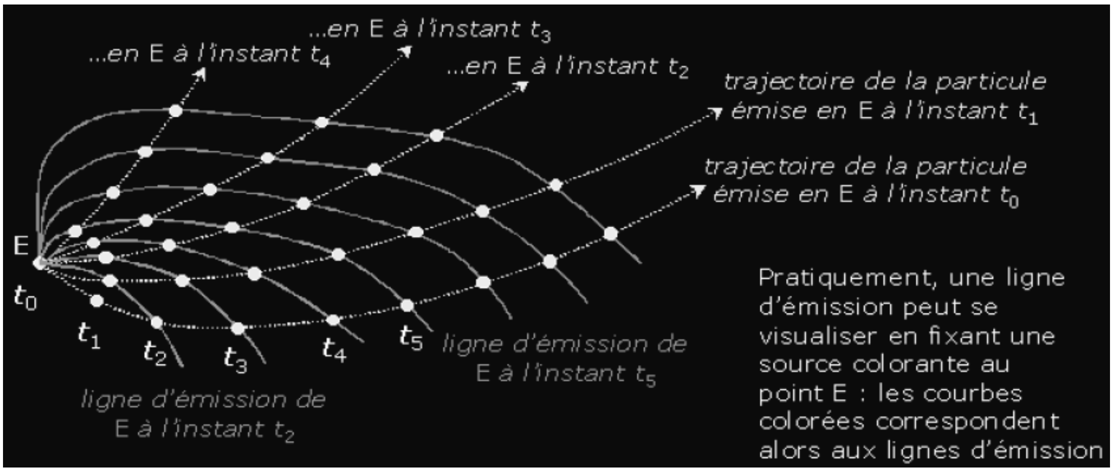


Remarque:

Si l'écoulement est stationnaire, le champ de vecteurs vitesse est constant dans le temps: il ya coïncidence entre lignes de courant et trajectoires.

c: ligne d'émission:

Touts les partielles qui sont passées par un même point E sont situées, à l'instant **t**, sur une courbe appelée "ligne d'émission"



d: écoulement permanent:

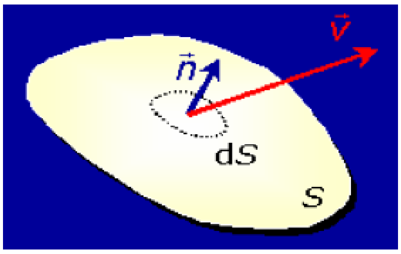
Un écoulement est dit permanent (ou stationnaire) lorsque le champ de vecteurs vitesse est statique: il ne varie pas dans le temps.

Dans ce cas:

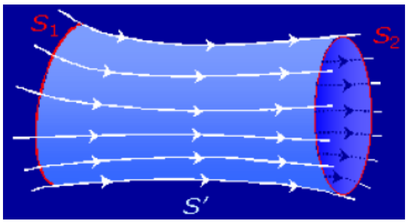
- les lignes de courant sont fixes dans l'espace.
- les trajectoires coïncident avec les lignes des courant.
- les linges d'émission coïncident également avec les lignes de courant.

Lignes de courant ≡ trajectoire ≡ ligne d'émission

Débit:



- A travers la surface S, le débit massique de fluide est donne par: $q_m = \int_s \rho . \vec{V} . \vec{n} . dS$
- A travers la surface S, le débit volumique de fluide est donne par: $q_V = \int_s . \vec{V} . \vec{n} . dS$



Toutes les lignes de courant s'appuyant sur une même courbe fermée constituent une surface (S') appelée "tube de courant"

* si l'écoulement est permanant (le tube n'évolue pas dans le temps), alors le débit massique est conservé: $q_m(s_1) = q_m(s_2)$

* si le fluide est incompressible, alors le débit volumique est conservé:

$$q_v = q_{v1} = q_{v2} = V_1 S_1 = V_2 S_2$$

L'équation de continuité:

- cas général:

L'équation de continuité doit traduire le principe de conservation de la masse.

- la variation de masse pendant un temps **dt** d'un élément de volume fluide.

doit être égale à la somme des masses de fluide entrante diminuée de celle de fluide sortant.

- on considère alors un élément de volume fluide: $dV = dxdydz$

sa masse peut s'exprimer comme: $m = \rho dxdydz$

pendant le temps **dt**, la variation de cette masse s'écrit:

$$dm = \frac{\partial m}{\partial t}dt = \frac{\partial \rho}{\partial t}dxdzdt$$

Cette variation doit alors être égale a:

I- la somme des masses de fluide qui entre et sort par les 6 faces de l'élément de volume dV.

II- la somme des masses fluides spontanément détruites (puits). Au créées (source) à l'intérieur de dV.

On a: la vitesse : $\overrightarrow{V} = u.\overrightarrow{e_x} + v.\overrightarrow{e_y} + w.\overrightarrow{e_z}$

Suivant l'axe **y**, le fluide entre avec la vitesse $\mathbf{v_y}$ et sort avec la vitesse $\mathbf{v_{y+dy}}$, par conséquent, la masse entrant pendant le temps **dt** s'exprime.

entrant $[\rho v\ dx\ dz\ dt]$ puisque $q_m = \frac{m}{t}$

et $q_m = \rho Q_v = \rho v\ dx\ dz$

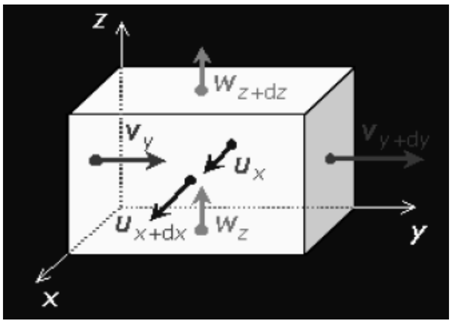
au a, par ailleurs, pour la masse sortant:

$$[\rho v\ dx\ dz]_{y+dy}$$

Le bilan sur l'axe **y** donne alors: $\left([\rho v]_y - [\rho v]_{y+dy}\right)dx\ dz\ dt$

un développent au 1ere ordre permet d'écrire : $[\rho v]_{y+dy} = [\rho v]_y + \frac{\partial[\rho v]}{\partial y}dy$

Donc il reste: $-\frac{\partial[\rho v]}{\partial y}\ dy\ dx\ dz\ dt$ suivant l'axe **y**.



Et par analogie sur les 2 autre axes, an trouve:

$-\frac{\partial[\rho v]}{\partial x}\underbrace{dx\,dy\,dz}_{dv}\,dt$ suivant l'axe x,

$-\frac{\partial[\rho w]}{\partial z}\underbrace{dx\,dy\,dz}_{dv}\,dt$ suivant l'axe z.

Au totale, à travers les 6 faces ou a: $-\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right]dv\,dt$

Donc: $dm=\frac{\partial\rho}{\partial t}dx\,dy\,dz\,dt=-\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right]dv\,dt+$ (II)

(II): la somme des masses de fluide spontanément détruites (puis) ou créées (sources) a l'intérieur de dV.

$$\text{(II)}=\sum_i \rho q_{vi}\,dV dt$$

bilan global: $dm=\frac{\partial\rho}{\partial t}\underbrace{dx\,dy\,dz}_{\cancel{dv}}\,\cancel{dt}=-\underbrace{\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right]}_{\vec{\nabla}(\rho\vec{V})}\cancel{dv}\,\cancel{dt}+\sum_i \rho q_{vi}\cancel{dV}\,\cancel{dt}$

alors: $\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\vec{\nabla}(\rho\vec{V})+\sum_i \rho q_{vi}$

C'est **l'équation de continuité** (équation qui traduit le principe de conservation de la masse).

Cas particuliers:

* écoulement **permanent** (ou stationnaires):

dans ce cas, il n'ya pas de variation explicite avec le temps:

$\frac{\partial}{\partial t}=0$, d'où $\vec{\nabla}(\rho\vec{V})+\sum_i \rho q_{vi}$

* écoulement de fluide **incompressible**: $\rho=C^{te}\quad\forall\vec{r},\forall t\ \Rightarrow\begin{cases}\frac{\partial}{\partial t}=0\\ \vec{\nabla}(\rho\vec{V})=\rho\vec{\nabla}\vec{V}\end{cases}$

d'où $\vec{\nabla}\vec{V}=\sum_i q_{vi}$

* écoulement **conservatif**: il n'ya ni puits ni source: $\Rightarrow\sum_i q_{vi}=0$

Et s'il s'agit en autre d'un fluide incompressible: $\vec{\nabla}$

Exercices

Exercice 01)

A. Si le potentiel des vitesses d'un écoulement d'un fluide incompressible et bidimensionnel est donné par :

$$\phi(x,y) = -\frac{xy^3}{3} - x^2 + \frac{x^3y}{3} + f(y)$$

Déterminer :

1. La fonction $f(y)$ pour que l'équation de continuité soit satisfaite.
2. La fonction de courant.

B. Les composantes de la vitesse d'un écoulement du fluide incompressible sont :

$$u = 2x^2y; \quad v = -2xy^2$$

1. **Déterminer** les équations de la trajectoire décrite par la particule de fluide.

Exercice 02 :

On considère l'écoulement défini en variables de Lagrange par :

$x = a + \alpha t$
$y = b + \beta t^2$
$z = c + yt^3 + c\alpha t$

Donner la vitesse V de cet écoulement en variables d'Euler.

Solution :

On vérifie qu'en $t = 0$, on a : $\begin{cases} x = a \\ y = b \\ z = c \end{cases}$

Les variables (a, b, c, t) sont les variables de Lagrange. Exprimons la vitesse en variables de Lagrange :

$u = \frac{dx}{dt} = \alpha$; $v = \frac{dy}{dt} = 2\beta t$; $w = \frac{dz}{dt} = 3\gamma t^2 + c\alpha$

La vitesse $\vec{V}$ (u, v, w) est une variable d'Euler. Elle est exprimée en fonction de a, b et c.

Essayons de l'exprimer en fonction des variables (x, y, z) de Lagrange.

Sur la base des données de l'énoncé, on a :

$$a = x - \alpha t ; \quad b = y - \beta t^2 ; \quad c = \frac{z - \gamma t^3}{1 + \alpha t}$$

En portant ces expressions dans ceux de (u, v, w), on obtient :

$$\begin{cases} u = \alpha \\ v = 2\beta t \\ w = 3\gamma t^2 + \dfrac{\alpha(z - \gamma t^3)}{1 + \alpha t} \end{cases}$$