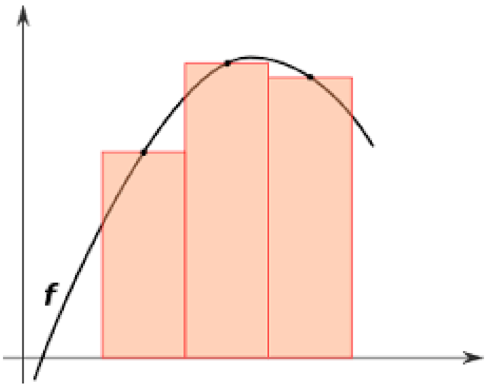
Méthode Numérique et Programmation

Intégration numérique.



Raghdi amina

Domaine Public (dépréciée) : http://creativecommons.org/licenses/publicdomain/1.0/fr/

10/05/2024

Table des matières

Objectifs

Le module MNP vise à étudier et à mettre en pratique diverses méthodes numériques pour résoudre des problèmes mathématiques complexes. Alors que les méthodes analytiques offrent des solutions exactes pour certains problèmes, les méthodes numériques sont utilisées lorsque les solutions exactes ne sont pas possibles. Ces méthodes fournissent des solutions approximatives mais souvent précises, et leur mise en œuvre manuelle est difficile voire impossible, nécessitant ainsi la programmation sur ordinateur. Le module se concentre sur l'utilisation du logiciel Matlab, largement utilisé dans le calcul numérique, pour implémenter et résoudre ces méthodes. Les étudiants apprennent à sélectionner et à appliquer les méthodes numériques appropriées pour résoudre des équations, des systèmes d'équations, des équations différentielles, des intégrales, et d'autres problèmes mathématiques, en développant ainsi leurs compétences en résolution de problèmes et en programmation.

chapitre 02 : Intégration numérique.

I

Considérée comme un passage du discret au continu, l'intégrale en physique est utilisée pour sommer les contributions d'éléments que l'on ne peut pas compter car leur distribution est continue (le long d'une ligne, sur un plan ou une nappe, ou même dans un volume) et non discrète (ensemble de points indénombrable

Définition « Intégrale »

Soit une fonction f continue sur un intervalle $[a,b]$ L'intégrale de f sur cet intervalle $[a,b]$ est définie comme étant l'aire compris entre la courbe de (c_f), les droites $x=a$ et $x=b$ et l'axe des abscisses x

$$I=\int_a^b f(x)\,dx=surface$$

Comme illustré sur le schéma de la figure (2.1)

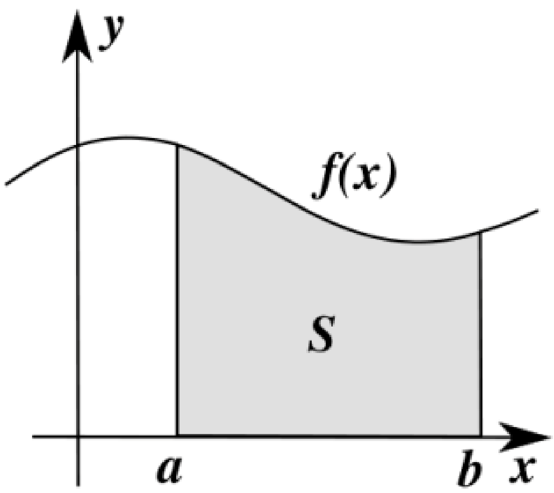


Figure 2.1 L'intégrale d'une fonction f (x)

Les méthodes numériques d'intégration interviennent alors lorsque le calcul analytique devient trop complexe. On les appels les **« Intégrales Numériques ».**

1. Méthode Des Trapézes Généralisée

1.1. Méthode Des Trapézes Généralisée

Méthode

Divisons l'intervalle $[a,b]$ en n parties égales de longueur $h=\frac{b-a}{n}$ les différents intervalles engendrés sont : $[x_0,x_1]$, $[x_1,x_2]$ ...., $[x_{n-1},x_n]$. En appliquant à chaque intervalle la **formule des trapèzes** on obtient :

$$I=\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx+\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx+......+\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

On remarque que tous les termes $f(x_i)$ sont répétés deux fois, sauf le premier et le dernier on en conclue que :

$$I=h\frac{f(x_0)-f(x_1)}{2}+h\frac{f(x_1)-f(x_2)}{2}+......+h\frac{f(x_{n-1})-f(x_n)}{2}$$

$$I=\frac{h}{2}[f(x_0)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+f(x_n)]$$

Cette formule est appelée **formule des trapézes généralisée**

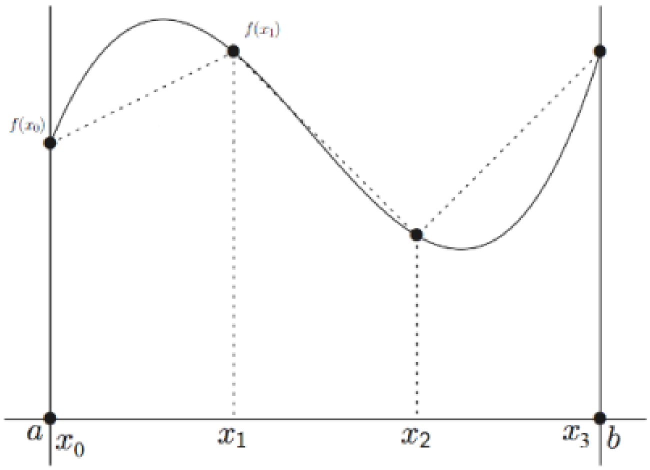


Figure 2.2 – Méthode des Trapèzes

1.2. Calcul de l'erreur de trapézes

l'erreur de la méthode des trapèzes est :

$$|I_{trapaze}(f)-I_{exacte}(f)|=|\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(x)|\leqslant\frac{(b-a)^3}{12n^2}M_2$$

Avec

$$M_2=supr\{f''(x)\},\ x\in[a,b]$$

Étant donnée la précision ε on peut alors déterminer le nombre minimal *n* des sous-intervalles par

$$n\geq\sqrt[4]{\frac{(b-a)^5}{180\varepsilon}M_4}$$

Cf. "Méthode Des Trapézes Généralisée"

1.3. exercice

Soit l'intégrale :

$$I=\int_0^5 e^{\sin(x)}\,dx$$

1. Calculer une valeur approchée de I par la méthode des Trapèzes, en prenant n=3 puis n=5
2. Donner une majoration de l'erreur commise à la méthode de Trapèzes pour n=3 et n=5 .conclure
3. Calculer le nombre de sous-intervalles qui permet d'avoir des valeurs approchées à des précisions de 0.01, 0.001et 0.0001 en utilisant la méthode des trapèzes. Conclure

Corrigé d'exercice

1. On utilise la formule de trapèzes donnée par

On a :

pour : $n=3, h=\frac{(b-a)}{n}=\frac{5}{3}$,alors

x_i	$x_0=0$	$x_1=\frac{5}{3}$	$x_2=\frac{10}{3}$	$x_3=5$
$f(x_i)$	1	2.0758	0.8265	0.3833

Donc :

$$I_{trap}=\frac{h}{2}(f(x_0)+f(x_3)+2[f(x_1)+f(x_2)])=7.0400$$

pour : $n=5\,;\,h=\frac{b-a}{n}=1$,alors

x_i	$x_0=0$	$x_1=1$	$x_2=2$	$x_3=3$	$x_4=4$	$x_5=5$
$f(x_i)$	1	2.3198	2.4826	1.1516	0.4692	0.3833

Donc :

$$I_{trap}=\frac{h}{2}(f(x_0)+f(x_5)+2[f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)])=7.1147$$

on utilise l'inégalité

On a $f''(x)=(\cos^2(x)-\sin(x))e^{\sin(x)}$ alors $M_2=max|f''(x)|=e$

Donc :

- pour $n=3\,;|I_{trap}-I_{exact}|\leqslant 3.1461$
- pour $n=5\,;|I_{trap}-I_{exact}|\leqslant 1.1326$

On constat que l'erreur a diminué lorsque n augmenté

3) on utilise l'inégalité

- pour $\varepsilon=0.001\ ;n\geq\sqrt{\frac{e(5-0)^3}{12*0.01}}=53.2$ soit n=54
- pour $\varepsilon=0.001\ n\geq\sqrt{\frac{e(5-0)^3}{12*0.001}}=168.2$ soit n=169
- pour $\varepsilon=0.0001\ ;n\geq\sqrt{\frac{e(5-0)^3}{12*0.0001}}=531.1$ soit n=533

On constate que plus la précision ε est élevée, plus le nombre de sous-intervalles nécessaire n est grand

Il existe dans Matlab une fonction trapz qui implémente la méthode des trapèzes

```
clear all;close all;clc
%trapezes.m
a=0;
b=5;
n=10;
h=(b-a)/n;
f=@(x)exp(sin(x));
s=0;
for i=1:n-1
s=s+f(a+i*h);
end
I=(h/2)*(f(a)+f(b))+h*s
```

Le résultat après exécution : n=10 ; I= 7.1705

Remarque

La valeur approchée de l'intégrale converge vers la valeur I=7.1891 lorsque n augmente plus en plus

2. Méthode de simpson généralisée

2.1. Méthode de Simpson généralisée

Méthode

On peut améliorer la précision de la formule de Simpson en la composant puisque la méthode simple requiert deux intervalles, on divise alors l'intervalle d'intégration $[a,b]$ en $n=2m$ sous-intervalles égales de longueur $h=\frac{b-a}{n}$ et on utilise la **méthode de simpson simple** dans chaque paire de sous-intervalle $[x_{2i}, x_{2i+2}], i=0,2,4,\dots m-1$ on a alors :

$$\int_a^b f(x)=\sum_{i=0}^{m-1}\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)=\sum_{i=0}^{m-1}\frac{h}{3}[f(x_{2i})+4f(x_{2i+1})+f(x_{2i+2})]$$

On remarque que tous les termes de rang impair sont multipliés par 4 tandis que ceux de rang pair sont multipliés par 2, sauf le premier et le dernier, on en conclue que :

$$\int_a^b f(x)=\frac{h}{3}[f(x_0)+f(x_n)+4(f(x_1)+f(x_3)+\dots+f(x_{n-1}))+2(f(x_2)+f(x_4)+\dots+f(x_{n-2}))]$$

Cette formule est appelée **formule de simpson généralisée**

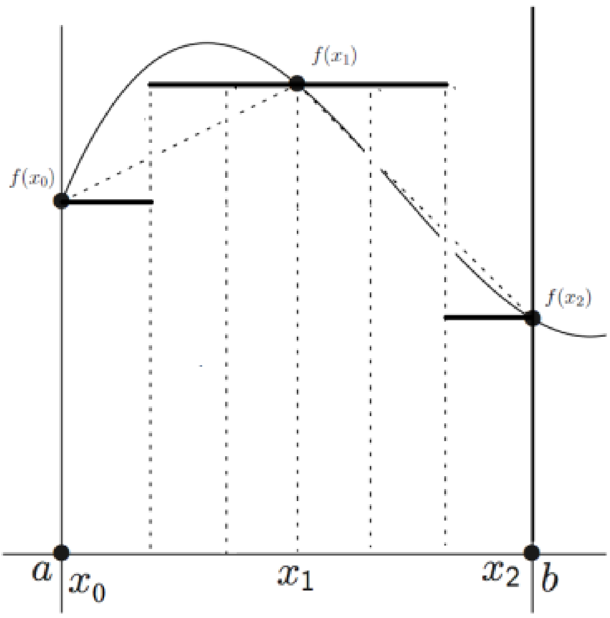


Figure 2.3 – Méthode de Simpson

2.2. Calcul de l'erreur de Simpson

La méthode de Simpson est caractérisée par l'erreur :

$$|I_{simpson}(f)-I_{exacte}(f)|=|\frac{(b-a)^5}{180n^4}f''''(x)|\leqslant\frac{(b-a)^5}{180n^4}M_4$$

Avec $M_4=supr\{f''''(x)\}\quad x\in[a,b]$

Si on note par ε le seuil d'erreur qu'on veut atteindre, alors dès que

$$n \geq \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5}{180\,\varepsilon} M_4}$$

Cf. "Méthode de simpson généralisée"

2.3. Corrigé d'exercice

1. Calculer une valeur approchée de l'intégrale (II-24) par la méthode de Simpson, en prenant ′=4 et ′=6 avec n'=2n.
2. Donner une majoration de l'erreur commise à la méthode de Simpson pour n'=4 et n'=6.
3. Calculer le nombre de sous-intervalles qui permet d'avoir les précisions10^(-2), 10^(-3)et 10^(-4)en utilisant la méthode de Simpson. Conclure.
4. Comparer entre les méthodes de Simpson et trapèzes (voir les résultats obtenus dans l'exercice II.1).

Corrigé d'exercice

) On utilise la formule de Simpson donnée par

On a $f(x)=e^{\sin(x)}, a=0, b=5$

Pour la méthode de Simpson , le nombre de segment n

Pour la méthode de Simpson, le nombre de segments n' doit être pair, c'est la raison

pour laquelle on a pris n'= 2n =4 ,6 et non pas n'=3 ,5 comme pour le cas de la méthode des trapèzes

Pour $n'=4\,;h=\frac{(b-a)}{n'}=\frac{5}{4}$

x_i	$x_0=0$	$x_1=\frac{5}{4}$	$x_2=\frac{5}{2}$	$x_3=\frac{15}{4}$	$x_4=5$
$f(x_i)$	1	2.5831	1.8193	0.5646	0.3833

Donc

$$I_{simp}=\frac{h}{3}[f(x_0)+f(x_4)+4(f(x_1)+f(x_3))+2(f(x_2))]=7.3745$$

pour $n'=6\,;h=\frac{(b-a)}{n'}=\frac{5}{6}$

x_i	$x_0=0$	$x_1=\frac{5}{6}$	$x_2=\frac{5}{3}$	$x_3=\frac{5}{2}$	$x_4=\frac{10}{3}$	$x_5=\frac{25}{6}$	$x_6=5$
$f(x_i)$	1	2.0963	2.7058	1.8193	0.8256	0.4254	0.3833

Donc

$$I_{simp}=\frac{h}{3}[f(x_0)+f(x_6)+4(f(x_1)+f(x_3)+f(x_5))+2(f(x_2)+f(x_4))]=7.1700$$

2)on utilise l'inégalite :

On a : $f^4(x)=[\sin^4(x)+6\sin^3(x)+5\sin^2(x)+5\sin(x)-3]e^{\sin(x)}$

Alors : $M_4=max|f^4(x)|=4e$

Donc

Pour $n=4\,;|I_{simp}-I_{exact}|\leqslant 0.7374$

Pour $n=6\,;|I_{simp}-I_{exact}|\leqslant 0.1456$

On constate que l'erreur a diminuée lorsque n est augmenté

3) on utilisé l'inégalité(....)

Pour $\varepsilon=0.01\,;n\geqslant\sqrt[4]{\dfrac{4e(5-0)^5}{180*0.01}}=11.75$ soit n=12

pour $\varepsilon=0.001\,;n\geqslant\sqrt[4]{\dfrac{4e(5-0)^5}{180*0.001}}=20.84$ soit n=22

pour $\varepsilon=0.0001\,;n\geqslant\sqrt[4]{\dfrac{4e(5-0)^5}{180*0.0001}}=37.07$ soit n=38

On constate que plus la précision souhaitée ε est élevée, plus le nombre de sous-intervalles nécessaire n est grand

programme Matlab qui permet de calculer () par la méthode de Simpson. En prenant = 6. (dans un fichier M)

```
clear all; close all; clc;
% simpson.m
a=0;
b=5;
n=6
h=(b-a)/n;
f=@(x)exp(sin(x));
s1=0;
for i=1:2:n-1
s1=s1+f(a+i*h);
end
s2=0
for i=2:2:n-2
s2=s2+f(a+i*h);
end
I=(h/3)*(f(a)+f(b)+4*s1+2s2)
```

Le résultat après exécution : n=6 ; I= 7.3387

Remarque

on constant que la méthode de Simpson est précise et plus rapide comparée à la méthode de trapèzes

* *

*

Il y a bien d'autres méthodes avec des approches quelques peu différentes très bien fournies sur le Net, entre autres vous pouvez chercher

- La méthode de Gauss
- La méthode de Romberg
- La méthode de Monté-Carlo

Et bien d'autres...