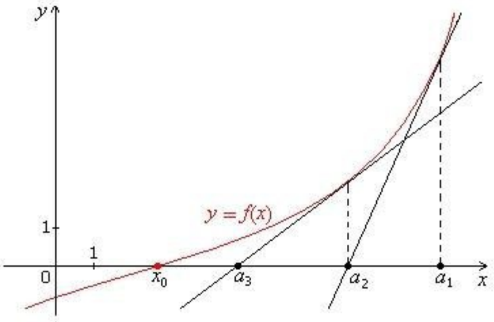
Résolution Des Équations Non Linéaires

Résolution Des Équations Non Linéaires



Raghdi amina

Table des matières

Objectifs

Le module MNP vise à étudier et à mettre en pratique diverses méthodes numériques pour résoudre des problèmes mathématiques complexes. Alors que les méthodes analytiques offrent des solutions exactes pour certains problèmes, les méthodes numériques sont utilisées lorsque les solutions exactes ne sont pas possibles. Ces méthodes fournissent des solutions approximatives mais souvent précises, et leur mise en œuvre manuelle est difficile voire impossible, nécessitant ainsi la programmation sur ordinateur. Le module se concentre sur l'utilisation du logiciel Matlab, largement utilisé dans le calcul numérique, pour implémenter et résoudre ces méthodes. Les étudiants apprennent à sélectionner et à appliquer les méthodes numériques appropriées pour résoudre des équations, des systèmes d'équations, des équations différentielles, des intégrales, et d'autres problèmes mathématiques, en développant ainsi leurs compétences en résolution de problèmes et en programmation.

chapitre03 : Résolution Des Équations Non Linéaires

I

ans ce chapitre nous allons étudier des méthodes de résolution numérique des équations non linéaires de la forme

$f(x)=0$

1. Méthode de dichotomie (ou bissection)

1.1. Méthode de dichotomie (ou bissection)

Rappel

- On appelle une ***racine*** ou un ***zéro*** de la fonction $f(x)$ toute valeur réelle r tel que $f(r)=0$
- Une fonction $f(x)$ peut avoir une racine, plusieurs racines ou bien aucune racine. Le théorème des valeurs intermédiaires présente une condition principale d'existence des racines dans un intervalle $[a,b]$

1.2. Théorème des valeurs intermédiaires

1. Si $f(x)$ est une fonction continue sur $[a,b]$ et si $f(a).f(b)<0$, alors il existe au moins une valeur tel que $f(r)=0$
2. Si de plus $f(x)$ est strictement monotone sur $[a,b]$, la racine est unique dans $[a,b]$.

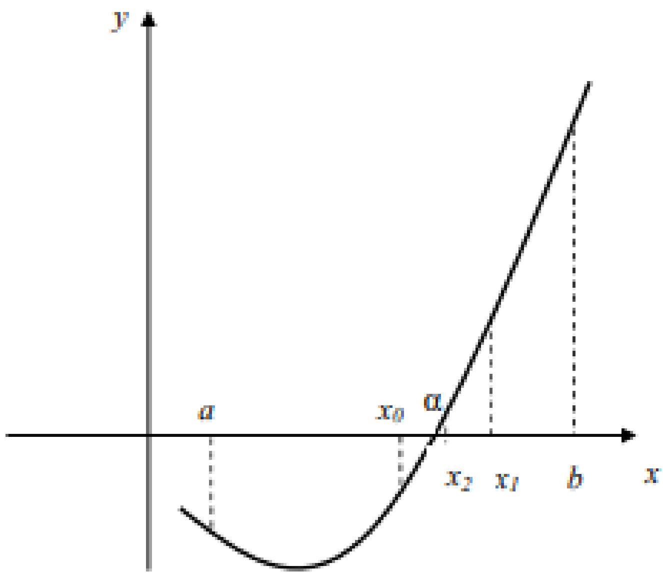
La résolution de l'équation (III-1) se fait alors par le calcul des racines, si elles existent, de la fonction $f(x)$.

1.3. Méthode de dichotomie

Méthode

La méthode de dichotomie se base la réduction multiple et successive de l'intervalle qui contient la racine jusqu' à atteindre la valeur de la racine à une précision . Le mot dichotomie (**dicho = deux, tomie = coupe**) exprime clairement le principe de la méthode

1. On divise l'intervalle $[a,b]$ en deux parties égales $[a,x_0]$ et $[x_0,b]$ avec $x_0=\frac{a+b}{2}$
2. On garde l'intervalle vérifiant soit $[a,b]=[a,x_0]$ sinon $[a,b]=[x_0,b]$
3. On répété les étapes (1) et (2) jusqu'à ce que $|x_i-x_{i-1}|\leq\varepsilon$ avec un nombre positif très petit **(précision de convergence**)



principe de la méthode de dichotomie

1.4. Convergence et estimation de l'erreur

Pour montrer que la méthode de Bissection est convergente vers la solution unique de l'équation dans l' intervalle $[a,b]$, il faut que :

L'estimation de l'erreur :

$$|x_n - 1| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}} \leq \varepsilon$$

Le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre une précision ε est donné par la formule suivante :

$$n \approx \frac{\log\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\log(2)}$$

Cf. "Méthode de dichotomie"

1.5. Exercice

On vaut résoudre numériquement l'équation :

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{(1+x^2)}$$

1. Vérifier l'existence d'une solution dans les intervalles suivants : $[1.5,2],[5,6]$
2. Calculer une valeur approchée à une précision $\varepsilon = 10^{-1}$de la solution existant dans l'intervalle $[1.5,2]$en utilisant la méthode de dichotomie.
3. Calculer le nombre des itérations nécessaires pour obtenir une solution à une $\varepsilon = 10^{-6}$dans l'intervalle $[1.5,2]$

Corrigé d'exercice

1. On utilise le théorème des valeurs intermédiaires :

$f(1.5) \times f(2) = -0.0018 < 0$; donc il existe une racine dans cet intervalle.

$f(5) \times f(6) = 0.00028312 > 0$; donc il n'existe pas une racine dans cet intervalle

2. On utilise l'algorithme de la méthode de dichotomie

Itération 01 :

l'intervalle $[1.5,2]$contient la racineα

$$c = \frac{a+b}{2} = \frac{1.5+2}{2} = 1.75$$

$f(1.5) \times f(1.75) = -9.54 \times 10^{-4} < 0 \quad f(1.75) \times f(2) = 3.65 \times 10^{-3} > 0$

Itération 02:

l'intervalle $[1.5,1.75]$ contient la racine α

$$c = \frac{a+b}{2} = \frac{1.5+1.75}{2} = 1.625$$

$f(1.5) \times f(1.625) = -3.23 \times 10^{-4} < 0 \quad f(1.625) \times f(1.75) = 6.52 \times 10^{-4} > 0$

Itération 03:

l'intervalle $[1.5,1.625]$contient la racine α

$$c=\frac{a+b}{2}=\frac{1.5+1.625}{2}=1.5625$$

$f(1.5)\times f(1.5625)=5.24\times10^{-5}>0$ $f(1.5625)\times f(1.625)=3.58\times10^{-5}<0$

Itération 04:

l'intervalle $[1.5625,1.625]$ contient la racine α

$$c=\frac{a+b}{2}=\frac{1.5625+1.625}{2}=1.59375$$

A partir de l'itération 4, un chiffre après la virgule devient constant, donc la racine à une précision$\varepsilon=10^{-1}$ de est : $\alpha\approx c\approx1.5$

3. On utilise l'inégalité :$n=\frac{\log\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\log(2)}$

$$n\approx\frac{\log\left(\frac{2-1.5}{10^{-2}}\right)}{\log(2)}$$

$n\approx18.93$

Programme Matlab de la méthode de dichotomie

```
close all;clear all;clc;
a=1.5;
b=2;
c=(a+b)/2;
f=@(x)cos(x)/(1+x^2);
eps=1e-2;
k=0;
while abs(b-a)>eps
if f(a)*f(c)<0
b=c;
end
if f(b)*f(c)<0
a=c;
end
c=(a+b)/2;
k=k+1;
end
k
c
f(c)
```

Après l'exécution de ce programme on obtient le résultat suivant :

Le nombre des itérations effectués : k =6

La valeur approchée de la racine : c1 = 1.5742

Vérification : f(c1) = -9.8397e-004

2. Méthode de Newton

2.1. Méthode de Newton

Méthode

supposons que x_n soit une estimation de la racine de la fonction $f(x)=0$ et considérons un petit intervalle ***h*** tel que :

$$h=x_{n+1}+x_n$$

En utilisant le développement en série de Taylor pour $f(x_{n+1})$ nous obtenons :

$$f(x_{n+1})=f(x_n)+f'(x_n)\frac{h}{1!}+f''(x_n)\frac{h^2}{2!}+......$$

En négligeant les termes contenant des dérivées d'ordre supérieur, nous obtenons :

$$f(x_{n+1})=f(x_n)+f'(x_n)\frac{h}{1!}......$$

Si x_{n+1} est la racine de$f(x)$, alors $f(x_{n+1})=0$. En substituant cette valeur dans l'équation, cela donne :

$$0=f(x_n)+f'(x_n)h$$

C'est-à-dire :

$$h=-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1}+x_n=-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad n=1,2,.....$$

Supposons que x_n soit une estimation de la racine de la fonction $f(x)=0$ et considérons un petit intervalle ***h*** tel que :

$$h=x_{n+1}+x_n$$

En utilisant le développement en série de Taylor pour $f(x_{n+1})$ nous obtenons :

$$f(x_{n+1})=f(x_n)+f'(x_n)\frac{h}{1!}+f''(x_n)\frac{h^2}{2!}+......$$

En négligeant les termes contenant des dérivées d'ordre supérieur, nous obtenons :

$$f(x_{n+1})=f(x_n)+f'(x_n)\frac{h}{1!}......$$

Si x_{n+1} est la racine de$f(x)$, alors $f(x_{n+1})=0$. En substituant cette valeur dans l'équation, cela donne :

$$0=f(x_n)+f'(x_n)h$$

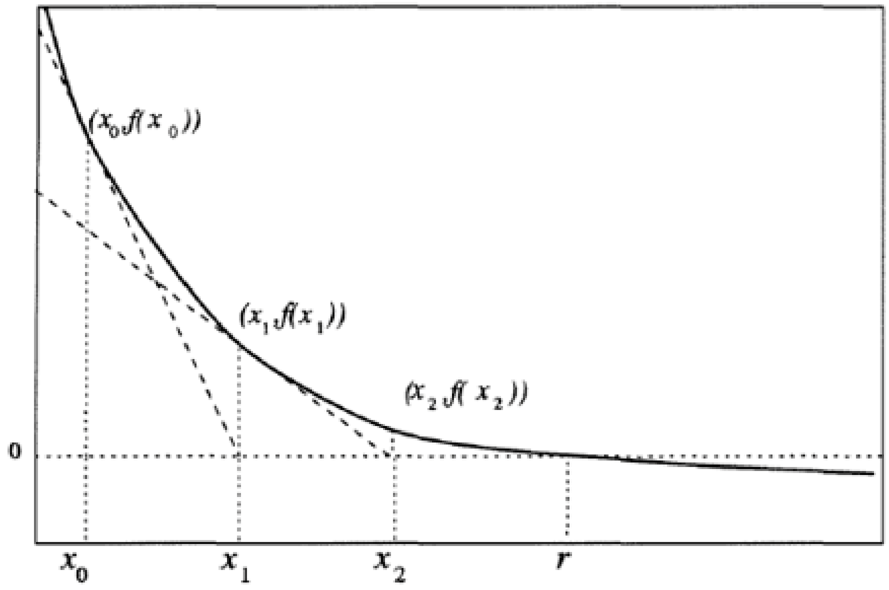
C'est-à-dire :

$$h=-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1}+x_n=-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad n=1,2,\ldots..$$

2.2. Interprétioon géomterique

Considérez un graphe $f(x)$ comme illustré dans la figure ci-dessus. Supposons $x_1$que soit une racine approximative de$f(x)=0$. Tracez une tangente à la courbe $f(x)$ en ,$x=x_1$comme indiqué dans la figure.



interprétation géométrique de la méthode newton

Le point d'intersection de cette tangente avec l'axe des $x$donne la deuxième approximation de la racine. Soit le point d'intersectionx_2 . La pente de la tangente est donnée par

$$\tan(\alpha)=\frac{f(x)}{x_1-x_2}=f'(x_1)$$

Où ;$f'(x_1)$ est la pente$f(x)$ de en$x=x_1$.

En résolvant pour x_2, nous obtenons :

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Cela est appelé la formule de Newton-Raphson pour la première itération. Ensuite, la prochaine approximation sera :

$$x_3=x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

En général

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

On arrête les calculs lorsque le critère de convergence est atteint :

$$|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon$$

Cf. "Méthode de Newton"

2.3. Exercice

En utilisant la méthode de Newton calculer une valeur approchée à $\varepsilon=10^{-2}$, existant dans l'intervalle $[1.5,2]$. On prend la valeur initiale approchée de la solution $x_0=1.3$

Corrigé d'exercice

On utilise l'algorithme de la méthode de Newton, on a :

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Et

$$f(x)=\frac{\cos(x)}{(1+x^2)}\rightarrow f'(x)=\frac{(-\sin(x))(1+x^2)-(2x)cox(x)}{((1+x^2))^2}$$

On fait alors le calcul numérique

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=1.3-\frac{f(1.3)}{f'(1.3)}=1.5189$$

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=1.5189-\frac{f(1.5189)}{f'(1.5189)}=1.5685$$

$$x_3=x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}=1.5185-\frac{f(1.5185)}{f'(1.5185)}=1.5708$$

$$x_4=x_3-\frac{f(x_3)}{f'(x_3)}=1.5708$$

La racine a une précision 10^{-2} est donc c=1.57 qui se stabilise à partir de l'itération 4

Programme Matlab de la méthode de Newton :

```
close all;clear all;clc;
f=@(x)cos(x)/(1+x^2);
df=@(x)(-sin(x)*(1+x^2)-2*x*cos(x))/((1+x^2)^2);
eps=1e-3;
x0=1.3;
xn=x0;
k=0;
while abs(f(xn))>eps
xn1=xn-f(xn)/df(xn);
xn=xn1;
k=k+1;
end
k
c=xn
f(c)
```

Après l'exécution de ce programme on obtient le résultat suivant :

Le nombre des itérations effectués : k =2

La valeur approchée de la racine : c1 = 1.5685

Vérification : f(c1) = 6.7060e-004

Remarque

La méthode de Newton est très rapide (un nombre d'itération petit permet d'obtenir une racine avec une grande précision).

* *

*

Il existe beaucoup d'autres méthodes pour des applications spécifiques. Dans ce chapitre nous avons étudié les méthodes les plus élémentaires. Ces dernières sont plus ou moins performantes. Pour les comparer nous devons estimer le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre la solution avec la précision donnée ainsi que le nombre d'opérations à effectuer pour chaque d'itération