

Exercice 1 (12 pts)

Soit un problème d'optimisation combinatoire dont la solution est un vecteur x de n entiers x_i tels que : $x_i \in [1, k]$ et $k \leq n$. Exemple avec $n = 5$ et $k = 3$: $s = (1,2,1,2,3)$ en est une solution.

- 1) Calculer la taille de l'espace de recherche.
- 2) Ecrire un algorithme qui calcule une solution aléatoire.
- 3) Soit la fonction de voisinage qui consiste à remplacer l'une des composantes x_i de x par un autre entier de $[1, k]$ différent de x_i .
 - a) Calculer tous les voisins de $s = (1,2,1,2,3)$ pour $n = 5$ et $k = 3$.
 - b) Ecrire un algorithme qui retourne un voisin aléatoire de x .
 - c) Calculer en fonction de n et k , le nombre de voisins de x .
 - d) Ecrire un algorithme qui retourne tous les voisins de x puis évaluer sa complexité.
- 4) Soit la matrice binaire carrée M_{ij} de dimensions $n \times n$. La fonction objectif à minimiser du problème ci-dessus est f tel que $f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \cdot (x_i - x_j)$

- a) Calculer $f(s)$ pour $s = (1,2,1,2,3)$, $n = 5$, $k = 3$ et $M[\][\] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
- b) Ecrire un algorithme qui calcule $f(x)$.

Exercice 2 (08 pts)

Lors de la résolution d'un problème d'optimisation combinatoire par une recherche tabou, nous avons effectué une étude empirique et récapitulé dans le tableau suivant les moyennes des optimums d'une variété d'instances en fonction du nombre d'itérations :

Nombre d'itérations	TLS = 10	TLS = 20	TLS = 50
10	56	52	98
20	50	49	50
50	49	48	49
100	48	47	47
200	48	46	44
300	46	45	44
400	46	44	44
500	44	44	44
600	44	44	44

(TLS = Tabu List Size = Taille de la Liste Tabou)

- 1) S'agit-il d'un problème de minimisation ou de maximisation ? justifier.
- 2) Donner le nombre idéal du nombre d'itérations pour chaque cas de TLS.
- 3) Quelle est la valeur idéale de TLS ? Justifier.
- 4) Comment interpréter la première valeur (98) de l'objectif dans le cas TLS = 50.
- 5) Que peut-on dire des comportements de ces algorithmes à l'itération 1500 ?
- 6) Quel est le but de cette étude empirique.
- 7) Supposons que l'algorithme du cas 2 (TLS =20) est 0.05-approché, déterminer un encadrement de l'optimum global de ce problème.