Université de M'sila	Examen de Rattrapage	Faculté : Maths-informatique
L2 Mathématiques		Année universitaire : 2023/2024
Module : Analyse 3	Troisième semestre	Durée : 1 h 30m

Barème	**Exercice : 1** (7pts)
	Soit la série numérique $\sum_{n\geq 0} u_n$ dont le terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln(3+\sqrt{n})}$.
3	1. En appliquant le théorème de Leibniz montrer que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente.
1.5	2. Calculer la limite $\lim_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{2}}\lvert u_n\rvert$.
2.5	3. Déduire la semi-convergence de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$.

Barème	**Exercice : 2** (7pts)
	On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ telle que, $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^3}$.
3	1. Montrer que cette série converge normalement pour tout $x \in \mathbb{R}$.
1.5	2. Montrer que $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin(nx)}{n^3}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
1.5	3. Par intégration, montrer que $\int_0^{\pi} f_n(x)dx = \dfrac{1}{n^4}\Big(1-(-1)^n\Big)$.
2.5	4. Déduire que $\int_0^{\pi} f(x)dx = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n-1)^4}$.

Barème	**Exercice : 3** (6pts)
	Soit f la fonction $2\pi-$ périodique définie sur l'intervalle $]-\pi,\pi]$, par $f(x) = \pi - \lvert x\rvert$.
0.5	1. Tracer le graphe de f sur l'intervalle $]-\pi, 3\pi]$.
3	2. Déterminer les coefficients de Fourier a_n et b_n associé à f.
1	3. Donner la série de Fourier associée à f.
1.5	4. En déduire la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^2}$.

Fin	1er juin 2024	Dr. D. Bouafia