Université de M'sila	**Correction d'examen**	**Faculté : Maths-informatique**
L2 Mathématiques		**Année universitaire : 2023/2024**
Module : Analyse 3	**Session de rattrapage**	**Durée : 1 h 30m**

Barème

Correction d'exercice : 1 (7pts)

Soit la série numérique $\sum_{n\geq 0} u_n$ dont le terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln(3+\sqrt{n})}$.

(1) On définit la fonction f sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = \dfrac{1}{\ln(3+\sqrt{x})}$.

1 Alors, on a $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : \; f'(x) = -\dfrac{(\ln(3+\sqrt{x}))'}{(\ln(3+\sqrt{x}))^2} = -\dfrac{1}{2\sqrt{x}(\ln(3+\sqrt{x}))^3} < 0.$

1 + 0.5 Donc la suite de terme général $|u_n| = \dfrac{1}{\ln(3+\sqrt{n})}$ est décroissante, elle tend vers $\mathbf{0}$, i.e.

0.5 $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0.$

0.5 D'après le théorème de Leibniz (le test de série alternée), la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

0.5 + 1 (2) On a $|u_n| = \dfrac{1}{\ln(3+\sqrt{n})}$, par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{2}}|u_n| = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^{\frac{1}{2}}}{\ln(3+\sqrt{n})} = +\infty.$

0.5 (3) On étudie la convergence absolue. Alors, d'après question **2,** on a $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{2}}|u_n| = +\infty.$

1 Donc, selon le règle de Riemann la série de terme général $|u_n| = \dfrac{1}{\ln(3+\sqrt{n})}$ diverge, car

1 $(\alpha = \dfrac{1}{2} < 1)$, ce qui montre que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ ne converge pas absolument.

0.5 D'où, cette série est donc semi-convergente.

Barème

Correction d'exercice : 2 (7pts)

1 (1) On a $\forall x \in \mathbb{N}^* : \; \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left|\dfrac{\sin(nx)}{n^3}\right| \leq \dfrac{1}{n^3}$. Comme $\dfrac{1}{n^3}$ est le terme général d'une série de

1 + 0.5 Riemann convergente avec $\alpha = 3 > 1$, donc par critère de Weierstrass la série $\sum_{n\geq 1} f_n$

normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

0.5 (2) Les fonctions $f_n, \; (n \geq 1)$ sont continues, et la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$,

0.5 + 0.5 car elle normalement convergente, donc la fonction somme f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

0.5 (3) La convergence étant uniforme sur $[0, \pi] \subset \mathbb{R}$ et les fonctions $f_n, \; (n \geq 1)$ étant continues,

donc sont intégrables. Par intégration, on trouvre,

1 $$\int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n^3}dx = \frac{1}{n^3}\int_0^\pi \sin(nx)dx = \frac{1}{n^3}\Big[-\frac{\cos(nx)}{n}\Big]_0^\pi = \frac{1}{n^4}\Big(1-(-1)^n\Big).$$

(4) D'après question 2, on obtient

0.5 $$\int_0^\pi f(x)dx = \int_0^\pi \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^\pi f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n^3}dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}\Big(1-(-1)^n\Big).$$

Université de M'sila	**Correction d'examen**	Faculté : Maths-informatique
L2 Mathématiques	Session de rattrapage	Année universitaire : 2023/2024
Module : Analyse 3		Durée : 1 h 30m

0.5 Selon que n est pair ou impair $\left(1-(-1)^n\right)$ est nul ou vaut 2, on va couper la somme en deux

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin(nx)}{n^3}dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^4}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1-(-1)^{2k}}{(2k)^4}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1-(-1)^{2k+1}}{(2k+1)^4}$$
$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2}{(2k+1)^4}.$$

0.5 Puis, on fait le changement $n=2k+1$, alors, $\begin{cases} k=0 \\ n=1, \end{cases}$ on trouve donc,

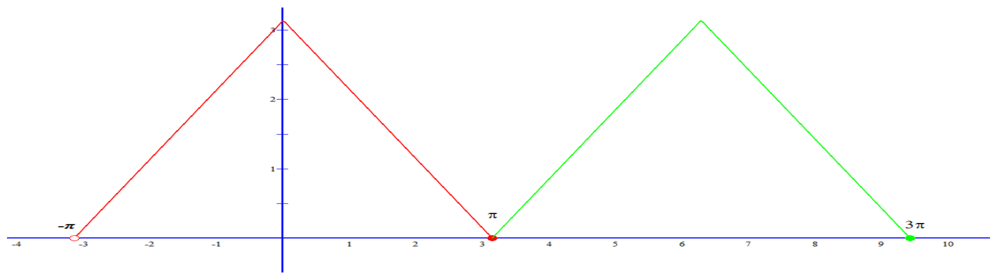
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin(nx)}{n^3}dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{(2n-1)^4}.$$

Barème

Correction d'exercice : 3 6pts

Soit f la fonction $2\pi-$ périodique définie sur l'intervalle $]-\pi,\pi]$, par $f(x)=\pi-|x|$.

0.5 (1) On trace la courbe $\mathcal{C}_f$ sur $]-\pi,2\pi]$, puis on la déplacer par un translation de vecteur $\vec{v}=-2\pi$.



(2) Les coefficients de Fourier a_n et b_n associé à f.

0.5 (a) Il est facile de voir que la fonction f est paire, de sorte que $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $b_n=0$.

1 (b) $a_0=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)dx=\left[\pi x-\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\pi}=\pi.$

1.5 (c) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos(nx)dx=2\int_0^{\pi}\cos(nx)dx-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos(nx)dx=\frac{2}{\pi n^2}\left(1-(-1)^2\right).$$

1 (3) Donc, la série de Fourier donner par, $F(f)(x)=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(1-(-1)^2\right)\cos(nx).$

0.5 (4) Selon que n est pair ou impair, on a $F(f)(x)=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k\geq 1}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos((2k+1)x).$

Puisque la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, le théorème de Dirichlet montre que la série converge

0.5 vers f en tout point de $\mathbb{R}$, en particulier, si $x=0$, on en déduit

0.5 $f(0)=F(f)(0)=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k\geq 1}\frac{1}{(2k+1)^2}\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$

Fin | 1^{er} juin 2024 | Bon Chance