Université de M'sila	Correction d'examen final	Faculté : Maths-informatique
L 2 Mathématiques		Année : 2023/2024
Module Analyse 4		Durée : 1h −30m

Barème	
	Correction d'exercice : 1 (6pts)
	Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y,z) = x^2 - xy + 2z$, et le vecteur $\overrightarrow{v}(1,1,1)$.
	① La dérivée directionnelle de f au point $a(1,0,-1)$ le long la direction $\overrightarrow{v}$ est
3×0.5	$D_v f(a) = \lim_{t\to 0}\frac{f(a+tv)-f(a)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(1+t,t,-1+t)-f(1,0,-1)}{t} = 3.$
$1+0.5$	② ⓐ On a $\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-y \\ -x \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla f(1,0,-1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$
0.5	Donc, on trouve, $\langle \nabla f(a), v\rangle = 2\times 1 + (-1)\times 1 + 2\times 1 = 3 = D_v f(a)$.
0.5	ⓑ On sait que $df_a(v) = D_v f(a)$. Donc, $df_a(v) = 3$.
0.5	③ Comme $f(1+h,k,-1+l) = f(1,0,-1) + df_{(1,0,-1)}(h,k,l) + o\Big(\\|(h,k,l)\\|\Big)$, donc,
0.5	$f(1+h,k,-1+l) \approx f(1,0,-1) + df_{(1,0,-1)}(h,k,l)$, si $\\|(h,k,l)\\| \to 0$.
	Ici $(h,k,l) = (0.1, 0.2, 0.1)$. Par suit, on a,
0.5	$f(1.1,-0.9) \approx -1 + 2\times 0.1 - 0.2 + 2\times 0.1 = -0.8.$

Barème	
	Correction d'exercice : 2 (7pts)
	Soient les fonctions f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = 3x + y$, et la containte $x^2 + y^2 = 10$.
	① Le lagrangien associée au problème est
1	$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda(x^2+y^2-10) = 3x + y - \lambda(x^2+y^2-10).$
3	② Les points critiques liés de f. On a :
	$\nabla L(x,y,\lambda) = O_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3-2\lambda x \\ 1-2\lambda y \\ -x^2-y^2+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$
	Par conséquent, on trouve, $(x,y,\lambda) \in \Big\{\Big(3,1,\frac{1}{2}\Big), \Big(-3,-1,-\frac{1}{2}\Big)\Big\}$.
	Donc, les points critiques liés de f sont $A\Big(3,1\Big)$ et $B(-3,-1)$.
3	③ Lanature des points critiques liés
	ⓐ $\mathrm{H}_L(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} \partial^2_{xx}L(x,y,\lambda) & \partial^2_{xy}L(x,y,\lambda) & \partial^2_{x\lambda}L(x,y,\lambda) \\ \partial^2_{yx}(x,y,\lambda) & \partial^2_{yy}L(x,y,\lambda) & \partial^2_{y\lambda}L(x,y,\lambda) \\ \partial^2_{\lambda x}(x,y,\lambda) & \partial^2_{\lambda y}L(x,y,\lambda) & \partial^2_{\lambda\lambda}L(x,y,\lambda) \end{pmatrix}$

Par suit, on trouve $\mathrm{H}_L(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} -2\lambda & 0 & -2x \\ 0 & -2\lambda & -2y \\ -2x & -2y & 0 \end{pmatrix}$

(b) Le déterminant de la matrice Hessienne au point $A\left(3,1,\frac{1}{2}\right)$ est

$\left|H_L\left(3,1,\frac{1}{2}\right)\right| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -6 \\ 0 & -1 & -2 \\ -6 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2 > 0,$ et comme, $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}\left(3,1,\frac{1}{2}\right) = -1 < 0.$ Alors, A est un maximum lié.

(c) Le déterminant de la matrice Hessienne au point $B\left(-3,-1,-\frac{1}{2}\right)$ est

$\left|H_L\left(-3,-1,-\frac{1}{2}\right)\right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 > 0,$ et comme, $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}\left(-3,-1,-\frac{1}{2}\right) = 1 > 0.$ Alors, B est un minimum lié.

Barème

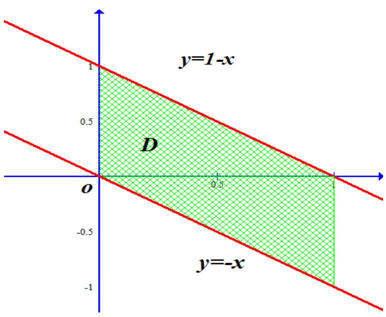
Correction d'exercice : 3

7pts

Soit l'intégral double $I = \iint_D \frac{1}{1+x+y}dxdy,$ où D le domaine définie par :

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le x+y \le 1\}.$$

2 (1) Présentation de $\mathcal{D}$.



3 (2) On calcul l'intégral I.

Comme, $0 \le x+y \le 1$ implique que $y \ge -x$ et $y \le 1-x.$ Alors, d'après théorème de Fubuni, on aura

Université de M'sila		Faculté : Maths-informatique
L 2 Mathématiques	Correction d'examen	Année : 2023/2024
Module Analyse 4	final	Durée : 1h −30m

$$I = \iint_D \frac{1}{1+x+y}dxdy = \int_0^1 \Big[\int_{-x}^{1-x} \frac{1}{1+x+y}dy\Big]dx = \int_0^1 \Big[\ln(1+x+y)\Big]_{-x}^{1-x}dx$$

D'où, $I = \int_0^1 \Big[\ln 2\Big]dx = \Big[x\ln 2\Big]_0^1 = \ln 2.$

3

3 Posons : $\begin{cases} u = x \\ v = x+y, \end{cases}$ ça donne $\begin{cases} x = u \\ y = -u+v, \end{cases}$

Soit $\varphi(u,v) = (u, -u+v) = (\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v))$. La matrice jacobienne de φ au point (u,v) est alors donnée par $J\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. De plus, $|J\varphi(u,v)| = 1$ et $\Delta = [0,1]^2$, tel que, $\Delta = \varphi^{-1}(D) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le u \le 1, \ 0 \le v \le 1\}$. Donc,

$$I = \iint_D f(x,y)dxdy = \iint_\Delta \frac{1}{1+v}dudv = \int_0^1 \Big[\int_0^1 \frac{1}{1+v}dv\Big]du = \int_0^1 \Big[\ln(1+v)\Big]_0^1 du$$

$$= \int_0^1 \ln 2du = \ln 2.$$