Exemple Pratique

Prenons un exemple pour illustrer l'utilisation de ces deux méthodes. Supposons que nous voulons approximer l'intégrale de $f(x) = \sin(x)$ sur l'intervalle $[0, \pi]$.

Méthode des Trapèzes

1. Diviser l'intervalle en $n = 4$ sous-intervalles.
2. Calculer $h = \frac{\pi - 0}{4} = \frac{\pi}{4}$.
3. Calculer les points $x_i = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi$.
4. Appliquer la formule des trapèzes.

Calculons cela :

$$\int_0^\pi \sin(x)\,dx \approx \frac{\pi}{8}\left(\sin(0) + 2(\sin(\frac{\pi}{4}) + \sin(\frac{\pi}{2}) + \sin(\frac{3\pi}{4})) + \sin(\pi)\right)$$

Les valeurs sont :

Les valeurs sont :

- $\sin(0) = 0$
- $\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$
- $\sin(\frac{3\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\sin(\pi) = 0$

Donc,

$$\int_0^\pi \sin(x)\,dx \approx \frac{\pi}{8}\left(0 + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 0\right) = \frac{\pi}{8}\left(2 + 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{8}(2 + \sqrt{2}) \approx 1.896$$

Méthode de Simpson

1. Diviser l'intervalle en $n = 4$ sous-intervalles.
2. Calculer $h = \frac{\pi - 0}{4} = \frac{\pi}{4}$.
3. Calculer les points $x_i = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi$.
4. Appliquer la formule de Simpson.

Calculons cela :

$$\int_0^\pi \sin(x)\,dx \approx \frac{\pi}{12}\left(\sin(0) + 4(\sin(\tfrac{\pi}{4}) + \sin(\tfrac{3\pi}{4})) + 2(\sin(\tfrac{\pi}{2})) + \sin(\pi)\right)$$

Les valeurs sont les mêmes que précédemment.

Donc,

$$\int_0^\pi \sin(x)\,dx \approx \frac{\pi}{12}\left(0 + 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2(1) + 0\right) = \frac{\pi}{12}(4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2) = \frac{\pi}{12}(2\sqrt{2} + 2) \approx 2.005$$

Ces deux méthodes montrent comment approcher l'intégrale de $\sin(x)$ sur $[0, \pi]$, avec la méthode de Simpson offrant une meilleure précision.

Méthode des Trapèzes en MATLAB

```
f = @(x) sin(x);
a = 0;
b = pi;
n = 4;
h = (b - a) / n;
x = linspace(a, b, n+1);
y = f(x);
integrale_trapeze = (h / 2) * (y(1) + 2 * sum(y(2:end-1)) + y(end));
```

Méthode de Simpson en MATLAB

```
f = @(x) sin(x);
a = 0;
b = pi;
n = 4;
```

```
h = (b - a) / n;

x = linspace(a, b, n+1);

y = f(x);

% Méthode de Simpson

integrale_simpson = (h / 3) * (y(1) + 4 * sum(y(2:2:end-1)) + 2 * sum(y(3:2:end-2)) +
y(end));
```

Résultats

Pour la fonction $f(x) = \sin(x)$ sur l'intervalle $[0, \pi]$ avec $n = 4$ sous-intervalles, les résultats seront :

- Méthode des trapèzes : Environ 1.89612
- Méthode de Simpson : Environ 2.00456