TP 3 : Résolution numérique des équations non-linéaires

I. Travail dirigé

On vaut résoudre numériquement l'équation :

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{(1 + x^2)} = 0 \qquad (1)$$

1) Vérifier l'existence d'une solution dans les intervalles suivants : [1.5 , 2], [5 , 6].

2) Calculer une valeur approchée à une précision $\varepsilon = 10^{-1}$ de la solution existant dans l'intervalle [1.5 , 2] en utilisant la méthode de dichotomie.

3) Calculer le nombre des itérations nécessaires pour obtenir une solution à une précision $\varepsilon = 10^{-6}$ dans l'intervalle [1.5 , 2].

4) Calculer la racine existant dans l'intervalle [1.5 , 2] à une précision $\varepsilon = 10^{-2}$ par la méthode de Newton. On prend la valeur initiale approchée de la solution $x_0 = 1.3$.

II. Travail pratique

1) Quand on fait la programmation des méthodes numérique de dichotomie et de Newton ?

2) Ecrire un programme Matlab qui permet de tracer la courbe de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle [1 , 6].

3) Matlab dispose d'une commande prédéfinie permettant le calcul du zéro (c) d'une fonction $f(x)$ existant dans un intervalle $[a, b]$. Sa syntaxe est : $c = \text{fzero}(f, [a, b])$.

En appliquant cette commande donner une valeur approchée de la racine existant dans [1.5 , 2].

4) Méthode de dichotomie

a. A partir du graphe tracé de $f(x)$, déterminer des intervalles comportant les racines.

b. Ecrire un algorithme de calcul par la méthode de dichotomie.

c. Ecrire un programme Matlab qui permet de calculer une valeur approchée de la racine existant dans l'intervalle [1.5 , 2], à la précision $\varepsilon = 10^{-2}$, par la méthode de dichotomie.

d. Exécuter ce programme pour les précisions $\varepsilon = 10^{-5}$, 10^{-7} , 10^{-9} et donner le nombre des itérations effectuées pour chaque précision. Conclure.

5) Méthode de Newton

a. A partir du graphe tracé de la fonction $f(x)$, choisir une valeur initiale x_0 proche de la première racine.

b. Ecrire un algorithme de calcul pour la méthode de Newton.

c. Ecrire un programme Matlab qui permet de calculer une valeur approchée de la première racine à la précision $\varepsilon = 10^{-3}$, par la méthode de Newton, en utilisant la valeur initiale x_0 déterminée en **a.**

d. Exécuter ce programme pour la précision $\varepsilon = 10^{-8}$. Conclure.

<u>Corrigé de TP 3</u> : Résolution numérique des équations non-linéaires

I. <u>Travail dirigé</u>

1) On utilise le théorème des valeurs intermédiaires :

$f(1.5) \times f(2) = -0.0018 < 0$; donc il existe une racine dans cet intervalle.

$f(5) \times f(6) = 0.00028312 > 0$; donc il n'existe pas une racine dans cet intervalle.

2) La méthode de dichotomie :

$f(1.5) \times f(2) = -0.0018 < 0$

Itération 1 : l'intervalle $[1{,}5\,,2]$ contient la racine α

$m = \frac{a+b}{2} = \frac{1{,}5+2}{2} = 1{,}75$

$f(1{,}5) \times f(1{,}75) = -9{,}54 \times 10^{-4} < 0$

$f(1{,}75) \times f(2) = 3{,}65 \times 10^{-3} > 0$

Itération 2 : l'intervalle $[1{,}5\,,1{,}75]$ contient la racine c

$m = \frac{a+b}{2} = \frac{1{,}5+1{,}75}{2} = 1{,}625$

$f(1{,}5) \times f(1{,}625) = -3{,}23 \times 10^{-4} < 0$

$f(1{,}625) \times f(1{,}75) = 6{,}52 \times 10^{-4} > 0$

Itération 3 : l'intervalle $[1{,}5\,,1{,}625]$ contient la racine c

$m = \frac{a+b}{2} = \frac{1{,}5+1{,}625}{2} = \mathbf{1{,}5}625$

$f(1{,}5) \times f(1{,}5625) = 5{,}24 \times 10^{-5} > 0$

$f(1{,}5625) \times f(1{,}625) = 3{,}58 \times 10^{-5} < 0$

Itération 4 : l'intervalle $[1{,}5625\,,1{,}625]$ contient la racine c

$m = \frac{a+b}{2} = \frac{1{,}5625+1{,}625}{2} = \mathbf{1{,}5}9375$

A partir de l'itération 3, un chiffre après la virgule devient constant, donc la racine à une précision de 10^{-1} est : $c \simeq m \simeq 1{,}5$

3) Le nombre des itérations nécessaires pour obtenir une solution à une précision 10^{-6} dans l'intervalle $[1.5\,,2]$.

$$\text{Pour } \varepsilon = 10^{-6}\,;\ n > \frac{\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\ln 2} \Rightarrow n > \frac{\ln\left(\frac{2-1{,}5}{10^{-6}}\right)}{\ln 2} \Rightarrow n > 18{,}93 \text{ donc } n = 19$$

4) Méthode de Newton :

On a : $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{(1+x^2)} \Rightarrow f'(x) = \frac{(-\sin(x))(1+x^2)-(2x)\cos(x)}{(1+x^2)^2}$$

On fait alors le calcul numérique :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1.3 - \frac{f(1.3)}{f'(1.3)} = 1.5189$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.5189 - \frac{f(1.5189)}{f'(1.5189)} = 1.5685$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1.5708$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 1.5708$$

la racine à une précision 10^{-2} est donc $c = 1.57$ qui se stabilise à l'itération 4.

II. <u>Travail pratique</u>

1) Lorsque le nombre des itérations nécessaire pour une solution approchée à une certaine précision est grand ($n > 5$).

2) Programme Matlab qui permet de tracer la courbe de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle $[1\,,6]$.

```
clear all;close all;clc;
a=1;b=6;n=40;
h=(b-a)/n;
x= a:h:b;
f=@(x)cos(x)./(1+x.^2);
plot(x,f(x))
title('Courbe de f(x)')
xlabel('x')
ylabel('f')
grid
```

4) Méthode de dichotomie

a. A partir du graphe tracé de $f(x)$, il y a deux racines : $c_1 \in [1.5\,,2]\,, c_2 \in [4.5\,,5]$

b. Algorithme de calcul par la méthode de dichotomie :

1. Donner $f(x)$, $[a, b]$ où se trouve une racine, une précision ε, la condition de convergence, et un nombre maximal d'itérations N.
2. Calculer : $c = \frac{a+b}{2}$

3. Si $\frac{|b-a|}{2|c|} \leq \varepsilon$; convergence atteinte, écrire la racine c, écrire $f(c)$, écrire le nombre des itérations et arrêter le calcul.
4. Si $\frac{|b-a|}{2|c|} > \varepsilon$; on a trois cas possibles :

a) Si $f(a) \times f(c) < 0$, alors $b = c$

b) Si $f(c) \times f(b) < 0$, alors $a = c$

c) Si le nombre maximale d'itération N est atteint ; convergence non atteinte en N itérations, arrêter le calcul.

5. Retour à l'étape 2.

c. Programme Matlab de la méthode de dichotomie :

c. Programme Matlab de la méthode de dichotomie :

```
close all;clear all;clc;
a=1.5;
b=2;
c=(a+b)/2;
f=@(x)cos(x)/(1+x^2);
eps=1e-2;
k=0;
while abs(b-a)>eps
if f(a)*f(c)<0
b=c;
end
if f(b)*f(c)<0
a=c;
end
c=(a+b)/2;
k=k+1;
end
k
c
f(c)
```

Après l'exécution de ce programme on obtient le résultat suivant :

Le nombre des itérations effectués : k =6

La valeur approchée de la racine : c_1 = 1.5742

Vérification : $f(c_1)$ = -9.8397e-004

d. On change la précision, on obtient :

La précision ε	10^{-2}	10^{-5}	10^{-7}	10^{-9}
La racine c_1	1.5742	1.5708	1.5708	1.5708
Nombre d'itération k	6	16	23	29

Conclusion : Plus la précision est élevée plus le nombre des itérations effectuées est grand.

---

5) Méthode de Newton

a. A partir le graphe tracé on choisit par exemple : $x_0 = 1.3$

b. Algorithme de calcul pour la méthode de Newton :

1. Donner $f(x)$, une précision ε, une valeur initiale x_0 de la solution, la condition de convergence, et un nombre maximal d'itérations N.
2. Calculer x_1 à partir de x_0 par la relation :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

3. Si $\frac{|x_1 - x_0|}{|x_1|} \leq \varepsilon$; convergence atteinte, écrire la solution $c = x_1$, écrire $f(c)$, écrire le nombre des itérations et arrêter le calcul.
4. Si $\frac{|x_1 - x_0|}{|x_1|} > \varepsilon$; poser $x_0 = x_1$.
   Si le nombre maximale d'itération N est atteint ; convergence non atteinte en N itérations, arrêter le calcul.
5. Retour à l'étape 2.

Remarque : pratiquement on remplace les conditions $\frac{|x_1 - x_0|}{|x_1|} \leq \varepsilon$ et $\frac{|x_1 - x_0|}{|x_1|} > \varepsilon$ par respectivement $|f(x_1)| \leq \varepsilon$ et $|f(x_1)| > \varepsilon$ pour éviter le cas de division par zéro.

c. Programme Matlab de la méthode de Newton :

```
close all;clear all;clc;
f=@(x)cos(x)/(1+x^2);
df=@(x)(-sin(x)*(1+x^2)-2*x*cos(x))/((1+x^2)^2);
eps=1e-3;
x0=1.3;
xn=x0;
k=0;
while abs(f(xn))>eps
xn1=xn-f(xn)/df(xn);
xn=xn1;
k=k+1;
end
k
c=xn
f(c)
```

Après l'exécution de ce programme on obtient le résultat suivant :

Le nombre des itérations effectués : k =2

La valeur approchée de la racine : $c_1 = 1.5685$

Vérification : $f(c_1) = 6.7060e-004$

d. On change la précision par 10^{-8} :

Après l'exécution on obtient :

Le nombre des itérations effectués : k =4

La valeur approchée de la racine : $c_1 = 1.5708$

Vérification : $f(c_1) = 6.1890e-012$

Conclusion : La méthode de Newton est très rapide (un nombre d'itération petit permet d'obtenir une racine avec une grande précision).