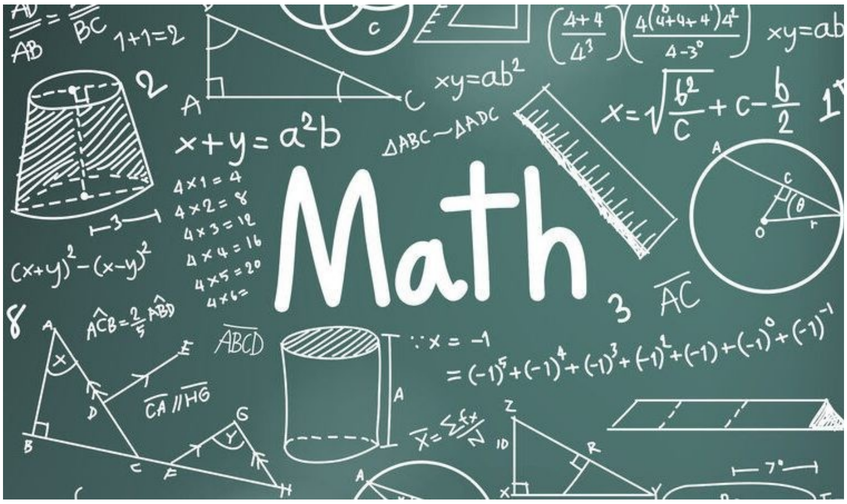
قسم العلوم المالية والمحاسبة

مفاهيم عامة حول المتتاليات العددية

السنة الجامعية 2025/2024

بوشامة كوثر



قائمة المحتويات

مقدمة

تاريخ المتتاليات يعود إلى عدة قرون حيث بدأت الدراسات حول السلاسل العددية والأنماط التي تتكون من تسلسل من الأرقام والعناصر والعمليات المتتابعة .تطورت تدريجياً في القرن الثالث قبل الميلاد، حيث قدم العالم اليوناني أرخيميدس بعض الأفكار الأولية حول المتتاليات، ولكن التطور الحقيقي في هذا المجال حدث في العصور الوسطى وما بعدها. وقد ساهم علماء مثل ليوناردو فيبوناتشي في تطوير فهمنا للمتتاليات والأنماط الرياضية.

خلال العصور الحديثة، شهدت دراسة المتتاليات تطورًا هائلًا مع تقدم الرياضيات وظهور الحوسبة. فتحليل المتتاليات وتطبيقاتها أصبحت جزءًا أساسيًا من الرياضيات التطبيقية والعلوم الهندسية والاقتصادية وعلوم الحاسوب وغيرها.

I تعاريف عامة حول عموميات المتتاليات

تعريف : نسمي متتالية عددية كل تطبيق من $\mathbb{N}$ (أو جزء من) نحو $\mathbb{R}$. نرمز عادة للمتتالية ب $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أو اختصارا (u_n) . u_n يسمى الحد بالحد العام للمتتالية .

يمكن تعريف متتالية عددية بعدة طرق :

1. بعبارة صريحة بدلالة n، حيث يعطى الحد العام على شكل عبارة رياضية بدلالة n.
2. بعلاقة تراجعية، حيث يعطى الحد الأول (أو الحدود الأولى) وعلاقة رياضية تسمح بحساب أي حد من المتتالية انطلاقا من الحدود السابقة.

أمثلة:

1. متتالية معرفة بعبارة صريحة بدلالة n : $u_n=\sqrt{n},\ u_n=2n+1, u_n=(-1)^n$
2. متتالية معرفة بعلاقة تراجعية : ليكن $u_0=-1$ ومن أجل كل $n\geq 1$: $u_n=\dfrac{u_{n-1}+2}{4}$.

آ. المتتاليات المحدودة

- نقول عن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أنها محدودة من الأعلى إذا وجد عدد حقيقي $M\in\mathbb{R}$ بحيث: $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\leq M$.
- نقول عن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أنها محدودة من الأسفل إذا وجد عدد حقيقي $m\in\mathbb{R}$ بحيث: $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\geq m$.
- نقول عن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أنها محدودة من الأعلى و من الأسفل أي: $\exists m, M\in\mathbb{R},\ m\leq u_n\leq M\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}$.

ب. المتتاليات الرتيبة

نقول عن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أنها:

- متزايدة إذا كان: $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}\geq u_n$.
- متناقصة إذا كان: $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}\leq u_n$.
- ثابتة إذا كان: $C\in\mathbb{R}$ $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=u_n=C\ ,$.
- رتيبة إذا كانت متزايدة أو متناقصة.

مثال

1.المتتالية المعرفة ب: $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\ldots,\frac{1}{n},\ldots$ متناقصة تماما.

2.المتتالية المعرفة ب: $\forall n\in\mathbb{N}: u_n=\sqrt{n}$ متزايدة تماما.

ب. المتتالية المتقاربة

تعريف

نقول عن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أنها متقاربة إذا كانت تملك نهاية منتهية ووحيدة $l\in\mathbb{R}$ أي : $\lim_{n\to\infty} u_n=l$ ، إذا كانت المتتالية ليست متقاربة فهي متباعدة.

ملاحظات:

- كل متتالية متقاربة محدودة.
- كل متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.
- كل متتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة.

مثال

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة ب:

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_n = \frac{1}{n} + 2, \end{cases}$$

المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة من الأعلى ب :3 ومن الأسفل ب:2.

II المتتاليات الحسابية والمتتاليات الهندسية

آ. المتتاليات الحسابية

تعريف

نسمي متتالية حسابية ذات الأساس r كل متتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تحقق: $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=u_n+r$

تعطى عبارة الحد العام للمتتالية الحسابية ب: $u_n=u_0+nr$ إذا كان الحد الأول للمتتالية هو u_0،

وبـ : $u_n=u_p+(n-p)r$ إذا كان الحد الأول للمتتالية هو u_p.

مجموع حدود متتالية حسابية:

مجموع حدود متتالية حسابية إذا كان الحد الأول للمتتالية هو u_0 يعطى بـ :

$$S_n=u_0+u_1+u_2+...+u_n=(u_0+u_n)\frac{(n+1)}{2}$$

حيث $(n+1)$ هو عدد الحدود=دليل الحد الأخير -دليل الحد الأول +1.

اتجاه تغير متتالية حسابية :

لتكن متتالية حسابية ذات الأساس r. نقول أن المتتالية :

1. متزايدة اذا كان $r>0$.
2. متناقصة اذا كان $r<0$.
3. ثابتة اذا كان $r=0$.

خاصية:

لتكن a و b و c بهذا الترتيب حدود متتابعة لمتتالية حسابية فإن: $a+c=2b$ ، b يسمى الوسط الحسابي للحدين a و c.

الفائدة البسيطة: تعرف الفائدة البسيطة بالعلاقة: $u_n=u_0(1+nr)$ حيث :

- r معدل الفائدة.
- n عدد السنوات.
- u_0 قيمة المبلغ في البداية.
- u_n مجمل نهاية الفترة.

مثال

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية متناقصة حدها الأول u_0 وأساسها r.

- عين u_2 و r علما أن :

$$\begin{cases} u_1+u_2+u_3=24 \\ u_1^2+u_2^2+u_3^2=210, \end{cases}$$

- استنتج u_n بدلالة n ثم احسب المجموع: $S_n=u_0+u_1+u_2+...+u_n$.

الحل:

- تعين u_2 و r لدينا الوسط الحسابي : $u_1 + u_3 = 2u_2$ نعوض في المعادلة الأولى المعطاة نجد: $2u_2 + u_2 = 24$ يكافئ $u_2 = 8$.
- الأساس r:

لدينا: $u_3 = u_2 + (3-2)r = 8 + r$ و $u_1 = u_2 + (1-2)r = 8 - r$

نعوض في المعادلة الثانية المعطاة : $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 210$

نجد: $(8-r)^2 + 8^2 + (8+r)^2 = 210$

بالنشر والتبسيط نجد:

$2r^2 + 192 = 210$ أي أن $r^2 = 9$ ومنه $r = 3$ مرفوض او $r = -3$ مقبول لأن المتتالية متناقصة.

- حساب الحد الأول: لدينا $u_0 = u_2 + (0-2)r = 8 - 2r$ ومنه $u_0 = 14$.
- كتابة u_n بدلالة n : $u_n = u_0 + nr$ مع $u_0 = 14$ و $r = 3$.
- المجموع: $S_n = (u_0 + u_n)\dfrac{(n+1)}{2} = (28 - 3n)\dfrac{(n+1)}{2}$.

ب. المتتاليات الهندسية

تعريف

نسمي متتالية هندسية ذات الأساس q كل متتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تحقق: $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = qu_n$ ، تعطى عبارة الحد العام للمتتالية الهندسية ب: $u_n = u_0 q^n$ إذا كان الحد الأول للمتتالية هو u_0، وبـ : $u_n = u_p q^{n-p}$ إذا كان الحد الأول للمتتالية هو u_p.

مجموع حدود متتالية هندسية: مجموع حدود متتالية هندسية إذا كان الحد الأول للمتتالية هو u_0 يعطى بـ : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_0\dfrac{(1-q^{n+1})}{1-q}$ حيث $(n+1)$ هو عدد الحدود=دليل الحد الأخير -دليل الحد الأول +1.

اتجاه تغير متتالية هندسية : لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية ذات الأساس q . نقول أن المتتالية :

1. متزايدة إذا كان $q > 0$.
2. متناقصة إذا كان $q < 0$.
3. ثابتة إذا كان $q = 1$.
4. $|q| < 1$ فإن: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة ونهايتها تساوي الصفر.

خاصية: لتكن a و b و c بهذا الترتيب حدود متتابعة لمتتالية هندسية فإن: $ac = b^2$ ، b يسمى الوسط الهندسي للحدين a و c.

الفائدة المركبة: تعرف الفائدة المركبة بالعلاقة: $u_n = u_0(1+r)^n$ حيث :

- r معدل الفائدة.
- n عدد السنوات.
- u_0 البداية في المبلغ قيمة.
- u_n مجمل نهاية الفترة.

مثال

ادخر احمد مبلغ بفائدة مركبة تقدر ب: 8% مدة ستة سنوات. فوجد جملت المبلغ 16858دج.

- كم اصل المبلغ.

الحل:

$$u_n = u_0(1+r)^n,$$
$$u_6 = 16858 = u_0(1+0.08)^6,$$
$$u_0 = \frac{16858}{(1+0.08)^6}.$$