الرياضيات المالية

Mathématiques Financières

لطلبة العلوم الاقتصادية

الدكتور

محمد بداوي

2022

دار الضحى للنشر والإشهار

الجلفة - الجزائر

Dareldouha2014@gmail.com

027.92.27.38/05.50.87.37.71

الطبعة الأولى

2022

الإيداع القانوني: سبتمبر

ردمك: 978-9931-247-00-4

الطبعة الأولى

2022

الإيداع القانوني: سبتمبر

ردمك: 978-9931-247-00-4

تصميم وتنسيق **محمد الطاهر بن دومة**

الرياضيات المالية

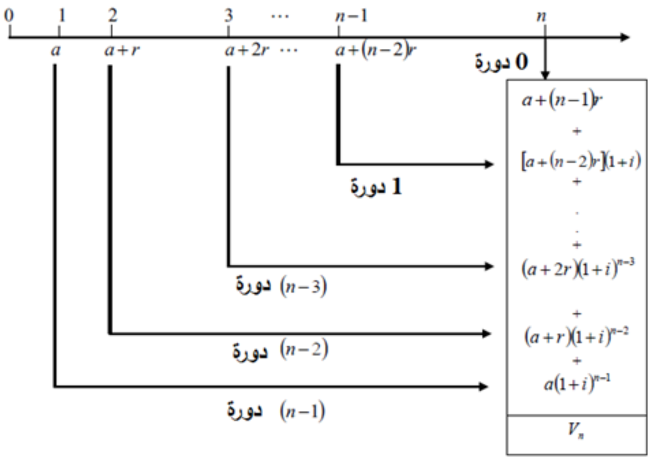
Mathématiques financières

الأستاذ: محمد بداوي

لطلبة:

العلوم الإقتصادية

$$V_0 = \left(a + \frac{r}{i} + nr\right) \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - \frac{nr}{i}$$



قال الله عز وجل في كتابه الحكيم:

﴿ وَقُلِ اعْمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُمْ وَرَسُولُهُ وَالْمُؤْمِنُونَ ﴾

[سورة التوبة: 105]

براءة ذمة

قال الله تعالى: ﴿ **الَّذِينَ يَأْكُلُونَ الرِّبَا لَا يَقُومُونَ إِلَّا كَمَا يَقُومُ الَّذِي يَتَخَبَّطُهُ الشَّيْطَانُ مِنَ الْمَسِّ ذَٰلِكَ بِأَنَّهُمْ قَالُوا إِنَّمَا الْبَيْعُ مِثْلُ الرِّبَا وَأَحَلَّ اللَّهُ الْبَيْعَ وَحَرَّمَ الرِّبَا فَمَن جَاءَهُ مَوْعِظَةٌ مِّن رَّبِّهِ فَانتَهَىٰ فَلَهُ مَا سَلَفَ وَأَمْرُهُ إِلَى اللَّهِ وَمَنْ عَادَ فَأُولَٰئِكَ أَصْحَابُ النَّارِ هُمْ فِيهَا خَالِدُونَ**﴾ [البقرة:275].

هدفنا من إنجاز هذا الكتاب هو التعرف على ميكانيزمات عمل سعر الفائدة ، والتي تندرج ضمن تعلم خطط غيرنا (أعرف عدوك) ، قصد المساهمة في المستقبل في إيجاد نظام مصرفي يتوافق مع أحكام شرعنا الحنيف.

فهرس الكتاب:

الموضوع	الصفحة
مقدمة	**6**
الفصل الأول: مراجعة حول المتتاليات العددية تعريف المتتاليات ، خصائصها ، المتتالية الحسابية، المتتالية الهندسية	**14- 7**
الفصل الثاني: الفوائد البسيطة مشكلة المعدل اليومي، القيمة المكتسبة، القيمة الحالية لرأس المال مودعة بفائدة بسيطة ، الفوائد المدفوعة مسبقا والفوائد المدفوعة لاحقا ، المعدل المتوسط للإيداع (التوظيف) ، معدل الفائدة الفعلي أو المعدل الحقيقي للعملية المالية ، الخصم (البنكي ، التجاري ، العقلاني) ، صافي قيمة الخصم ، معدل الخصم الحقيقي ، تكافؤ أوراق تجارية ، تمارين محلولة.	**44 -15**
الفصل الثالث :الفوائد المركبة مفهوم معادلات الفرق، القيمة المكتسبة، القيمة الحالية لرأس المال مودعة بفائدة مركبة ، مدة الايداع وفقا لفائدة مركبة ، التكافؤ وفق الفوائد المركبة ، المعدلات المتكافئة ، الرسملة والتحيين في الزمن المستمر ، معدل الرسملة المستمر المكافئ ، تمارين محلولة	**65 -45**
الفصل الرابع : الدفعات الدفعات الثابتة في نهاية الفترة (الدورة)، الدفعات الثابتة في بداية الفترة (الدورة)، الدفعة الدائمة للتدفقات الثابتة ، الدفعات المتغيرة ، الدفعات الكيفية في نهاية المدة ، الدفعات الكيفية في بداية المدة	**86 -66**

، الدفعات التزايدية (ذات التزايد الحسابي ، ذات التزايد الهندسي) ، تمارين محلولة.	
الفصل الخامس : القروض التحديات ، القروض غير المجزأة (العادية) : (خصائصها ، طرق تسديدها ، جدول استهلاك قرض) ، القروض السندية : (خصائصها ، طرق تسديدها ، جدول استهلاك قرض ، معدل العائد الاكتواري ، جباية السندات) ، تمارين محلولة .	**145 -87**
الفصل السادس : مردودية الاستثمارات اختيار الاستثمارات ، معايير اختيار الاستثمارات : صافي القيمة الحالية (VAN) ، معدل العائد الداخلي (TRI)، مؤشر الربحية (PI) ، تمارين محلولة.	**165 - 146**
قائمة المراجع	**166**

مقدمة:

الحمد لله رب العالمين ، والصلاة والسلام على خاتم النبيئين وسيد المرسلين، نبينا محمد الهادي الأمين الذي بعثه الله رحمة للعالمين، وعلى أله وأصحابه وأنصاره وأتباعه ومن أهتدى بهديه وعمل بسنته إلى يوم الدين، و بعد:

يتضمن هذا الكتاب دروس موجهة الى طلبة ليسانس (شعبة علوم اقتصادية)، حيث شعر المؤلف بالحاجة لمثل هذا الكتاب من خلال تدريسه لمقياس الرياضيات العامة، ومن خلال إشرافه على عدد من المذكرات، ويمكن أن يكون هذا الكتاب بما يحويه ، وبما يتضمنه من أمثلة تطبيقية عديدة، ذو فائدة لقطاع واسع من القراء المهتمين بالرياضيات المالية والأدوات الكمية المطبقة في البنوك.

إن هذا الكتاب كأي نتاج علمي لا يخلو من النواقص والهفوات، وكل أملنا أن يساهم في تطوير البحث العلمي.

أتقدم بشكري إلى أخي **بن دومة محمد الطاهر** وذلك لتصميمه الرائع لغلاف هذا الكتاب ، ونسأل الله أن يجعل هذا العمل خالصا لوجهه الكريم، ويجعله في ميزان حسناتنا، وأن ينفع به الطلاب والدارسين، وأي ملاحظة علمية يرجى إرسالها عبر بريدنا الالكتروني التالي: m.badaoui@lagh-univ.dz

و الله الموفق

المؤلف الأغواط – الجزائر- 2022/08/05

الفصل الأول: مراجعة حول المتتاليات العددية

Révision sur les Suites numériques

1-1- تمهيد:

تلعب المتتاليات دورا كبيرا في الحسابات التي نقوم بها في حياتنا العملية ، ولكثرة استخدامها في تطبيقات الرياضيات المالية ، خصصنا لها فصل مستقل يشرح ميكانيزمات عملها.

1-2- تعريف المتتاليات:

هي تطبيق من $\mathbb{N}$ نحو $\mathbb{R}$ ونكتب:

$$\begin{aligned} U &: \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n &\to u(n) = u_n \end{aligned}$$

نرمز للمتتالية بـ u أو $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$، u_n يدعى بالحد العام.

ملاحظة:

هناك طريقتان لتوليد متتالية وهما:

1- تعيين متتالية بإعطاء العبارة الصريحة للحد العام.

2- تعيين متتالية بعلاقة تراجعية.

مثال1:

(u_n) , (v_n) متتاليتين معرفتين كالاتي:

$$u_n = \left(\frac{-1}{5}\right)^n$$
$$v_{n+1} = 5v_n + 2 \quad ; \quad v_0 = 1$$

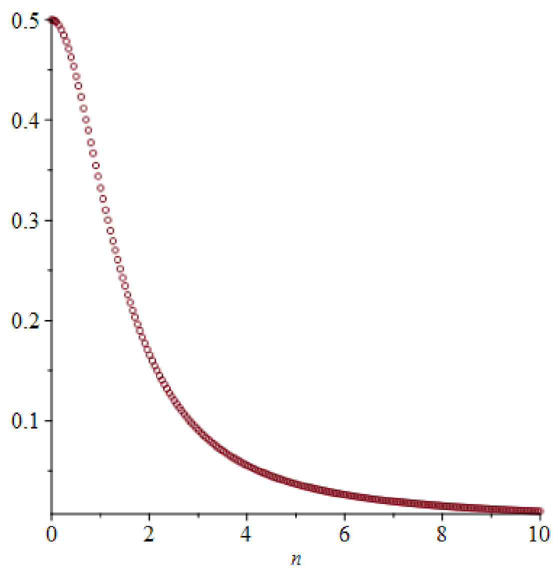
المتتالية u_n معرفة بحدها العام، أما المتتالية v_n فهي تراجعية.

ويمكن إعطاء تمثيل بياني للمتتالية بواسطة برنامج Maple، فعلى سبيل المثال نأخذ المثال التالي: $u_n = \frac{1}{n^2+2}$

> $seq\left(\frac{1}{n^2+2}, n = 0 .. 10\right);$

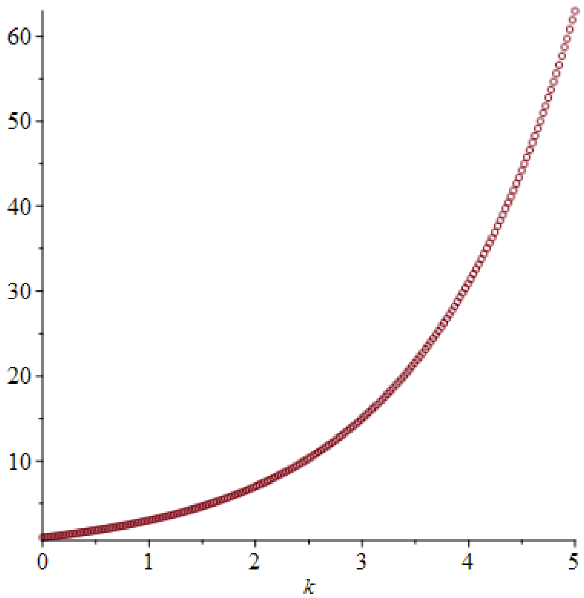
$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{11}, \frac{1}{18}, \frac{1}{27}, \frac{1}{38}, \frac{1}{51}, \frac{1}{66}, \frac{1}{83}, \frac{1}{102}$$

> $plot\left(\left\{\frac{1}{n^2+2}\right\}, n = 0 ..10, style = point, symbol = circle\right);$



لنأخذ مثال ثاني حول متتالية تراجعية ، حيث: $v_{n+1} = 2v_n + 1 \quad ; \quad v_0 = 1$ لنجد الستة حدود الأولى مع إعطاء تمثيل بياني للمتتالية بواسطة برنامج Maple

```
> restart;
> {v(n+1) = 2·v(n) + 1, v(0) = 1};
                    {v(0) = 1, v(n+1) = 2 v(n) + 1}
> rsolve( %, v(k) );
                              2 2^k − 1
> seq( subs( k=j, %), j = 0 ..5 );
                          1, 3, 7, 15, 31, 63
> plot({2 2^k − 1}, k = 0 ..5, style = point, symbol = circle);
```



1-3- خصائص:

أولا: اتجاه تغير متتالية:

نقول عن متتالية u_n متزايدة تماما، يعني أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} > u_n$.

نقول عن متتالية u_n متناقصة تماما، يعني أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} < u_n$.

نقول عن متتالية u_n أنها ثابتة، يعني أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n$.

مثال2:

u_n ، v_n متتاليتين معرفتين من أجل كل عدد طبيعي n بالعبارتين التاليتين:

$u_n = 6n+1$: متتالية متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ $(u_{n+1} > u_n)$.

$v_0 = 2$, $v_{n+1} = \sqrt{(v_n)}$: متتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ $(v_{n+1} < v_n)$.

ثانيا: المتتالية الحسابية:

نقول عن u_n أنها متتالية حسابية إذا كان:

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = u_n + r$$

r : هو أساس المتتالية، أما عبارة الحد العام لما $(r \neq 0)$ هي كما يلي:

$$u_n = u_\alpha + (n-\alpha)r$$

أما مجموع حدود هذه المتتالية $(S_n = u_\alpha + u_{\alpha+1} + ... + u_n)$ فهو كما يلي:

بمأن عدد الحدود هو: $(n-\alpha+1)$ فأن: $S_n = \dfrac{(n-\alpha+1)}{2}[u_\alpha + u_n]$

أما الوسط الحسابي فهو كما يلي: إذا كان c,b,a حدود متتابعة من متتالية حسابية u_n فأن:

$$2b = a + c$$

مثال3:

u_n متتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها r ، المطلوب:

1- عين أساس المتتالية u_n n، علما أن $u_6=10$ و $u_{14}=26$.

2- أحسب u_0 ثم أعط عبارة u_n بدلالة.

3- أحسب المجموع S حيث: $S=u_0+u_1+.....+u_{99}$.

حل المثال3:

1- لدينا: $u_6=10$ و $u_{14}=26$ ، إذن:

$$u_{14}=u_6+8r \Rightarrow 8r=u_{14}-u_6=26-10=16$$
$$\therefore 8r=16 \Rightarrow r=2$$

2- حساب u_0 : $u_6=u_0+6r \Rightarrow u_0=u_6-12=10-12=-2$

$$u_n=-2+2n$$

3- حساب المجموع S حيث: $S=u_0+u_1+.....+u_{99}$:

$$u_{99}=u_0+99r \Rightarrow -2+198=196$$

$$S_n=\frac{(n-\alpha+1)}{2}[u_\alpha+u_n]=\frac{(99-0+1)}{2}[u_0+u_{99}]=50(-2+196)=9700$$

باستخدام Maple المجموع يكون كالاتي:

```
> partial_sum := m→sum(-2 + 2 n, n = 0 ..99);
```

$$partial\_sum := m \mapsto \sum_{n=0}^{99}(-2+2n)$$

```
> partial_sum(m);
```

$$9700$$

ثالثا: المتتالية الهندسية:

نقول عن u_n أنها متتالية هندسية إذا كان:

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = u_n . q$$

q : هو أساس المتتالية، أما عبارة الحد العام لما ($q \neq 0$ و $q \neq 1$) هي كما يلي:

$$v_n = v_\beta . q^{n-\beta}$$

أما مجموع حدود هذه المتتالية ($S_n = v_\beta + v_{\beta+1} + ... + v_n$) فهو كما يلي:

بمأن عدد الحدود هو: $(n - \beta + 1)$ فأن: $S_n = v_\beta \left[\dfrac{1 - q^{n-\beta+1}}{1-q} \right]$

أما الوسط الهندسي فهو كما يلي: إذا كان c,b,a حدود متتابعة من متتالية هندسية v_n فأن:

$$b^2 = a.c$$

مثال4:

v_n متتالية هندسية حدها الأول v_1 وأساسها q و $v_4 \times v_6 = 16$، المطلوب:

1- عين أساس المتتالية v_n علما أن $\mathrm{v}_1 = \dfrac{1}{4}$.

2- أعط عبارة v_n بدلالة n.

3- أحسب المجموع S حيث: $S = v_1 + v_2 + ... + v_n$.

حل المثال4:

1- لدينا:

$$v_4 \times v_6 = 16$$
$$v_4 = v_1.q^3$$
$$v_6 = v_1.q^5$$
$$v_4 \times v_6 = 16$$
$$\therefore \frac{1}{4}.q^3 \times \frac{1}{4}.q^5 = \frac{q^8}{16} = 16$$
$$\therefore q^8 = 256 \Rightarrow q = 2$$

2- عبارة v_n بدلالة n :

$$v_n = v_1.q^{n-1} = \frac{1}{4}2^{n-1}$$

3- حساب المجموع S حيث: $S = v_1 + v_2 + ... + v_n$:

$$S_n = v_1\left[\frac{1-q^{n-1+1}}{1-q}\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{1-2^n}{1-2}\right] = \frac{-1}{4}\left(1-2^n\right)$$

باستخدام Maple المجموع يكون كالاتي:

$$> \; partial\_sum := m \rightarrow sum\left(\frac{1}{4} \cdot 2^{n-1}, n = 1..n\right);$$

$$partial\_sum := m \mapsto \sum_{n=1}^{n} \frac{2^{n-1}}{4}$$

وإذا فرضنا أن $n = 10$ فالمجموع يكون كالاتي:

$$> partial\_sum := m \rightarrow sum\left(\frac{1}{4}\cdot 2^{n-1}, n = 1..10\right);$$

$$partial\_sum := m \mapsto \sum_{n=1}^{10} \frac{2^{n-1}}{4}$$

$$> partial\_sum(m);$$

$$\frac{1023}{4}$$

$$> evalf\left(\frac{1023}{4}\right);$$

$$255.7500000$$

الفصل الثاني: الفوائد البسيطة Les intérêts simples

2-1- تمهيد:

الفائدة هي تكلفة اقتراض المال وهي بمثابة رسوم إضافية يدفعها المقترض للمقرض مقابل المبلغ المقترض، يتم تحديد الفائدة البسيطة بضرب معدل الفائدة اليومي في رأس المال في عدد الأيام التي تنقضي بين الدفعات.

ينطبق هذا النوع من الفائدة عادة على القروض قصيرة الأجل(الأقل من سنة).

الصيغة العامة للفائدة البسيطة تعطى كالتالي:

$$I = C \times t \times n$$

حيث:

I : مبلغ الفائدة البسيطة.

C : رأس المال المقترض أو الموظف.

t : معدل الفائدة.

n : مدة الاقتراض أو التوظيف.

ملاحظة:

معدل الفائدة مرتبط بالفترة المختارة كوحدة: وبالتالي، إذا تم التعبير عن n بالأيام، يجب أن يكون المعدل t بالأيام، إذا تم التعبير عن n بالأشهر فيجب أن يكون المعدل t بالأشهر وما إلى ذلك.

في حالة عدم وجود أي شرط أخر يُفترض دائما أن يُعبر عن معدل الفائدة سنويا.

2-2- مشكلة المعدل اليومي:

السنة بها 365 أو 366 يوم (السنة الكبيسة bissextile [1])، لتحديد المعدل اليومي المتناسب مع المعدل السنوي t_a ، نقسم المعدل السنوي على 365 أو 366 ، لتسهيل حساب المعدل سيتم العمل بالسنة التجارية (360 يوما)، وعلى الرغم من هذا فقد تختلف الاستخدامات من نوع إلى أخر بخصوص المعاملات المالية ، و حتى على بعض فئة من الزبائن ، على سبيل المثال: يتم دائما حساب مقدار قسائم السندات بالعدد الفعلي للأيام ، ولكن يتم استخدام 360 يوما لمعاملات سوق المال، بالنسبة للعمليات الأخرى مثل عمليات الخصم لا يوجد تجانس، ويمكننا العثور على الحسابات باستخدام 360 وكذلك مع 365 يوما، وتجدر الإشارة إلى أنه حتى إذا كان الأساس المستخدم لحساب المعدل اليومي هو 360 يوما فإنه يتم حساب عدد أيام العملية المالية على مدار مدتها بالضبط (الأشهر التقويمية: 31 يوما في جانفي ، 28 أو 29 في فيفري ، 31 مارس .... إلخ).

[1] - السنوات الكبيسة هي:

-إما أن تقبل القسمة على 4 ولكن لا تقبل القسمة على 100 ؛

-إما أن تقبل القسمة على 400.

أمثلة:

2014 -غير قابلة للقسمة على 4 (4/2014 = 503.5) ؛ لذا فهي ليست سنة كبيسة.

2016 -هي سنة كبيسة ، لأن 2016 قابلة للقسمة على 4 (4/2016 = 504).

2100 -ليست سنة كبيسة ، لأن 2100 قابلة للقسمة على 4 ولكنها أيضا قابلة للقسمة على 100 وغير قابلة للقسمة على 400.

- هناك استثناء بالنسبة لسنوات 2000 ، 4000 ، 6000، ....، مثلا: 2000 سنة كبيسة لأنها قابلة للقسمة على 400 (لكن أيضا قابلة للقسمة على 100).

مثال1:

أراد شخص توظيف مبلغ قدره 1600 دج في بنك ما وبمعدل فائدة قدره 8 % سنويا لمدة سنة.

المطلوب:

1- ما مقدار الفائدة التي سيحصل عليها هذا الشخص بعد مرور سنة واحدة من توظيف هذا المبلغ ؟
2- إذا قرر هذا الشخص سحب أمواله بعد 7 أشهر من الايداع، ما هو مقدار الفائدة التي سيحصل عليها ؟
3- إذا قرر هذا الشخص سحب أمواله بعد 150 يوم من الايداع، ما هو مقدار الفائدة التي سيحصل عليها ؟

حل المثال1:

$$1)\quad I=\frac{C\times t\times n}{100}=\frac{1600\cdot 8\cdot 1}{100}=128DA$$

$$2)\quad I=\frac{C\times t\times n}{1200}=\frac{1600\cdot 8\cdot 7}{1200}=74.67DA$$

$$3)\quad I=\frac{C\times t\times n}{36000}=\frac{1600\cdot 8\cdot 150}{36000}=53.33DA$$

2-3- القيمة المكتسبة، القيمة الحالية لرأس المال مودعة بفائدة بسيطة:

Valeur acquise, valeur actuelle d'un capital placée avec intérêt simple:

القيمة المكتسبة لرأس المال هي مقدار رأس المال مضاف إليه الفائدة المحصلة.

القيمة المكتسبة من رأس المال= القيمة الحالية لرأس المال + الفائدة (محسوبة على القيمة الحالية لرأس المال).

$$VA = C + I$$

$$VA = C + \frac{C \times t \times n}{100} = C\left(1 + \frac{t \times n}{100}\right)$$

ملاحظة:

يتم احتساب الفائدة دائما على قيمة رأس المال الأولي (في بداية العملية)، أي على القيمة الحالية لرأس المال.

مثال2:

أحسب القيمة المكتسبة لرأس مال 20000 دج مستثمر بمعدل 4٪ لمدة سنة واحدة.

حل المثال2:

$$VA = C\left(1 + \frac{t \times n}{100}\right) = 20000\left(1 + \frac{4 \times 1}{100}\right) = 20800DA$$

مثال3:

أحسب القيمة الحالية لرأس المال المستثمر لمدة عام واحد بمعدل 2.5٪ ، والتي تبلغ في نهاية العملية 150000 دج.

حل المثال3:

هذه المرة، لا نعرف قيمة رأس المال الأولي الذي تُحسب الفائدة عليه، لذلك علينا حلها

كما يلي:

$$VA = C\left(1+\frac{t\times n}{100}\right)$$

$$\therefore 150000 = C\left(1+0.025\right) \Rightarrow C = \frac{150000}{1.025} = 146341.46DA$$

2-4- الفوائد المدفوعة مسبقا والفوائد المدفوعة لاحقا:

عندما يتم دفع الفائدة في نهاية العملية، وهي الحالة الأكثر شيوعا، يُقال إنها محسوبة لاحقا أو متأخرة.

عندما يتم دفع الفائدة في بداية العملية، يُقال إنها محسوبة مسبقا أو يتم استحقاقها.

الفوائد المدفوعة مسبقا L'intérêt précompté تعود بالفائدة على المُقرض لأنه يتلقى الفائدة في وقت سابق في بداية فترة الاستثمار.

الفوائد المدفوعة لاحقا L'intérêt postcompté تفيد المقترض لأنه يدفع الفائدة لاحقا في نهاية فترة القرض.

2-5- المعدل المتوسط للإيداع (التوظيف) Taux moyen de placement :

ليكن $C_1, C_2, ..., C_k$ رأس المال المستثمر على التوالي بالمعدلات $T_1, T_2, ..., T_k$ للفترات التالية $n_1, n_2, ..., n_k$ الفائدة العامة التي تنتجها هذه المبالغ تكون على النحو الاتي:

$$I = \frac{C_1T_1n_1 + C_2T_2n_2 + ... + C_kT_kn_k}{36000}$$

المعدل المتوسط للإيداع هو المعدل t_M الذي يسمح بتوظيف نفس المبالغ السابقة ولنفس المدة ليعطي لنا نفس مبلغ الفائدة، أي:

$$I = \frac{C_1t_Mn_1 + C_2t_Mn_2 + ... + C_kt_Mn_k}{36000} = \frac{t_M\left(C_1n_1 + C_2n_2 + ... + C_kn_k\right)}{36000}$$

$$\therefore t_M = \frac{I \cdot 36000}{\left(C_1n_1 + C_2n_2 + ... + C_kn_k\right)}$$

مثال4:

لتكن لدينا المعلومات التالية:

مبلغ $C_1 = 2000DA$ نريد توظيفه بمعدل $T_1 = 3\%$ لمدة 42 يوم ؛

مبلغ $C_2 = 4000DA$ نريد توظيفه بمعدل $T_2 = 4\%$ لمدة 72 يوم ؛

مبلغ $C_3 = 2500DA$ نريد توظيفه بمعدل $T_3 = 6\%$ لمدة 50 يوم .

المطلوب:

1- حساب الفائدة الاجمالية للتوظيف ؟

2- حساب المعدل المتوسط للتوظيف t_M الذي يسمح لنا بإعطاء نفس مبلغ الفائدة السابقة بشرط توظيف نفس المبالغ ونفس المدد السابقة ؟

حل المثال4:

1- حساب الفائدة الاجمالية للتوظيف

$$I = \frac{C_1T_1n_1 + C_2T_2n_2 + ... + C_kT_kn_k}{36000}$$

$$\therefore I = \frac{2000 \cdot 3 \cdot 42 + 4000 \cdot 4 \cdot 72 + 2500 \cdot 6 \cdot 50}{36000} = 59.83DA$$

2- حساب المعدل المتوسط للتوظيف t_M

$$t_M = \frac{I \cdot 36000}{\left(C_1n_1 + C_2n_2 + ... + C_kn_k\right)} = \frac{59.83 \cdot 36000}{2000 \cdot 42 + 4000 \cdot 72 + 2500 \cdot 50} = 4.33\%$$

2-6- معدل الفائدة الفعلي أو المعدل الحقيقي للعملية المالية

Taux d’intérêt effectif ou taux réel d’une opération financière

غالبا ما تُفرض على المعاملات المالية رسوما مختلفة بالإضافة إلى دفع الفائدة،

يكون المعدل الحقيقي للمعاملة أعلى من معدل الفائدة الاسمي المستخدم.

نذكُر أن معدل الفائدة الفعلي هو المعدل المحسوب باستخدام طريقة الفائدة البسيطة الكلاسيكي (مع سداد الفائدة المحسوبة على رأس المال الأولي عند سداد القرض)، مما يجعل من الممكن حساب مبلغ الفائدة الحقيقي للعملية.

مثال5:

اقترضت شركة مبلغا من المال قدره 300000 دج من مؤسسة مالية لمدة 120 يوما،

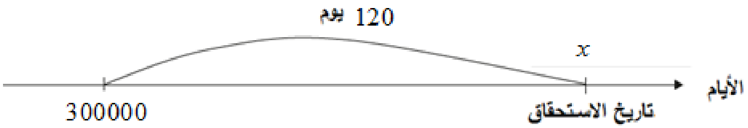
الشروط كانت كالتالي: معدل الفائدة 9٪ ، يخضع سداد القرض لدفع الرسوم الإدارية التي يدفعها المقترض بمبلغ 2000 دج.

المطلوب:

حدد معدل الفائدة الفعلي؟

حل المثال5:

أولا نحسب المبلغ الذي يجب على الشركة سداده في نهاية العملية مع الأخذ بعين الاعتبار سعر الفائدة الاسمي:



القيمة المكتسبة من رأس المال= القيمة الحالية لرأس المال + الفائدة (محسوبة على القيمة الحالية لرأس المال).

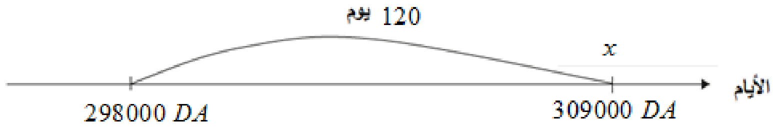
$$VA = C + I = C\left(1 + \frac{t \cdot n}{36000}\right)$$

$$\therefore VA = 300000\left(1 + \frac{9 \times 120}{36000}\right) = 309000\ DA$$

لذلك سيتعين على الشركة أن دفع مبلغ 309000 دج لسداد قرضها ، بمعدل فائدة إسمي

9٪ ، بعد 120 يوما من القرض.

لكن دفع القرض مشروط بدفع 2000 دج من الرسوم الادارية على حساب المقترض، إذا نظرنا إلى رأس المال الذي سيتم تبادله حقا يصبح مخطط التدفق كما يلي:



في الواقع أي في تاريخ القرض تتلقى الشركة فقط: 300000 −2000 = 298000 دج،

من ناحية أخرى، فإن الشركة تسدد القيمة التي اكتسبها رأس مالها في نهاية 120 يوم، لذلك فإن سعر الفائدة الفعلي أعلى من المعدل الاسمي الذي تم الإعلان عنه.

ليكن t_R المعدل الحقيقي والذي يحقق نفس المعادلة الأساسية:

القيمة المكتسبة من رأس المال = القيمة الحالية لرأس المال + الفائدة (محسوبة على القيمة الحالية لرأس المال).

$$309000 = 298000 + 298000 \times \frac{t_R \times 120}{36000}$$

$$\therefore t_R = \frac{11000}{993.33} = 11.07 \ \%$$

لذلك فإن مبلغ 298000 دج هو الذي تم استلامه بالفعل مقابل 309000 دج ستدفعها الشركة في نهاية العملية (بعد 120 يوم)، إذن المعدل الفعلي للعملية أو معدل العائد السنوي الحسابي هو 11.07 ٪ .

2-7- الخصم L'escompte :

الخصم هو عملية مالية تتيح لنا كسب نقودا ،هناك نوعان من الخصم: بنكي وتجاري، الأول يسمى أيضا الخصم المالي وهو معاملة ائتمانية قصيرة الأجل بينما يتوافق الثاني مع تخفيض في حالة الدفع المسبق قبل تاريخ الاستحقاق.

أولا: الخصم التجاري L'escompte commercial :

يوفر الخصم التجاري للزبون إمكانية تسوية فاتورته قبل تاريخ الاستحقاق مقابل خصم، هو عكس غرامات السداد المتأخر ، يحصل المشتري على خصم إذا تم السداد قبل تاريخ الاستحقاق المحدد في العقد.

يتيح استخدام هذه التقنية للمؤسسات بفضل تمويل الموردين ، الحصول على معدلات فائدة دون التأثير على التدفق النقدي.

ثانيا: الخصم البنكي L'escompte bancaire :

الخصم البنكي هو وسيلة للتمويل قصير الأجل، يجعل من الممكن الحصول على السداد الفوري للكمبيالة دون انتظار تاريخ استحقاقها، لهذا يجب على المؤسسة بيع الورقة التجارية إلى أحد البنوك مقابل سلفة نقدية فورية.

لا يشرع البنك في إعادة شراء الديون ، ولكن إلى الدفع لصالح الدائن لمبلغ الكمبيالة ، مخصوما من المصاريف التي يحددها البنك.

إذا لم يتم سداد الدين في تاريخ الاستحقاق، فسيتوجه البنك إلى الدائن، إنه بديل للسحب على المكشوف من البنوك.

ثالثا: مصطلحات أساسية:

الورقة التجارية (كمبيالة أو سند إذني) Un effet de commerce (lettre de change ou billet à ordre) هي كتابة يتعهد فيها الشخص بدفع مبلغ معين (قيمة إسمية) في تاريخ معين (تاريخ استحقاق)، وهي أداة ائتمان وليست وسيلة للدفع، إنها تمثل دين يجب سداده.

إذا كانت هناك حاجة إلى النقد يمكن التفاوض على ورقة تجارية مع بنك قبل تاريخ استحقاقها، سيقتطع البنك خصما من القيمة الاسمية ويعطي للزبون مبلغا أقل من القيمة الاسمية.

هناك عنصران يميزان الدين:

تاريخ الاستحقاق: اليوم المتفق عليه بين الطرفين على سداد الدين.

القيمة الاسمية: مقدار الدين.

القيمة الاسمية Valeur nominale (V_N):

هي القيمة المكتوبة على الورقة والتي تدفع في تاريخ استحقاقها.

t : معدل الخصم.

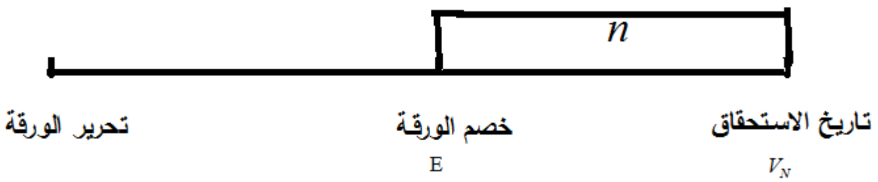
n : **مدة الورقة:** هي عدد الأيام أو الأشهر التي تفصل بين تاريخ إصدار الورقة وتاريخ استحقاقها.

يسمى الفرق بين القيمة الاسمية والقيمة المخصومة بالخصم.

القيمة الحالية للورقة التجارية تحسب كالتالي: $V_a = V_N - E$

رابعا: حساب الخصم:

للتسهيل نأخذ الشكل التالي:



$$E = \frac{V_N \cdot t \cdot n}{36000}$$

مثال6:

أحسب الخصم الناتج عن كمبيالة بقيمة إسمية قدرها 80000 دج، والتي تستحق في 25 ديسمبر، إذا تم خصمها في 10 أكتوبر من نفس السنة بمعدل خصم قدره 14٪ .

حل المثال6:

$$V_N = 80000DA\ ,\ t = 14\%\ ,\ n = (31-10)+30+25 = 76J$$
$$E = \frac{V_N \cdot t \cdot n}{36000} = \frac{80000 \cdot 14 \cdot 76}{36000} = 2364.44DA$$

خامسا: الخصم العقلاني Escompte rationnel :

يتناسب الخصم التجاري مع القيمة الاسمية للورقة التجارية، ويعتبر النوع الوحيد المستخدم في التطبيقات العملية، ومع ذلك يمكننا أن نتخيل خصما محسوبا على القيمة الحالية للورقة التجارية تسمى القيمة الحالية العقلانية.

سيتم تحديد هذه القيمة من خلال العلاقة التالية:

القيمة الاسمية = القيمة الحالية العقلانية + الخصم على هذه القيمة.

VAR : القيمة الحالية العقلانية.

n : عدد الأيام التي تفصل بين تاريخ تقديم الورقة والخصم وتاريخ استحقاقها.

t : المعدل السنوي معبرا عنه كنسبة مئوية.

القيمة الاسمية = القيمة الحالية العقلانية + الخصم على هذه القيمة.

$$V_N = VAR + E'$$

الخصم العقلاني (E') أقل من الخصم التجاري (E).

مثال7:

أحسب الخصم العقلاني والقيمة الحالية العقلانية لورقة تجارية بقيمة إسمية قدرها 45000 دج بمعدل خصم 8٪ ، بين 4 مارس يوم الخصم و 27 أفريل تاريخ استحقاق الورقة.

أحسب الخصم العقلاني.

حل المثال7:

$$E' = \frac{VAR \cdot t \cdot n}{360} = VAR\left(\frac{54 \cdot 0.08}{360}\right) = 0.012\ VAR$$
$$E' = V_N - VAR \Rightarrow V_N = 1.012\ VAR$$
$$\therefore VAR = \frac{V_N}{1.012} = \frac{45000}{1.012} = 44466.40 DA \Rightarrow E' = 533.60 DA$$

$$E = \frac{V_N \cdot t \cdot n}{36000} = \frac{45000 \cdot 8 \cdot 54}{36000} = 540DA$$

الخصم العقلاني (E') أقل من الخصم التجاري(E) ، يقوم البنك بخصم 540 دج لعملية الخصم هذه بينما يجب من حيث المنطق خصم 533.60 دج فقط.

سادسا: الأجيو agio :

يشير agio إلى مجموعة من الرسوم التي يجمعها البنك أثناء المعاملات العادية مثل السلفة أو السحب على المكشوف، غالبا ما يتكون agio من الفوائد والعمولات المصرفية.

ملاحظة:

غالبا ما يتم زيادة المدة الفعلية للخصم بمقدار يوم أو يومين أو ثلاثة أيام تسمى أيام البنك.

يتم تطبيق ضريبة القيمة المضافة على الخصم وعمولات معينة.

ثامنا: صافي قيمة الخصم La valeur nette d’escompte:

هذا هو المبلغ المعطى بالفعل لصاحب الورقة التجارية.

صافي القيمة = القيمة الاسمية – أجيو

الأجيو: الخصم + العمولات + TVA .

هناك أنواع مختلفة من العمولات نذكر منها :

عمولة التظهير La commission d’endossement: تعتمد على الوقت والقيمة الاسمية للورقة التجارية، وتحسب كما يلي: $C_e = V_N \cdot K \cdot n$ ، حيث:

K : معدل هذه العمولة.

n : المدة بين تاريخ التداول وتاريخ الاستحقاق.

عمولة القبولLa commission d’acceptation : يطلب البنك عمولة مقابل خدمة الالتزام بالتوقيع المنفذة نيابة عن الزبون.

وهناك عمولة التوطين **La commission de domiciliation** ، وعمولة القسيمة **La commission de bordereau**...إلخ.

مثال8:

أحسب صافي القيمة التجارية للورقة التجارية بقيمة إسمية 80000 دج تستحق في 30 سبتمبر وتاريخ الخصم في 7 أوت من نفس السنة وفقا للشروط التالية:

معدل الخصم: 14٪ .

عمولة البريد: 150 دج

أيام القيمة : أيام العملية = يوم واحد.

TVA: 9٪ .

حل المثال8:

المدة الفعلية للخصم هي عدد الأيام بين 7 أوت و 30 سبتمبر أي 54 يوما، لحساب الخصم نأخذ في الاعتبار 54 يوما بالإضافة إلى يوم بنكي واحد أي 55 يوما.

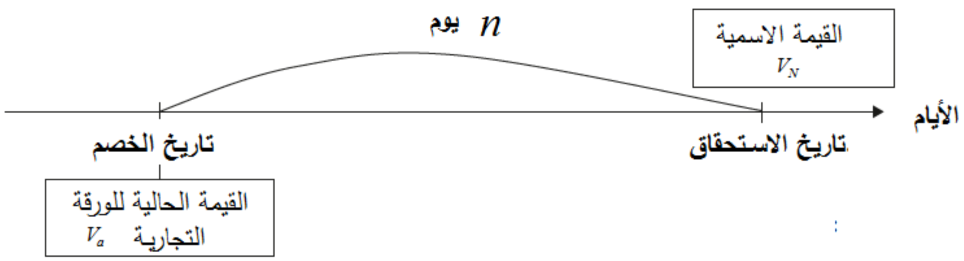
$$E = \frac{V_N \cdot t \cdot n}{36000} = \frac{80000 \cdot 14 \cdot 55}{36000} = 1711.11DA$$

$$AGIOS\ HT = 1711.11 + 150 = 1861.11DA$$
$$TVA = 1861.11 \times 0.09 = 167.5DA$$
$$AGIOS\ TTC = 1861.11 + 167.5 = 2028.60DA$$
$$V_{net} = 80000 - 2028.6 = 77971.4DA$$

يجب أن ينتظر الدائن حتى 30 سبتمبر ليحصل على مبلغ 80000 دج، ومن ناحية أخرى إذا أراد الحصول على أمواله في 7 أوت فسوف يتلقى في الواقع مبلغ 77971.4 دج.

2-8- معدل الخصم الحقيقي Le taux réel d'escompte :

نذكر أن معدل الفائدة الفعلي هو المعدل المحسوب باستخدام طريقة الفائدة البسيطة الكلاسيكي (مع سداد الفائدة المحسوبة على رأس المال الأولي عند سداد القرض)، مما يجعل من الممكن حساب مبلغ الفائدة الحقيقي للعملية، نوضح ذلك في المخطط التالي:



انطلاقا من المعادلة الأساسية للفائدة البسيطة:

القيمة المكتسبة من قبل رأس المال = القيمة الحالية لرأس المال + الفائدة (محسوبة في بداية رأس المال للتشغيل).

تتعكس هذه المعادلة في حالة استخدام معادلة الخصم حيث:

$$V_a = V_N - E$$
$$V_N = V_a + V_a \times \frac{t_R \times n}{36000}$$

المعدل الفعلي t_R هو المعدل الذي يتم حله بواسطة المعادلة الأخيرة.

مثال9:

نعتبر ورقة تجارية بقيمة اسمية 25000 دج تستحق في 14 أفريل 2020 ، تم خصمها في 7 جانفي 2020 بمعدل 9٪ .

المطلوب:

1- تحديد مبلغ الخصم.
2- ما هو المعدل الفعلي للعملية؟

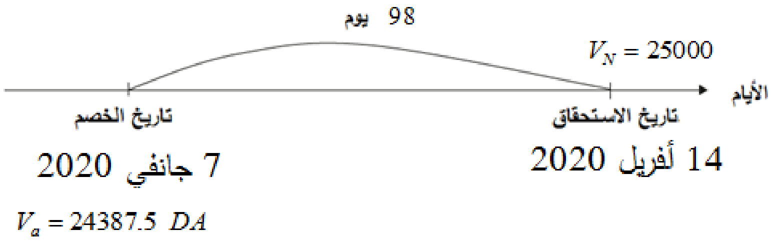
حل المثال9:

1- مدة العملية تساوي: (31 − 7) + 29 + 31 + 14= 98 يوم.

$$E = \frac{V_N \cdot t \cdot n}{36000} = \frac{25000 \cdot 9 \cdot 98}{36000} = 612.5\ DA$$

$$V_a = V_N - E = 25000 - 612.5 = 24387.5 \ \ DA$$

لدينا مخطط التدفق التالي:



2- المعدل الفعلي للعملية :

يمكننا الأن حساب المعدل الفعلي لعملية الخصم بواسطة المعادلة التالية:

$$V_N = V_a + V_a \times \frac{t_R \times n}{36000}$$

$$\therefore 25000 = 24387.5 + 24387.5 \times \frac{t_R \times 98}{36000}$$

$$\therefore 612.5 = 66.39 \ t_R \Rightarrow t_R = \frac{612.5}{66.39} = 9.22 \ \ \%$$

2-9- تكافؤ ورقتين تجاريتين Équivalence de deux effets :

تعريف:

نقول عن ورقتين تجاريتين (أو مبلغان من رأس المال) أنهما متكافئان إذا كان خصمهما بنفس المعدل و لديهم نفس القيمة الحالية في تاريخ معين، هذا التاريخ هو تاريخ التكافؤ وهو فريد من نوعه.

إذا حددنا: V_1 ، V_2 القيمة الاسمية للورقة الأولى والثانية.

t : معدل الخصم.

n_1 و n_2 المدة التي تفصل تاريخ التكافؤ عن تاريخ استحقاق الورقة الأولى والثانية، فأن:

$$V_1 - \frac{V_1 \times t \times n_1}{36000} = V_2 - \frac{V_2 \times t \times n_2}{36000}$$

مثال10:

يرغب تاجر في استبدال ورقة تجارية بتاريخ 14 مارس بقيمة 13000 دج مستحقة في 23 مارس بأخرى مستحقة في 22 أفريل.

المطلوب:

تحديد القيمة الاسمية للورقة المستبدلة مع العلم أن معدل الفائدة السنوي 14٪ ؟

حل المثال10:

تاريخ التكافؤ هنا هو 14 مارس، $n_1 = 9$, $n_2 = 39$.

القيمة الحالية للورقة الأولى:

$$V_1 - \frac{V_1 \times t \times n_1}{36000} = 13000 - \frac{13000 \times 14 \times 9}{36000} = 12954.5\ DA$$

القيمة الحالية للورقة المستبدلة:

$$V_2 - \frac{V_2 \times t \times n_2}{36000} = V_2\left(1 - \frac{14 \times 39}{36000}\right) = 0.984V_2$$

يوجد تكافؤ إذا كانت القيمتان الحاليتان متساويتان أي:

$$12954.5 = 0.984\ V_2 \Rightarrow V_2 = \frac{12954.5}{0.984} = 13165.14\ DA$$

10-2- تكافؤ عدة أوراق تجارية Equivalence de plusieurs effets :

تعريف:

نقول عن ورقة تجارية أنها متكافئة مع عدة أوراق تجارية أخرى، إذا كان تاريخ تكافؤ لقيمتها الحالية مساويا لمجموع القيم الحالية للأوراق التجارية الأخرى.

مثال11:

تاجر يريد استبدال بتاريخ 9 مارس ورقتين تجاريتين (أ و ب) بورقة تجارية وحيدة قيمتها الاسمية 18000 دج بمعدل 12 % .

الورقة التجارية الأولى قيمتها الاسمية 8000 دج تستحق بتاريخ 29 أفريل.

الورقة التجارية الثانية قيمتها الاسمية 10000 دج تستحق بتاريخ 8 ماي.

المطلوب:

ما هو تاريخ استحقاق الورقة المستبدلة؟

حل المثال11:

ليكن n عدد الأيام ما بين 9 مارس وتاريخ استحقاق الورقة المستبدلة.

في 9 مارس القيمة الحالية للورقة المستبدلة مساوية لمجموع القيم الحالية للورقتين التجاريتين (أ و ب) ، لدينا:

$$n_1 = 31 - 9 + 29 = 51J$$
$$n_2 = 31 - 9 + 30 + 8 = 60J$$

$$V - \frac{V \times t \times n}{36000} = V_1 - \frac{V_1 \times t \times n_1}{36000} + V_2 - \frac{V_2 \times t \times n_2}{36000}$$
$$\therefore 18000 - \frac{18000 \times 12 \times n}{36000} = 8000 - \frac{8000 \times 12 \times 51}{36000} + 10000 - \frac{10000 \times 12 \times 60}{36000}$$
$$\therefore 18000 - 6n = 7864 + 9800 = 17664$$
$$\therefore 18000 - 17664 = 6n \Rightarrow n = \frac{336}{6} = 56\,j$$

تاريخ استحقاق الورقة المستبدلة يكون في 4 ماي.

تمارين محلولة:

تمرين1:

أحسب القيمة المكتسبة لرأس مال 40000 دج مستثمر بمعدل 5٪ لمدة سنة واحدة.

حل التمرين 1:

$$VA = C\left(1 + \frac{t \times n}{100}\right) = 40000\left(1 + \frac{5 \times 1}{100}\right) = 42000\ DA$$

تمرين 2:

أحسب القيمة الحالية لرأس المال المستثمر لمدة عام واحد بمعدل 4.5٪ ، والتي تبلغ في نهاية العملية 300000 دج.

حل التمرين 2:

هذه المرة، لا نعرف قيمة رأس المال الأولي الذي تُحسب الفائدة عليه، لذلك علينا حلها كما يلي:

$$VA = C\left(1+\frac{t\times n}{100}\right)$$

$$\therefore 300000 = C\left(1+0.045\right) \Rightarrow C = \frac{300000}{1.045} = \mathbf{287081,34}\ DA$$

تمرين 3:

لتكن لدينا المعلومات التالية:

مبلغ $C_1 = 6000DA$ نريد توظيفه بمعدل $T_1 = 2\%$ لمدة 52 يوم ؛

مبلغ $C_2 = 8000DA$ نريد توظيفه بمعدل $T_2 = 3\%$ لمدة 84 يوم ؛

مبلغ $C_3 = 10000DA$ نريد توظيفه بمعدل $T_3 = 4\%$ لمدة 92 يوم ؛

مبلغ $C_4 = 12500DA$ نريد توظيفه بمعدل $T_4 = 6\%$ لمدة 100 يوم .

المطلوب:

3- حساب الفائدة الاجمالية للتوظيف ؟

4- حساب المعدل المتوسط للتوظيف t_M الذي يسمح لنا بإعطاء نفس مبلغ الفائدة السابقة بشرط توظيف نفس المبالغ وبنفس المدد السابقة ؟

حل التمرين 3:

3-حساب الفائدة الاجمالية للتوظيف:

$$I = \frac{C_1T_1n_1 + C_2T_2n_2 + ... + C_kT_kn_k}{36000}$$
$$\therefore I = \frac{6000 \cdot 2 \cdot 52 + 8000 \cdot 3 \cdot 84 + 10000 \cdot 4 \cdot 92 + 12500 \cdot 6 \cdot 100}{36000} = 383.89DA$$

4- حساب المعدل المتوسط للتوظيف t_M:

$$t_M = \frac{I \cdot 36000}{\left(C_1n_1 + C_2n_2 + ... + C_kn_k\right)}$$
$$\therefore t_M = \frac{383.89 \cdot 36000}{6000 \cdot 52 + 8000 \cdot 84 + 10000 \cdot 92 + 12500 \cdot 100} = 4.38\%$$

تمرين 4:

اقترضت شركة مبلغا من المال قدره 500000 دج من مؤسسة مالية لمدة 200 يوم،

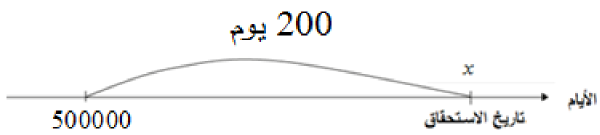
الشروط كانت كالتالي: معدل الفائدة 12٪ ، يخضع سداد القرض لدفع الرسوم الإدارية ، التي يدفعها المقترض بمبلغ 5000 دج.

المطلوب:

حدد معدل الفائدة الفعلي؟

حل التمرين 4:

أولا نحسب المبلغ الذي يجب على الشركة سداده في نهاية العملية مع الأخذ بعين الاعتبار سعر الفائدة الاسمي:



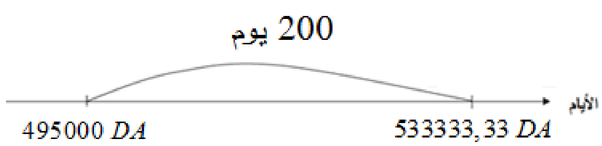
القيمة المكتسبة من رأس المال= القيمة الحالية لرأس المال + الفائدة (محسوبة على القيمة الحالية لرأس المال).

$$VA = C + I = C\left(1 + \frac{t \cdot n}{36000}\right)$$
$$\therefore VA = 500000\left(1 + \frac{12 \times 200}{36000}\right) = 533333,33\ DA$$

لذلك سيتعين على الشركة أن تدفع مبلغ 533333,33 دج لسداد قرضها ، بمعدل فائدة إسمي

12٪ ، بعد 200 يوما من القرض.

لكن دفع القرض مشروط بدفع 5000 دج من الرسوم الادارية على حساب المقترض، إذا نظرنا إلى رأس المال الذي سيتم تبادله حقا يصبح مخطط التدفق كما يلي:



في الواقع أي في تاريخ القرض تتلقى الشركة فقط: 500000− 5000 = 495000 دج، من ناحية أخرى، فإن الشركة تسدد القيمة التي اكتسبها رأس مالها في نهاية 200 يوم، لذلك فإن معدل الفائدة الفعلي أعلى من المعدل الاسمي الذي تم الإعلان عنه.

ليكن t_R المعدل الحقيقي والذي يحقق نفس المعادلة الأساسية:

القيمة المكتسبة من رأس المال = القيمة الحالية لرأس المال + الفائدة (محسوبة على القيمة الحالية لرأس المال).

$$533333,33 = 495000 + 495000 \times \frac{t_R \times 200}{36000}$$

$$\therefore t_R = \frac{38333,33}{2750} = 13.93 \ \%$$

لذلك فإن مبلغ 495000 دج هو الذي تم استلامه بالفعل مقابل 533333,33 دج ستدفعها الشركة في نهاية العملية (بعد 200 يوم)، إذن المعدل الفعلي للعملية أو معدل العائد السنوي الحسابي هو 13.93 ٪ .

تمرين 5:

أحسب الخصم الناتج عن ورقة تجارية بقيمة إسمية قدرها 100000 دج، والتي تستحق في 25 نوفمبر، إذا تم خصمها في 8 سبتمبر من نفس السنة بمعدل خصم قدره 9٪ .

حل التمرين5:

$$V_N = 100000DA \ , \ t = 9\% \ , \ n = (30-8) + 31 + 25 = 78\, j$$

$$E = \frac{V_N \cdot t \cdot n}{36000} = \frac{100000 \cdot 9 \cdot 78}{36000} = 1950DA$$

تمرين 6:

أحسب الخصم العقلاني والقيمة الحالية العقلانية لورقة تجارية بقيمة إسمية قدرها 90000 دج بمعدل خصم 9٪ ، بين 5 أفريل يوم الخصم و 26 ماي تاريخ استحقاق الورقة.

أحسب الخصم العقلاني.

حل التمرين6:

$$E' = \frac{VAR \cdot t \cdot n}{360} = VAR\left(\frac{51 \cdot 0.09}{360}\right) = 0,01275\ VAR$$
$$E' = V_N - VAR \Rightarrow V_N = 1,01275\ VAR$$
$$\therefore VAR = \frac{V_N}{1,01275} = \frac{90000}{1,01275} = 88866,95DA \Rightarrow E' = 1133.05DA$$

$$E = \frac{V_N \cdot t \cdot n}{36000} = \frac{90000 \cdot 9 \cdot 51}{36000} = 1147.5DA$$

الخصم العقلاني (E') أقل من الخصم التجاري(E) ، يقوم البنك بخصم 1147.5 دج لعملية الخصم هذه بينما من حيث المنطق وجب خصم 1133.05 دج فقط.

تمرين7:

أحسب صافي القيمة التجارية لورقة تجارية بقيمة إسمية 120000 دج تستحق في 30 نوفمبر وتاريخ الخصم في 8 سبتمبر من نفس السنة وفقا للشروط التالية:

معدل الخصم: 9٪ .

عمولة التظهير: 200 دج

أيام القيمة : أيام العملية = يومان.

TVA: 9٪ .

حل التمرين7:

المدة الفعلية للخصم هي عدد الأيام بين 8 سبتمبر و 30 نوفمبر أي 83 يوما، لحساب الخصم نأخذ في الاعتبار 83 يوم بالإضافة إلى يومان للبنك أي 85 يوما.

$$E = \frac{V_N \cdot t \cdot n}{36000} = \frac{120000 \cdot 9 \cdot 85}{36000} = 2550DA$$

$$\begin{aligned}
&AGIOS\ HT = 2550 + 200 = 2750DA \\
&TVA = 2750 \times 0.09 = 247.5DA \\
&AGIOS\ TTC = 2750 + 247.5 = 2997.5DA \\
&V_{net} = 120000 - 2997.5 = 117002,5DA
\end{aligned}$$

يجب أن ينتظر الدائن حتى 30 نوفمبر ليحصل على مبلغ 120000 دج، ومن ناحية أخرى إذا أراد الحصول على أمواله في 8 سبتمبر فسوف يتلقى في الواقع مبلغ 117002,5 دج.

تمرين 8:

نعتبر ورقة تجارية بقيمة اسمية 50000 دج تستحق في 3 مارس 2022 ، تم خصمها في 2 جانفي 2022 بمعدل 12٪ .

المطلوب:

3- تحديد مبلغ الخصم.

4- ما هو المعدل الفعلي للعملية؟

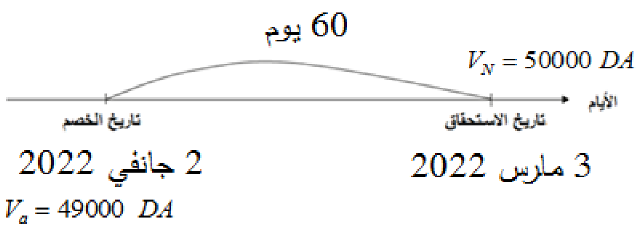
حل التمرين8:

3- مدة العملية تساوي: (31 − 2) + 28 + 3= 60 يوم.

$$E=\frac{V_N\cdot t\cdot n}{36000}=\frac{50000\cdot 12\cdot 60}{36000}=1000\ DA$$

$$V_a=V_N-E=50000-1000=49000\ \ DA$$

لدينا مخطط التدفق التالي:



4- المعدل الفعلي للعملية :

يمكننا الأن حساب المعدل الفعلي لعملية الخصم بواسطة المعادلة التالية:

$$V_N=V_a+V_a\times\frac{t_R\times n}{36000}$$

$$\therefore 50000=49000+49000\times\frac{t_R\times 60}{36000}$$

$$\therefore 1000=81.67\ t_R\Rightarrow t_R=\frac{1000}{81.67}=12.24\ \ \%$$

تمرين9:

يرغب تاجر في استبدال ورقة تجارية بتاريخ 28 مارس بقيمة 17000 دج مستحقة في 20 أفريل بأخرى مستحقة في 18 جوان.

المطلوب:

تحديد القيمة الاسمية للورقة المستبدلة مع العلم أن معدل الفائدة السنوي 9٪ ؟

حل التمرين9:

تاريخ التكافؤ هنا هو 28 مارس، $n_1 = 23$, $n_2 = 82$.

القيمة الحالية للورقة الأولى:

$$V_1 - \frac{V_1 \times t \times n_1}{36000} = 17000 - \frac{17000 \times 9 \times 23}{36000} = 16902.25\ DA$$

القيمة الحالية للورقة المستبدلة:

$$V_2 - \frac{V_2 \times t \times n_2}{36000} = V_2\left(1 - \frac{9 \times 82}{36000}\right) = 0.9795\ V_2$$

يوجد تكافؤ إذا كانت القيمتان الحاليتان متساويتان أي: 17256

$$16902.25 = 0.9795\ V_2 \Rightarrow V_2 = \frac{16902.25}{0.9795} = 17256\ DA$$

تمرين10:

تاجر يريد استبدال بتاريخ 8 فيفري 2020 ثلاث أوراق تجارية (أ و ب و ج) بورقة تجارية وحيدة قيمتها الاسمية 36000 دج بمعدل 9 % .

الورقة التجارية الأولى قيمتها الاسمية 12000 دج تستحق بتاريخ 25 مارس 2020.

الورقة التجارية الثانية قيمتها الاسمية 15000 دج تستحق بتاريخ 9 أفريل 2020.

الورقة التجارية الثالثة قيمتها الاسمية 5000 دج تستحق بتاريخ 8 مارس 2020.

المطلوب:

ما هو تاريخ استحقاق الورقة المستبدلة؟

حل التمرين10:

ليكن n عدد الأيام ما بين 8 فيفري وتاريخ استحقاق الورقة المستبدلة.

في 8 فيفري القيمة الحالية للورقة المستبدلة مساوية لمجموع القيم الحالية للأوراق التجارية (أ و ب و ج) ، لدينا:

$$n_1 = 29 - 8 + 25 = 46\,j$$
$$n_2 = 29 - 8 + 31 + 9 = 61\,j$$
$$n_3 = 29 - 8 + 8 = 29\,j$$

$$V - \frac{V \times t \times n}{36000} = V_1 - \frac{V_1 \times t \times n_1}{36000} + V_2 - \frac{V_2 \times t \times n_2}{36000} + V_3 - \frac{V_3 \times t \times n_3}{36000}$$

$$\therefore 33000 - \frac{33000 \times 9 \times n}{36000} = 12000 - \frac{12000 \times 9 \times 46}{36000} + 15000 - \frac{15000 \times 9 \times 61}{36000}$$
$$+5000 - \frac{5000 \times 9 \times 29}{36000}$$

$$\therefore 33000 - 8.25n = 11862 + 14771.25 + 4963.75 = 31597$$

$$\therefore 33000 - 31597 = 8.25n \Rightarrow n = \frac{1403}{8.25} = 170\,j$$

تاريخ استحقاق الورقة المستبدلة يكون في 27 جويلية.

الفصل الثالث :الفوائد المركبة Les intérêts composés

3-1- تمهيد:

ذكرنا في الفصل السابق أن المعاملات المالية الأقل من سنة (قصيرة الأجل) يتم استخدام الفائدة البسيطة، لكن المعاملات التي تزيد مدتها عن سنة، فسيتم استخدام الفائدة المركبة.

3-2- مفهوم معادلات الفرق:

يعتبر هذا النوع من المعادلات غير مألوف ومعروف كما هو الحال في حالة المعادلات التفاضلية الواسعة الانتشار، يكمن الفرق بين هذا النوع والمعادلات التفاضلية ، في أن التغير أو التحرك إلى الأمام يكون بعدد منتهي من الخطوات (حالة متقطعة)، بينما في المعادلات التفاضلية نأخذ عدد لا نهائي من الخطوات المتناهية في الصغر (الحالة المستمرة)، مثل هذا الفرق له نفس المفهوم بين التزايد في حالة متتالية هندسية (حالة متقطعة) والتزايد وفق دالة أسية نيبيرية(حالة مستمرة).

مثال1:

نود استثمار مبلغ 3500 دج في بنك معين لمدة 5 سنوات، بفائدة تقدر بـ 8% ، أي في نهاية السنة نحصل على المبلغ المستثمر + مبلغ الفائدة (3500 × 1.08)، وتكون الصيغة الرياضية لذلك كما يلي: $P_{t+1} = 1.08P_t$ ، في السنة الثانية يكون: $P_2 = 1.08P_1 = 1.08(1.08)P_0 = (1.08)^2 P_0$ ، وهكذا دواليك ويعرف هذا بالرسملة capitalisation ، بعد خمس سنوات يكون رأس المال المستثمر + مبلغ الفوائد كما يلي:

$$P_5 = (1.08)^5 P_0 = (1.08)^5 \cdot 3500 = 5142.64DA$$

لنفرض الأن الفترة الزمنية استبدلت بالشهور بدل السنوات (5 سنوات تساوي 60 شهر)، بعد خمس سنوات يكون رأس المال المستثمر + مبلغ الفوائد كما يلي:

$$P_{60} = \left(1 + \frac{0.08}{12}\right)^{60} \cdot P_0 = 5214.45DA$$

نلاحظ أن مبلغ الفائدة زاد عند غيرنا المدة من السنوات نحو الأشهر.

البنوك العالمية اليوم تعرض الفائدة المركبة المستمرة (الفائدة في كل لحظة)، وبالتالي تختفي في هذه الحالة معادلة الفرق، في هذه الحالة نستطيع حساب الفائدة المركبة كما يلي:

$$(3500) \cdot \left(1 + \frac{0.08}{n}\right)^{5n} = (3500) \cdot \left(e^{0.4}\right) = 5221.38$$

$$\left(1 + \frac{0.08}{n}\right)^{5n} = e^{\ln\left(1 + \frac{0.08}{n}\right)^{5n}} \sim e^{0.4} \quad ; \quad \text{DL}$$

(العلاقة الأخيرة أستخدمنا النشر المحدود DL).

فالفائدة تساوي : 5221.38 − 3500 = 1721.38 دج ، تعتبر أقصى فائدة يمكن أن يأخذها مودع هذا المبلغ في هذا البنك مهما كانت تجزئة المدة ، أو بطريقة أخرى يمكن التعبير عنها بمعادلة تفاضلية $\frac{dp}{dt} = 0.08p$.

$$\int \frac{dP}{P} = \int 0.08dt$$
$$\therefore \ln P = 0.08t + k$$
$$\therefore P(t) = Ce^{0.08t} \quad ; \quad P(0) = C = P_0$$
$$\therefore P(t) = P_0 e^{0.08t}$$

بعد 5 سنوات يكون المبلغ المستثمر + الفائدة:

$$P(5) = 3500 \cdot e^{0.08(5)} = 3500 \cdot e^{0.4} = 5221.38 \ .$$

ملاحظة:

معادلة الفرق تؤول إلى معادلة تفاضلية لما n تؤول إلى المالانهاية.

فالقول أن الفائدة مركبة إذا تمت إضافة الفائدة المتولدة خلال هذه الفترة إلى رأس المال لحساب الفائدة المستقبلية في نهاية كل فترة.

3-3- القيمة المكتسبة، القيمة الحالية لرأس المال مودعة بفائدة مركبة:

Valeur acquise, valeur actuelle d'un capital placée avec intérêt composé :

يتم الحصول على القيمة الحالية بواسطة الفائدة المركبة من صيغتها السابقة، أي:

$$C_n = C_0 (1+i)^n$$
$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n} = C_n (1+i)^{-n}$$

حيث:

C_0 : رأس المال الأولي (الابتدائي).

C_n : رأس المال المتراكم.

i: معدل الفائدة المركبة.

n: المدة.

ملاحظة:

نقوم بتحويل المدة n للحصول على نفس الوحدة الزمنية بالنسبة لمعدل الفائدة i (سنة ، شهر ، يوم).

مثال2:

بعد 5 سنوات تم الحصول على مبلغ قدره 2433.3 دج جراء توظيفه في بنك بمعدل 4 %.

المطلوب:

تحديد المبلغ الأولي (C_0) ؟

حل المثال2:

$$C_n = 2433.3\ DA\ ,\ i = 0.04$$
$$C_0 = C_n\left(1+i\right)^{-n} = 2433.3\left(1.04\right)^{-5} = 2000\ DA$$

3-4- مدة الايداع وفقا لفائدة مركبة Durée d'un placement à intérêts composés

من الممكن تحديد مدة الاستثمار n وفق الفائدة المركبة عن طريق استخدام اللوغاريتم.

لدينا الصيغة العامة للفائدة المركبة: $C_n = C_0\left(1+i\right)^n$ ، ندخل اللوغاريتم بين الطرفين ، فنحصل على: $\log\left(C_n\right) = \log\left(C_0\left(1+i\right)^n\right)$

نستخدم خواص اللوغاريتم:

$$1)\ \log(a\times b)=\log(a)+\log(b)$$
$$2)\ \log(a)^n=n\log(a)$$

$$\therefore \log(C_n)=\log(C_0)+n\log(1+i)$$
$$\therefore n=\frac{\log(C_n)-\log(C_0)}{\log(1+i)}$$

مثال3:

أحسب مدة توظيف مبلغ بمعدل 5 % ، علما أن القيمة الابتدائية بلغت

$C_0=5000\ DA$ ، والقيمة المتراكمة بعد نهاية المدة : $C_n=6700.48\ DA$.

حل المثال3:

من الصيغة السابقة نقوم بالتطبيق المباشر، فنحصل على:

$$n=\frac{\log(C_n)-\log(C_0)}{\log(1+i)}=\frac{\log(6700.48)-\log(5000)}{\log(1.05)}=\frac{0.128}{0.0211}\approx 6$$

حساب المعدل:

من الممكن تحديد معدل الفائدة المركبة عن طريق عزل المتغير **i** في صيغة الفائدة المركبة السابقة، حيث:

$$C_n = C_0 (1+i)^n$$
$$\therefore \frac{C_n}{C_0} = (1+i)^n$$
$$\therefore \left(\frac{C_n}{C_0}\right)^{\frac{1}{n}} = (1+i)$$
$$\therefore i = \left(\frac{C_n}{C_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

مثال4:

نستخدم معلومات المثال السابق في تحديد المعدل بفرض عدم معلوميته.

حل المثال4:

$$C_n = 6700.48\ DA\ ,\ i = ?\ \ ,\ \ C_0 = 5000\ DA\ \ ,\ \ n = 6$$
$$i = \left(\frac{C_n}{C_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 = \left(\frac{6700.48}{5000}\right)^{\frac{1}{6}} - 1 = 0.05$$

3–5– التكافؤ وفق الفوائد المركبة Équivalence à intérêts composés

نفس المفهوم الذي تطرقنا إليه سابقا فيما يخص الفائدة البسيطة، للتوضيح أكثر نأخذ المثال التالي:

مثال5:

في 5 مارس 2017 اقترض شخص مبلغ 25000 دج بمعدل فائدة 8 % ، حيث كان شرط التسديد كما يلي:

دفع مبلغ 14000 دج في 5 مارس 2020 والرصيد x المتبقي يدفع في 5 مارس 2022.

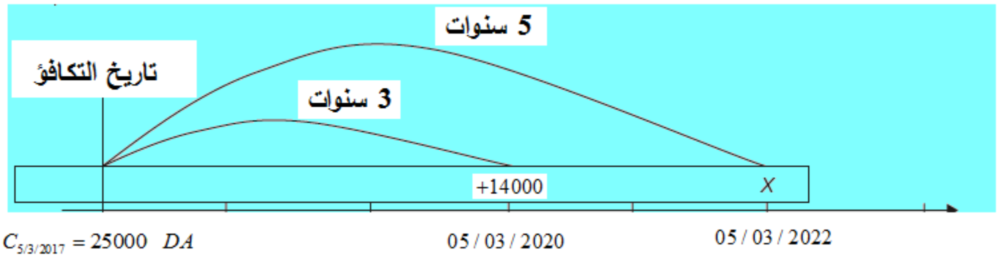
المطلوب:

1- أكتب معادلة التكافؤ في 5 مارس 2017 و استنتج مبلغ الرصيد x.
2- أكتب معادلة التكافؤ في 5 مارس 2022 و استنتج مبلغ الرصيد x.
3- أكتب معادلة التكافؤ في 5 مارس 2020 و استنتج مبلغ الرصيد x.

حل المثال5:

1- كتابة معادلة التكافؤ في 5 مارس 2017 و استنتاج مبلغ الرصيد x.

نوضح ذلك في مخطط التدفق التالي:



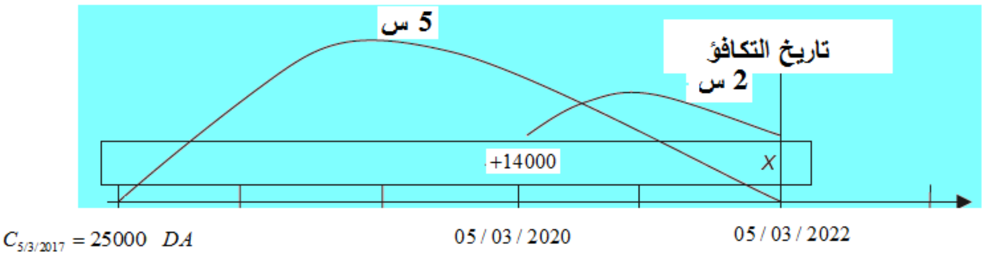
نلاحظ أن المبلغ المقترض 25000 دج المحدد في تاريخ 5 مارس 2017 ليس هناك حاجة في رسملته ولا لتحيينه ، أما مبلغ التسديدين فيكتبا كما يلي:

$14000(1.08)^{-3} + x(1.08)^{-5}$، مبلغ التسديد الأول مرفق بتاريخ 2020/3/5 تقييمه بتاريخ التكافؤ وجب اجراء عملية تحيينه أي الجداء في $(1.08)^{-3}$، بنفس الكيفية مع مبلغ الرصيد x مرفق بتاريخ 2022/3/5 لتقييمه بتاريخ التكافؤ وجب اجراء عملية تحيينه أي الجداء في $(1.08)^{-5}$، ومن بعد يمكننا كتابة معادلة التكافؤ التي تكون على النحو الاتي:

$$25000 = 14000(1.08)^{-3} + x(1.08)^{-5}$$
$$\therefore 25000 - 14000(1.08)^{-3} = x(1.08)^{-5}$$
$$\therefore \frac{25000 - 14000(1.08)^{-3}}{(1.08)^{-5}} = x$$
$$\therefore x = 25000(1.08)^{5} - 14000(1.08)^{2} = 20403.60\ DA$$

2- كتابة معادلة التكافؤ في 5 مارس 2022 و استنتاج مبلغ الرصيد x.

نوضح ذلك في مخطط التدفق التالي:



تاريخ التكافؤ في 5 مارس 2022 يمكننا تقييم رؤوس الأموال في هذا التاريخ:

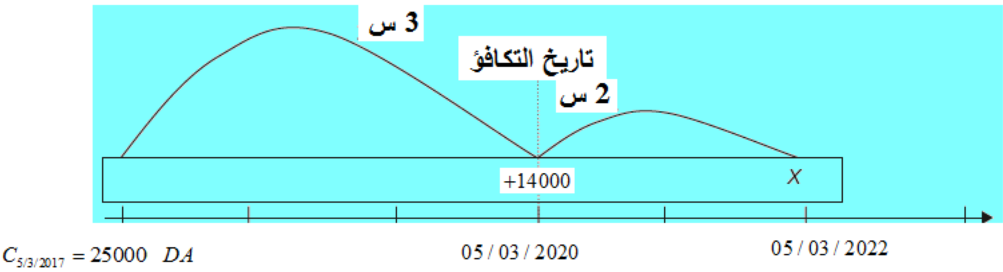
بالنسبة للمبلغ المقترض وجب اجراء عملية الرسملة أي جداء هذا المبلغ في $(1.08)^5$ ، نفس الكيفية مع المبلغ المرفق بتاريخ 5 مارس 2020 وجب اجراء عملية الرسملة أي جداء هذا المبلغ في $(1.08)^2$ ، أما مبلغ الرصيد x المرفق بتاريخ 5 مارس 2022 لا نحتاج لا لرسملته ولا لتحيينه ، إذن معادلة التكافؤ تكتب كما يلي:

$$25000(1.08)^{5} = 14000(1.08)^{2} + x$$
$$\therefore 25000(1.08)^{5} - 14000(1.08)^{2} = x = 20403.60\ DA$$

من الواضح أن قيمة الرصيد x هي نفسها التي تحصلنا عليها في السؤال السابق.

3- كتابة معادلة التكافؤ في 5 مارس 2020 و استنتاج مبلغ الرصيد x.

نوضح ذلك في مخطط التدفق التالي:



بنفس الكيفية نحتاج لرسملة المبلغ المقترض أي جدائه في $(1.08)^3$ ، وتحيين مبلغ الرصيد x أي جدائه في $(1.08)^{-2}$، إذن معادلة التكافؤ تكتب كما يلي:

$$25000(1.08)^3 = 14000 + x(1.08)^{-2}$$
$$\therefore 25000(1.08)^3 - 14000 = x(1.08)^{-2}$$
$$\therefore \frac{25000(1.08)^3 - 14000}{(1.08)^{-2}} = x$$
$$\therefore x = 25000(1.08)^5 - 14000(1.08)^2 = 20403.60\ DA$$

3-6- المعدلات المتكافئة Taux équivalents:

نقول عن معدلين يقابلان فترات رسملة مختلفة أنهما متكافئان إذا كانا يؤديان و لنفس فترة الاستثمار إلى نفس القيمة المكتسبة بالفائدة المركبة، وبالتالي فإن القيمة المكتسبة من قبل رأس المال C استثمرت لفترة n بمعدل i_n مساوية إذا استثمرنا نفس قيمة رأس المال لفترة m بمعدل i_m ، عندما نود ايجاد أحد المعدلين مثلا i_m، الخطوات تكون كالتالي:

$$C(1+i_n)^n = C(1+i_m)^m$$
$$\therefore (1+i_n)^n = (1+i_m)^m$$
$$\therefore (1+i_n)^{\frac{n}{m}} = 1+i_m \Rightarrow i_m = (1+i_n)^{\frac{n}{m}} - 1$$

ملاحظة:

بطبيعة الحال لا يمكننا اجراء الخطوة الأخيرة دون التحقق من ايجابية العددين، ليكن a و b عددين موجبين: $X^a = b \Leftrightarrow X = b^{\frac{1}{a}}$ ، لذلك من السهل حل المعادلة باستخدام القوى الكسرية **مثال** :

أوجد قيمة X حل للمعادلة التالية: $X^4 = 1.4641$.

$$X^4 = 1.4641 \Leftrightarrow X = (1.4641)^{\frac{1}{4}} = 1.1$$

3-7- الرسملة والتحيين في الزمن المستمر Capitalisation et actualisation en temps continu

تعتمد تعبيرات القيم المكتسبة والحالية المستخدمة حتى الأن على القيم المتقطعة للزمن: السداسي و ربع السنة والشهر، في هذه الفقرة سنأخذ بعين الاعتبار الحالة التي تستند فيها هذه الحسابات إلى قيم زمنية متصلة أو لفترات لا نهائية متناهية الصغر من السنة، وقد أشرنا إلى ذلك في مقدمة هذا الفصل حيث نمذجنا هذه الحالة بمعادلة تفاضلية.

أولا: الرسملة المستمرة أو الفورية:

نعتبر حالة توظيف مبلغ تم تقسيمه k مرة أصغر من سنة، القيمة المكتسبة للمعدل $\frac{i}{k}$ يتناسب مع المعدل السنوي i ، حيث يكتب كما يلي: $C_1 = C_0\left(i + \frac{i}{k}\right)^k$

حيث:

C_1 : هي القيمة المكتسبة في نهاية سنة واحدة.

C_0: القيمة الحالية.

نضع: $\frac{i}{k}=\frac{1}{x} \Rightarrow k=ix$ ، عبارة القيمة المكتسبة تصبح كما يلي:

$$C_1 = C_0\left(1+\frac{1}{k}\right)^{ix}$$

نفرض أن k يؤول إلى المالانهاية ، حيث تم اعتبار الفترات متناهية الصغر في السنة.

إذا كان $k \to \infty \Leftarrow x \to \infty$ ، $\Leftarrow$ $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{ix} \to e^i$ كما تطرقنا إلية في بداية هذا الفصل ، تصبح القيمة المكتسبة من قبل رأس المال C_0 في نهاية سنة واحدة:

$C_1 = C_0 e^i$ ، وبالنسبة لـ n سنة ، القيمة المكتسبة تكتب وفق الشكل التالي:

$$C_n = C_0 e^{in}$$

يعكس هذا التعبير حقيقة أن الفائدة المتولدة تتم خلال كل فترة من الفترات المتناهية الصغر، حيث يتم إضافتها على الفور إلى القيمة الناتجة عن الرسملة السابقة لتحصيل الفائدة معا ولمرة أخرى كذلك.

مثال6:

حدد القيمة المكتسبة لمبلغ 50000 دج التي تم رسملتها بمعدل سنوي قدره 8٪ لمدة 5 سنوات ؟

حل المثال6:

$$C_5 = 50000 \cdot e^{5\times 0.08} = 74591.23\ DA$$

ثانيا: التحيين المستمر :

في عملية التحيين (الخصم المستخدم) ، القيمة الحالية C_0 لمبلغ C_n مستحق الدفع في التاريخ n تكتب كما يلي:

$$C_n = C_0 e^{in}$$

$$\therefore C_0 = \frac{C_n}{e^{in}}$$

$$\therefore C_0 = C_n e^{-in}$$

مثال7:

حدد بواسطة التحيين المستمر لمعدل سنوي 4٪ قيمة الأصل لرأسمال قدره 70000 دج مستحق الدفع خلال 6 سنوات؟

حل المثال7:

$$C_0 = 70000 \cdot e^{-(6\times 0.04)} = 55063.95\ DA$$

ثالثا: معدل الرسملة المستمر المكافئ Taux de capitalisation continue équivalent :

يتم تنفيذ الرسملة الفورية بمعدل أسرع من ذلك في الزمن غير المستمر، هذا الاختلاف يعني أنه لنفس المعدل السنوي ونفس مدة الاستثمار فإن القيمة المكتسبة من خلال الرسملة المستمرة تكون دائما أكبر من ذلك التي تنتجها نفس العملية في الزمن المتقطع.

مثال8:

قارن بين القيم المكتسبة من خلال الرسملة المستمرة وغير المستمرة مبلغ 70000 دج مستثمر بمعدل سنوي قدره 8٪ لمدة 9 سنوات.

حل المثال8:

	الرسملة المستمرة	الرسملة المتقطعة
العبارة الجبرية	$C_n = C_0 e^{in}$	$C_n = C_0 (1+i)^n$
العبارة العددية	$C_9 = C_0 e^{(9\times 0.08)}$	$C_9 = C_0 .(1.08)^9$
النتيجة	143810.32 دج	139930.32 دج

يشير الاختلاف في معدلات الرسملة أيضا إلى ذلك بالنسبة للقيم المكتسبة والحالية المتطابقة المقابلة لنفس فترة الاستثمار، معدل الرسملة المستمر أقل من معدل الرسملة المستخدمة في الرسملة المتقطعة.

نرمز إلى:

C_0: القيمة الابتدائية لرأس المال المستثمر المطابق في نظامي الرسملة (المستمر والمتقطع).

i : معدل الفائدة السنوي (المتقطع) على الرسملة.

n: فترة الاستثمار المتطابقة في نظامي الرسملة.

x: معدل الفائدة السنوي للرسملة المستمرة المعادل للمعدل i.

تتم كتابة المساواة في القيم المكتسبة التي تحددها الرسملة المستمرة والمتقطعة:

$$C_0.(1+i)^n = C_0 e^{xn}$$
$$\therefore (1+i)^n = e^{xn}$$
$$\therefore (1+i)^n = (e^x)^n$$
$$\therefore (1+i) = (e^x)$$
$$\therefore \log(1+i) = \log e^x$$
$$\therefore \log(1+i) = x \log e \Rightarrow x = \frac{\log(1+i)}{\log e}$$

مثال9:

أوجد معدل الفائدة المستمر المكافئ لمعدل الفائدة المتقطع $i = 15\%$ و الذي يؤدي إلى الحصول على نفس القيمة المكتسبة وذلك باستثمار نفس المبلغ ؟

حل المثال9:

$$i = 15\%$$
$$x = \frac{\log(1+i)}{\log e} = \frac{\log(1.15)}{\log(2.718)} = \frac{0.06}{0.434} = 14\%$$

تمارين محلولة:

تمرين 1:

أراد شخص استثمار مبلغ من المال (100000 دج) بمعدل سنوي 8 ٪ ، إذا وظف هذا المبلغ في أحد البنوك لمدة 12 سنة كم سيجمع في نهاية المدة ؟ ثم أحسب المعدل الشهري الموافق له.

حل التمرين1:

$$V_0 = 100000\ DA\ ,\ i = 0.08\ ,\ n = 12$$

$$V_{12} = V_0 (1.08)^{12} = 251817.01\ DA$$

$$V (1.08)^1 = V (1 + i_m)^{12}$$

$$\therefore (1.08)^1 = (1 + i_m)^{12}$$

$$\therefore (1.08)^{\frac{1}{12}} = 1 + i_m \Rightarrow i_m = (1.08)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0.0064 = 0.64\%$$

تمرين 2:

أحسب مدة توظيف مبلغ بمعدل 5 %، علما أن القيمة الابتدائية بلغت $C_0 = 40000\ DA$ ، والقيمة المتراكمة بعد نهاية المدة : $C_n = 56284\ DA$.

حل التمرين2:

من الصيغة $C_n = C_0 (1.05)^n$ وبعد تطبيق خواص اللوغاريتم نحصل على:

$$n = \frac{\log(C_n) - \log(C_0)}{\log(1+i)} = \frac{\log(56284) - \log(40000)}{\log(1.05)} \approx 7$$

تمرين 3:

نستخدم معلومات التمرين السابق في تحديد المعدل بفرض عدم معلوميته.

حل التمرين 3:

$$C_n = 56284\ DA\ ,\ i = ?\ \ ,\ C_0 = 40000\ DA\ \ ,\ n = 7$$

$$i = \left(\frac{C_n}{C_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 = \left(\frac{56284}{40000}\right)^{\frac{1}{7}} - 1 = 0.05$$

تمرين 4:

أراد شخص شراء محل تجاري حيث كان لديه 30000 دج، وجد إعلانا على الإنترنت يشير إلى سعر هذا المحل يساوي 46158.71 دج ، أتصل بأحد البنوك قصد توظيف المبلغ الذي بحوزته فأقترح عليه هذا البنك معدل استثنائي قدره 12٪ ، يريد هذا الشخص معرفة المدة التي سيصل فيها رأس ماله إلى قيمة المحل الذي يريد شرائه ، بفرض عدم وجود تضخم كبير يفقد النقود قيمتها وبفرض استقرار الأسعار في هذا البلد ، ما هي المدة المطلوبة من قبل هذا الشخص ؟

حل التمرين 4:

$$V_0 = 30000\ DA\ ,\ i = 0.12\ ,\ V_n = 46158.71\ DA\ ,\quad n = ?$$

$$V_n = V_0 (1.12)^n$$

$$\therefore Ln\left(\frac{V_n}{V_0}\right) = nLn(1.12)$$

$$\therefore n = \frac{Ln\left(\frac{V_n}{V_0}\right)}{Ln(1.12)} = \frac{Ln\left(\frac{46158.71}{30000}\right)}{Ln(1.12)} \approx 5$$

تمرين 5 :

وضع شخص مبلغ قدره 50000 دج في بنك لمدة سنة واحدة ، بعدها مباشرة قام بسحب 8000 دج ، وترك المبلغ المتبقي لمدة سنة أخرى بالضبط ، وصلت القيمة المكتسبة بعد هذا التاريخ إلى مبلغ 48685 دج.

أوجد معدل الاستثمار السنوي لهذا البنك ؟

حل التمرين 5:

$$V_0 = 50000\ DA\ ,\ i = ?\ ,\ V_2 = 48685\ DA$$

$$V_1 = V_0 (1+i)\quad ,\quad V_2 = (V_1 - 8000)(1+i) = 48685$$

$$\therefore V_2 = (V_0(1+i) - 8000)(1+i) = 48685$$

$$\therefore V_0 (1+i)^2 - 8000(1+i) - 48685 = 0$$

نضع: $x=(1+i)$ ، فيصبح لدينا: $50000x^2-8000x-48685=0$ ، معادلة من الدرجة الثانية حلها بالمميز Δ : $\Delta = b^2-4ac$ ،

$\Delta=(8000)^2-4(50000)(48685)=(99000)^2>0$ ، هناك حلين متمايزين ، حيث:

$$x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2b}=\frac{8000+99000}{100000}=1.07$$

$$\therefore x=(1+i)=1.07 \Rightarrow i=0.07=7\%$$

الحل الثاني مرفوض.

تمرين 6:

احسب القيمة المكتسبة لاستثمار بقيمة 70000 دج مستثمرة لمدة 7 سنوات بثلاث طرق ، بمعدل 9٪ ، استخدم معدل شهري مكافئ لأحدى الطرق.

حل التمرين 6:

$$V_0=70000\ DA\ ,\ i=0.09\ ,\ V_7=?$$

$$1)\ V_n=70000(1.09)^7=127962.73\ DA$$

$$2)\ i=0.09\simeq i_m=0.0072=0.72\%\ ,\ \text{n}=7ans=84mois$$

$$\therefore V_n=70000(1.0072)^{84}=127962.73\ DA$$

$$3)\ Ln\left(\frac{V_n}{V_0}\right)=7Ln(1.09)$$

$$\therefore Ln\left(\frac{V_n}{70000}\right)=0.6032$$

$$\therefore e^{Ln\left(\frac{V_n}{70000}\right)}=e^{0.6032}=1.828$$

$$\therefore \frac{V_n}{70000}=1.828 \Rightarrow V_n=127962.73\ DA$$

تمرين 7:

في 2/1/ 2010 اقترض شخص مبلغ 50000 دج بمعدل فائدة 10 % ، حيث كان شرط التسديد كما يلي:

دفع مبلغ 30000 دج في 2/1/ 2016 والرصيد x المتبقي يدفع في 2/1/ 2020.

المطلوب:

4- أكتب معادلة التكافؤ في 2/1/ 2010 و استنتج مبلغ الرصيد x.

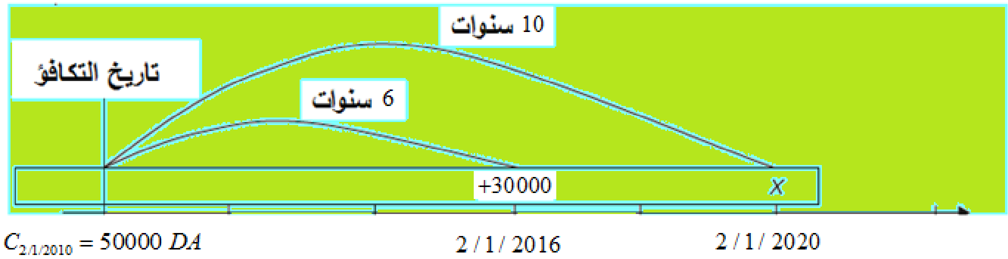
5- أكتب معادلة التكافؤ في 2/1/ 2020 و استنتج مبلغ الرصيد x.

6-أكتب معادلة التكافؤ في 2/1/ 2016 و استنتج مبلغ الرصيد x.

حل التمرين 7:

4- كتابة معادلة التكافؤ في 2/1/ 2010 و استنتاج مبلغ الرصيد x.

نوضح ذلك في مخطط التدفق التالي:



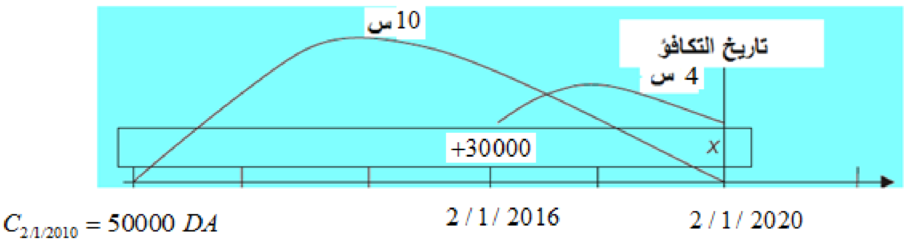
نلاحظ أن المبلغ المقترض 50000 دج المحدد في تاريخ 2/1/ 2010 ليس هناك حاجة في رسملته ولا لتحيينه ، أما مبلغ التسديدين فيكتبا كما يلي:

$30000(1.10)^{-6} + x(1.10)^{-10}$، مبلغ التسديد الأول مرفق بتاريخ 2016/1/2 تقييمه بتاريخ التكافؤ وجب اجراء عملية تحيينه أي الجداء في $(1.1)^{-6}$، بنفس الكيفية مع مبلغ الرصيد x مرفق بتاريخ 2020/1/2 لتقييمه بتاريخ التكافؤ وجب اجراء عملية تحيينه أي الجداء في $(1.1)^{-10}$، ومن بعد يمكننا كتابة معادلة التكافؤ التي تكون على النحو الاتي:

$$50000 = 30000(1.1)^{-6} + x(1.1)^{-10}$$
$$\therefore 50000 - 30000(1.1)^{-6} = x(1.1)^{-10}$$
$$\therefore \frac{50000 - 30000(1.1)^{-6}}{(1.1)^{-10}} = x$$
$$\therefore x = 50000(1.1)^{10} - 30000(1.1)^{4} = 85764.123\ DA$$

5- كتابة معادلة التكافؤ في 2/1/ 2020 و استنتاج مبلغ الرصيد x.

نوضح ذلك في مخطط التدفق التالي:



تاريخ التكافؤ في 2/1/ 2020 يمكننا تقييم رؤوس الأموال في هذا التاريخ:

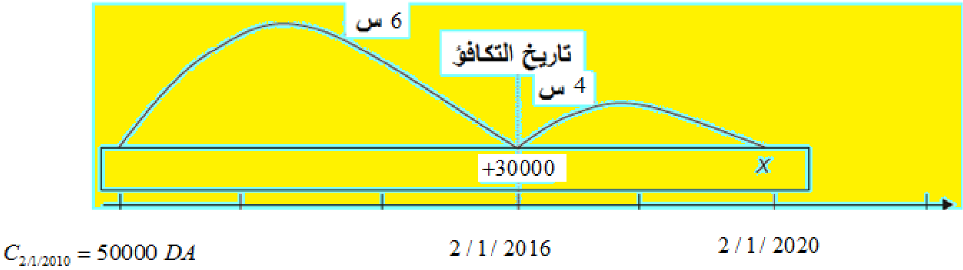
بالنسبة للمبلغ المقترض وجب اجراء عملية الرسملة أي جداء هذا المبلغ في $(1.1)^{10}$ ، نفس الكيفية مع المبلغ المرفق بتاريخ 2/1/ 2016 وجب اجراء عملية الرسملة أي جداء هذا المبلغ في $(1.1)^{4}$ ، أما مبلغ الرصيد x المرفق بتاريخ 5 مارس 2022 لا نحتاج لا لرسملته ولا لتحيينه ، إذن معادلة التكافؤ تكتب كما يلي:

$$50000(1.1)^{10} = 30000(1.1)^{4} + x$$
$$\therefore 50000(1.1)^{10} - 30000(1.1)^{4} = x = 85764.123\ DA$$

من الواضح أن قيمة الرصيد x هي نفسها التي تحصلنا عليها في السؤال السابق.

6- كتابة معادلة التكافؤ في 2/1/ 2016 و استنتاج مبلغ الرصيد x.

نوضح ذلك في مخطط التدفق التالي:



بنفس الكيفية نحتاج لرسملة المبلغ المقترض أي جدائه في $(1.1)^{6}$ ، وتحيين مبلغ الرصيد x أي جدائه في $(1.1)^{-4}$، إذن معادلة التكافؤ تكتب كما يلي:

$$50000(1.1)^{6} = 30000 + x(1.1)^{-4}$$
$$\therefore 50000(1.1)^{6} - 30000 = x(1.1)^{-4}$$
$$\therefore \frac{50000(1.1)^{6} - 30000}{(1.1)^{-4}} = x$$
$$\therefore x = 50000(1.1)^{10} - 30000(1.1)^{4} = 85764.123\ DA$$

تمرين 8:

يود شخص استثمار مبلغ 80000 دج في بنك معين لمدة 10 سنوات بفائدة مركبة تقدر بـ 12%.

المطلوب:

1- كم سيجمع في نهاية المدة ؟
2- نمذج هذه الظاهرة بمعادلة تفاضلية ، ثم قم بحلها ؟
3- حدد القيمة المكتسبة لنفس المبلغ المستثمر ولنفس المدة والمعدل لكن بواسطة الرسملة المستمرة.
4- انطلاقا من الجواب الأول بفرض الحصول على نفس القيمة المكتسبة، أوجد معدل الفائدة المستمر المكافئ لمعدل الفائدة المتقطع (12%) ؟

حل التمرين8:

1− هذا الشخص سيجمع في نهاية المدة:

$$C_0 = 80000\ DA \ \ ,\ \ n = 10\ \ ,\ \ i = 0.12$$
$$C_n = C_0 (1.12)^{10} = 248467.85\ DA$$

2− نمذجة هذه الظاهرة بمعادلة تفاضلية :

نعتبر n = t يمكن التعبير عن هذه الظاهرة بمعادلة تفاضلية بـ : $\frac{dC}{dt} = 0.12C$.

سيتم حلها بواسطة طرية فصل المتغيرات.

$$\int \frac{dC}{C} = \int 0.12 dt$$
$$\therefore \ln C = 0.12t + k_1$$
$$\therefore C(t) = Ke^{0.12t} \quad ; \quad C(0) = K = C_0$$
$$\therefore C(t) = C_0 e^{0.12t}$$

3− بعد 10 سنوات يكون المبلغ المستثمر + الفائدة:

$C(10) = 80000 \cdot e^{0.12(10)} = 80000 \cdot e^{1.2} = 265609.35\ DA$.

4− معدل الفائدة المستمر المكافئ لمعدل الفائدة المتقطع (12%).

نرمز إلى:

C_0: القيمة الابتدائية لرأس المال المستثمر المطابق في نظامي الرسملة (المستمر والمتقطع).

i: معدل الفائدة السنوي (المتقطع) على الرسملة.

n: فترة الاستثمار المتطابقة في نظامي الرسملة.

x: معدل الفائدة السنوي للرسملة المستمرة المعادل للمعدل i.

تتم كتابة المساواة في القيم المكتسبة التي تحددها الرسملة المستمرة والمتقطعة كما يلي:

$$C_0.(1+i)^n = C_0 e^{xn}$$

$$\therefore (1+i)^n = e^{xn}$$

$$\therefore (1+i)^n = \left(e^x\right)^n$$

$$\therefore (1+i) = \left(e^x\right)$$

$$\therefore \log(1+i) = \log e^x$$

$$\therefore \log(1+i) = x \log e \Rightarrow x = \frac{\log(1+i)}{\log e}$$

$$i = 12\%$$

$$x = \frac{\log(1+i)}{\log e} = \frac{\log(1.12)}{\log(2.718)} = \frac{0.0492}{0.434} = 0.1134 = 11.34\%$$

الفصل الرابع : الدفعات LES ANNUITES

4-1- تمهيد:

الدفعات هي سلسلة من المدفوعات التي يتم سدادها في تواريخ استحقاق متساوية، وتسمى أيضا " بالأقساط (السنوية، شهرية) "، غرضها تكوين رأس مال أو تسديد دين معين، و لها الخصائص التالية:

- قد تكون (ثابتة أو متغيرة)؛
- عدد الدفعات (محدود أو غير محدود)؛
- تكرار الدفعات (سنوية، نصف السنوية،... إلخ)؛
- الزمن بين الدفعة الأولى وتاريخ العقد، الأقساط المتأخرة، الفورية.

تتكون دراسة الدفعات في تحديد القيمة الحالية أو القيمة المكتسبة في تاريخ معين لسلسلة التدفقات، حيث يأخذ في الاعتبار تاريخ التدفق الأول و دورية التدفقات وعدد التدفقات ومقدار كل تدفق.

عندما تكون الدفعات متساوية فإننا نتحدث عن الدفعات الثابتة، بينما عندما يختلف مقدارها من فترة إلى أخرى فإننا نتحدث عن الدفعات المتغيرة.

ملاحظات:

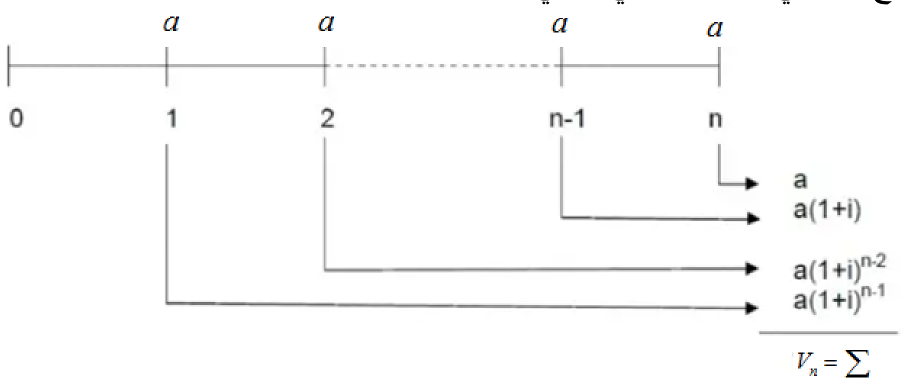
- يمكن تحصيل الدفعات أو دفعها في بداية الفترة أو في نهايتها.
- الأقساط السنوية مؤكدة إذا كانت الفترة ثابتة، أي إذا كان الزمن بين قسطين هو نفسه دائما وإذا لم يكن كذلك فسيكون تسلسل الأقساط عشوائيا.

4-2- الدفعات الثابتة في نهاية الفترة (الدورة):

أولا: القيمة المكتسبة:

نقول عن القيمة المكتسبة (V_n) من خلال سلسلة من الدفعات الثابتة في نهاية الفترة أنها مجموع الدفعات التي يتم التعبير عنها مباشرة بعد دفع الأقساط السنوية الأخيرة.

نوضح ذلك في الشكل البياني التالي:



حيث:

V_n : القيمة المكتسبة بواسطة مجموع دفعات متتالية.

a : الدفعة الثابتة في نهاية الفترة.

n : عدد الفترات (الدفعات).

i : معدل الفائدة.

نعبر عن مجموع الدفعات رياضيا كما يلي:

$$V_n = a + a(1+i) + a(1+i)^2 + ... + a(1+i)^{n-1}$$
$$\therefore V_n = a\left[1 + (1+i) + (1+i)^2 + ... + (1+i)^{n-1}\right]$$

تمثل مجموع متتالية هندسية حدها الأول 1 و أساسها $q = (1+i)$ ، صيغة مجموع هذه المتتالية يكون على النحو الاتي:

$$V_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}$$
$$\therefore V_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

مثال1:

يضع شخص مبلغا من المال قدره 6500 دج في نهاية كل سنة في بنك ، حيث كان معدل الفائدة المطبق 9 % ، كم يجمع هذا الشخص في نهاية السنة العاشرة.

حل المثال1:

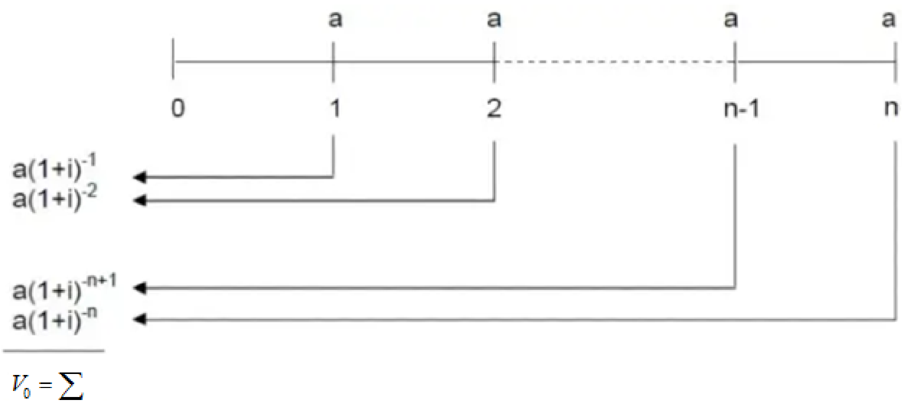
$$a = 6500\ DA\ ,\ i = 0.09\ ,\ n = 10$$

$$V_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i} = 6500 \cdot \frac{(1.09)^{10} - 1}{0.09} = 98754.04\ DA$$

ثانيا: القيمة الحالية:

القيمة الحالية (V_0) لسلسلة من الدفعات الثابتة في نهاية الفترة هي مجموع الأقساط السنوية المعبر عنها في تاريخ الأصل (البدء).

نوضح ذلك في الشكل البياني التالي:



حيث:

V_n : القيمة الحالية بواسطة مجموع دفعات متتالية.

a : الدفعة الثابتة في نهاية الفترة.

n : عدد الفترات (الدفعات).

i : معدل الفائدة.

نعبر عن مجموع الدفعات رياضيا كما يلي:

$$V_0 = a(1+i)^{-1} + a(1+i)^{-2} + ... + a(1+i)^{-n}$$

$$\therefore V_0 = a(1+i)^{-1}\left[1 + (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + ... + (1+i)^{-n+1}\right]$$

للتسهيل نضع: $q=(1+i)^{-1}$ ، فيصبح لدينا:

$$V_0=aq\left[1+q+q^2+......+q^{n-1}\right]$$

بتطبيق صيغة مجموع حدود متتالية هندسية نجد:

$$V_0=aq\cdot\frac{1-q^n}{1-q}$$

$$\therefore V_0=a(1+i)^{-1}\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{1-(1+i)^{-1}}$$

$$\therefore V_0=a(1+i)^{-1}\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{\frac{i}{(1+i)}}=a(1+i)^{-1}(1+i)\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$\therefore V_0=a\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

بطريقة ثانية يمكننا إيجاد V_0، حيث:

$$V_n=V_0(1+i)^n$$

$$V_0=V_n(1+i)^{-n}$$

نعوض V_n بقيمتها التي وجدناها سابقا $V_n=a\frac{(1+i)^n-1}{i}$، أي:

$$V_0=a\frac{(1+i)^n-1}{i}(1+i)^{-n}$$

$$\therefore V_0=a\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

مثال2:

اقترض شخص مبلغا من بنك واتفق مع ادارة هذا البنك على تسديده وفق 9 دفعات سنوية ثابتة ، قيمة الواحدة 30000 دج ، حيث تدفع الأولى سنة بعد تاريخ الاقتراض.

المطلوب:

إذا كان معدل الفائدة المطبق 8 %، حدد قيمة القرض ؟

حل المثال2:

$$n=9\ ,\ a=30000\ DA\ ,\ i=0.08\ ,\ V_0=?$$

$$V_0=a\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}=30000\cdot\frac{1-(1.08)^{-9}}{0.08}=187406.63\ DA$$

مثال3:

يرغب شخص اقتراض مبلغا من بنك التنمية العقارية وذلك لتمويل شراء عقارات، قدم له البنك قرضا لمدة 7 سنوات بحيث يتم تسديده على أقساط شهرية ثابتة، بمعدل فائدة مركبة سنويا بلغ 10٪، يتم دفع الدفعة الشهرية الأولى في نهاية الشهر الأول للاقتراض.

كان الاتفاق كذلك أنه لا يجب أن يتجاوز مبلغ السداد الشهري ثلث الدخل الشهري لهذا الشخص والذي يبلغ 120000 دج.

المطلوب:

ما هو أقصى مبلغ يمكن تسليفه لهذا الشخص ؟

حل المثال3:

نلاحظ أن الأقساط شهرية، إذن علينا تحديد معدل الفائدة الشهرية.

القيمة المكتسبة V لرأسمال مودع بمعدل شهري i_m خلال 12 شهر هي: $V(1+i_m)^{12}$.

القيمة المكتسبة V لرأسمال مودع بمعدل سنوي 10% خلال سنة هي: $V(1,1)^1$.

علينا حل المعادلة التالية:

$$V(1.1)^1=V(1+i_m)^{12}$$
$$\therefore (1.1)^1=(1+i_m)^{12}$$
$$\therefore (1.1)^{\frac{1}{12}}=1+i_m \Rightarrow i_m=(1.1)^{\frac{1}{12}}-1=0.008$$
$$\therefore i_m=0.008=0.8\%$$

تحديد مقدار رأس المال الذي يمكنه اقتراضه:

المعدل الشهري 0.8% يعادل المعدل السنوي 10%.

حساب الحد الأقصى للمبلغ السنوي الذي يمكن دفعه في كل شهر مع مراعاة الراتب، حيث:

$$a = \frac{120000}{3} = 40000\ DA$$

الحد الأقصى لمبلغ القرض هو الذي يتوافق في تاريخ القرض مع قيمة مجموعة أقساط شهرية ثابتة على مدى 7 سنوات ، لدينا 7 × 12 = 84 دفعة شهرية .

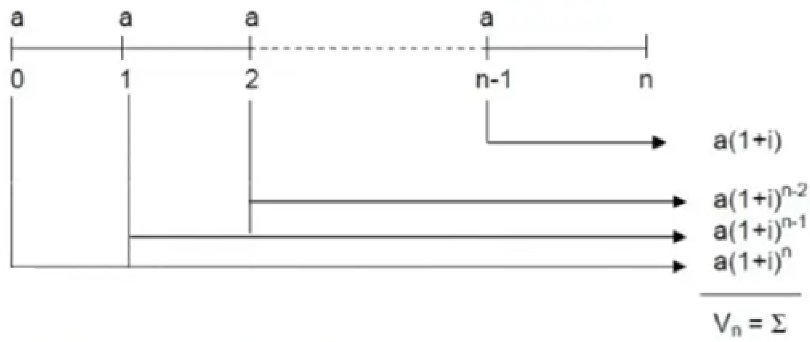
$$V_0 = a \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 40000 \cdot \frac{1-(1.008)^{-84}}{0.008} = 2439732.71\ DA$$

إذن أقصى مبلغ يمكن تسليفه لهذا الشخص هو: 2439732.71 دج.

4-3- الدفعات الثابتة في بداية الفترة (الدورة):

أولا: القيمة المكتسبة V_n :

نعتبر التدفقات مدفوعة في بداية الفترة ، نوضح ذلك في الشكل التالي:



نعبر عن مجموع الدفعات رياضيا كما يلي:

بنفس الكيفية السابقة نجد:

$$V_n = a(1+i) + a(1+i)^2 + ... + a(1+i)^n$$

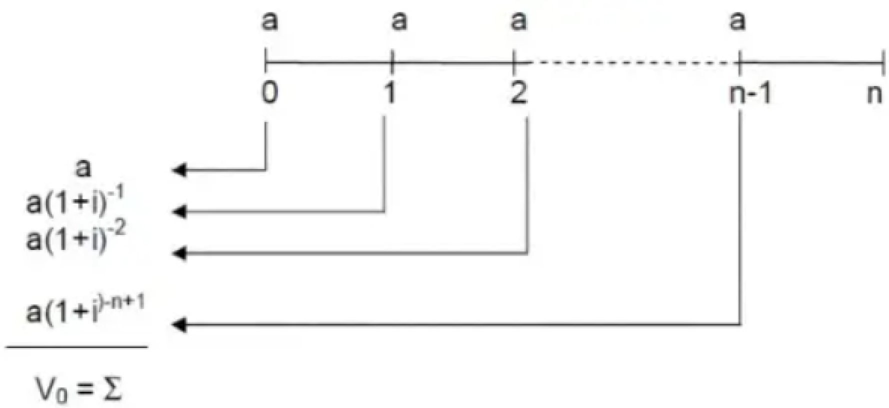
$$\therefore V = a(1+i)\left[1 + (1+i) + (1+i)^2 + ... + (1+i)^{n-1}\right]$$

$$V_n = a(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}$$

$$\therefore V_n = a(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

ثانيا: القيمة الحالية V_0 :

للتوضيح أكثر نأخذ الشكل التالي:



بنفس الخطوات السابقة نجد:

$$V_0 = a + a(1+i)^{-1} + a(1+i)^{-2} + ... + a(1+i)^{-n-1}$$

للتسهيل نضع: $q = (1+i)^{-1}$ ، فيصبح لدينا:

$$V_0 = a\left[1 + q + q^2 + ... + q^{n-1}\right]$$

$$\therefore V_0 = a \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$\therefore V_0 = a \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{1 - (1+i)^{-1}} = a(1+i) \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

مثال4:

بإيداع مبلغ من المال في أول من كل شهر من 2021/3/5 إلى 2023/3/5 ، نريد تجميع 1327695 دج في 2023/3/5 ، إذا كان المعدل الشهري 0.008 فما هي قيمة مبلغ المال المودع كل شهر (الدفعة) ؟

حل المثال4:

$$a = ?\ ,\ i_m = 0.008\ ,\ n = 24\ ,\ V_n = 1327695 \text{ DA}$$

$$V_n = a(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i} \Rightarrow a = \frac{i \times V_n}{(1+i)^{n+1} - (1+i)}$$

$$\therefore a = \frac{0.008 \times 1327695}{(1.008)^{25} - (1.008)} = 50000 \text{ DA}$$

4-4- الدفعة الدائمة للتدفقات الثابتة Rente perpétuelle de flux constants :

الدفعة الدائمة هي سلسلة لا نهاية من المدفوعات إذن حساب القيمة المكتسبة لا معنى لها، لكن يمكن حساب القيمة الحالية.

في حالة دفعات نهاية الفترة، يتم حساب القيمة الحالية للدفعة الدائمة على النحو التالي:

$$V_0 = \lim_{n\to\infty}\left(a \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right) = \frac{a}{i}$$

أما في حالة دفعات بداية الفترة، يتم حساب القيمة الحالية للدفعة الدائمة على النحو التالي:

$$V_0 = \lim_{n\to\infty}\left(a(1+i) \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right) = \frac{a(1+i)}{i}$$

4-5- الدفعات المتغيرة Les Annuités variables

4-5-1- الدفعات الكيفية les annuités quelconques

أولا: الدفعات الكيفية في نهاية المدة:

أ- القيمة المكتسبة V_n:

لنأخذ الترميزات التالية:

V_n : القيمة الحالية بواسطة مجموع دفعات متتالية.

ap : الدفعة في التاريخ p.

n : عدد الفترات (الدفعات).

i : معدل الفائدة.

نعبر عن مجموع الدفعات رياضيا كما يلي:

$$V_n = a_n + a_{n-1}(1+i) + ... + a_2(1+i)^{n-2} + a_1(1+i)^{n-1}$$

$$\therefore V_n = \sum_{p=1}^{n} ap(1+i)^{n-p}$$

ب- القيمة الحالية V_0 :

نعبر عن مجموع الدفعات رياضيا كما يلي:

$$V_0 = a_1(1+i)^{-1} + a_2(1+i)^{-2} + ... + a_{n-1}(1+i)^{-n+1} + a_n(1+i)^{-n}$$

$$\therefore V_0 = \sum_{p=1}^{n} ap(1+i)^{-p}$$

ثانيا: الدفعات الكيفية في بداية المدة:

أ- القيمة المكتسبة V_n:

نعبر عن مجموع الدفعات رياضيا كما يلي:

$$V_n = a_n(1+i) + a_{n-1}(1+i)^2 + ... + a_2(1+i)^{n-1} + a_1(1+i)^n$$

$$\therefore V_n = \sum_{p=1}^{n} ap(1+i)^{n-p+1}$$

ب- القيمة الحالية V_0 :

نعبر عن مجموع الدفعات رياضيا كما يلي:

$$V_0 = a_1 + a_2(1+i)^{-1} + ... + a_{n-1}(1+i)^{-n+2} + a_n(1+i)^{-n+1}$$

$$\therefore V_0 = \sum_{p=1}^{n} ap(1+i)^{-p+1}$$

4-5-2- الدفعات التزايدية Annuités progressives :

تقترح بعض صيغ الاستثمار أو الاقتراض تغييرا تدريجيا في الدفعات من أجل تكييفها مع تطور قدرات السداد للشركة أو الشخص.

وهكذا تزداد الأقساط السنوية في التزايد الحسابي في الفترة بنفس المبلغ r بالدينار مثلا، وتزداد كذلك الدفعات في التزايد الهندسي بنفس النسبة في كل فترة.

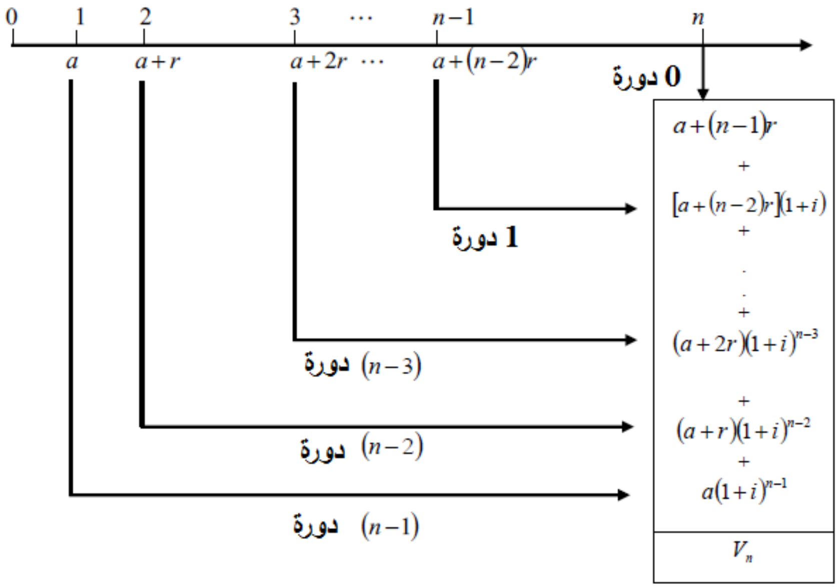
ملاحظة:

الاثبات الذي سنتناوله يخص دفعات نهاية الفترة فقط.

أولا: الدفعات ذات التزايد الحسابي Les annuités en progression arithmétique

أ- القيمة المكتسبة V_n:

ليكن تزايد حسابي لدفعات نهاية المدة ذات أساس r موضحة في الشكل التالي:



$$V_n = a(1+i)^{n-1} + (a+r)(1+i)^{n-2} + (a+2r)(1+i)^{n-3} + \ldots\ldots + \left[a+(n-2)r\right](1+i) + \left[a+(n-1)r\right]$$

نقسم الطرف الأيمن إلى جزئيين، أحدهما يحتوي على حدي a والأخر على حدين r، تصبح المساواة السابقة كما يلي:

$$V_n = a\left[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-3} + ... + (1+i) + 1\right]$$
$$+ r\left[(1+i)^{n-2} + 2(1+i)^{n-3} + ... + (n-2)(1+i) + (n-1)\right]$$

الطرف الأول يمثل حدود متتالية هندسية مجموعها يساوي: $a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$ ، و

الطرف الثاني يساوي Sr ، إذن:

$$V_n = a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} + rS................(I)$$

نبدأ بتحليل (S):

$$S = (1+i)^{n-2} + 2(1+i)^{n-3} + ... + (n-2)(1+i) + (n-1) \quad [1]$$

نضرب الطرفين في $(1+i)$ فيصبح لدينا:

$$S(1+i) = (1+i)^{n-1} + 2(1+i)^{n-2} + ... + (n-2)(1+i)^2 + (n-1)(1+i) \quad [2]$$
$$S(1+i) - S = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + ... + (1+i)^2 + (1+i) - (n-1)$$
$$\therefore Si = \underbrace{(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + ... + (1+i)^2 + (1+i) + 1}_{E} - n$$

E يمثل مجموع متتالية هندسية حدها الأول 1 وأساسها $(1+i)$، مجموعها كما رأيناه سابقا يساوي: $\frac{(1+i)^n - 1}{i}$.

$$Si = \frac{(1+i)^n - 1}{i} - n$$
$$\therefore S = \frac{1}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n\right]$$

(I) تصبح :

$$V_n = a\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i}+\frac{r}{i}\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}-n\right]$$

$$\therefore V_n=\left(a+\frac{r}{i}\right)\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i}-\frac{nr}{i}$$

ب- القيمة الحالية V_0 :

نستخدم العلاقة : $V_0=V_n(1+i)^{-n}$ ، فنجد:

$$V_0=\left(a+\frac{r}{i}+nr\right)\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}-\frac{nr}{i}$$

مثال5:

أحسب القيمة المكتسبة لمتتالية دفعات ذات تزايد حسابي، حيث تعطى خصائصها كما يلي:

$$a=20000\ DA\ ,\ n=6\ ,\ i=8\%\ ,\ r=2000\ DA$$

حل المثال5:

$$V_n=\left(a+\frac{r}{i}\right)\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i}-\frac{nr}{i}$$

$$\therefore V_n=\left(20000+\frac{2000}{0.08}\right)\cdot\frac{(1.08)^6-1}{0.08}-\frac{6\cdot 2000}{0.08}=180300\ DA$$

مثال6:

أحسب القيمة الحالية لمتتالية حسابية الخاصة بـ 30 دفعة، حيث أن الحد الأول يساوي 3000 دج والأساس يساوي 300 دج و بمعدل فائدة 8 % .

حل المثال6:

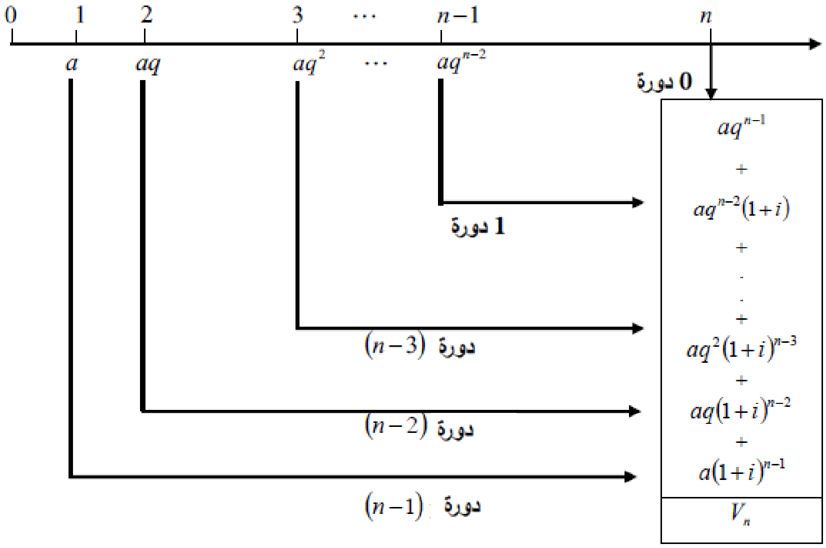
$$V_0=\left(a+\frac{r}{i}+nr\right)\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}-\frac{nr}{i}$$

$$\therefore V_0=\left(3000+\frac{300}{0.08}+30\cdot 300\right)\cdot\frac{1-(1.08)^{-30}}{0.08}-\frac{30\cdot 300}{0.08}=64687.5\ DA$$

ثانيا: الدفعات ذات التزايد الهندسي Les annuités en progression géométrique

أ- القيمة المكتسبة V_n:

ليكن تزايد هندسي لدفعات نهاية المدة ذات أساس q موضحة في الشكل التالي:



$$V_n = a(1+i)^{n-1} + aq(1+i)^{n-2} + aq^2(1+i)^{n-3} + ... + aq^{n-2}(1+i) + aq^{n-1}$$

الطرف الأيمن يشكل متتالية هندسية حيث:

الحد الأول : $a(1+i)^{n-1}$

n: عدد الحدود

الأساس : $\frac{q}{(1+i)}$

المجموع يعطي كالتالي:

$$V_n = (1+i)^{n-1} \cdot \frac{\left(\frac{q}{1+i}\right)^n - 1}{\left(\frac{q}{1+i}\right) - 1}$$

$$\therefore V_n = (1+i)^{n-1} \cdot \frac{\frac{q^n - (1+i)^n}{(1+i)^n}}{\frac{q-(1+i)}{(1+i)}}$$

$$\therefore V_n = \frac{(1+i)^n}{(1+i)} \cdot \frac{q^n - (1+i)^n}{(1+i)^n} \cdot \frac{(1+i)}{q-(1+i)}$$

$$\therefore V_n = a \cdot \left[\frac{q^n - (1+i)^n}{q-(1+i)}\right]$$

مع $q = 1+g$

$$V_n = a \cdot \frac{(1+g)^n - (1+i)^n}{g-i}$$

$$\therefore V_n = a \cdot \frac{(1+i)^n - (1+g)^n}{i-g}$$

ب− القيمة الحالية V_0 :

$$V_0 = V_n (1+i)^{-n}$$

$$\therefore V_0 = \frac{a}{(1+i)^n} \cdot \left[\frac{q^n - (1+i)^n}{q-(1+i)}\right]$$

$$\therefore V_0 = \frac{a}{(1+i)^n} \cdot \frac{(1+g)^n - (1+i)^n}{g-i}$$

مثال7:

نضع في نهاية كل شهر ولمدة 25 شهر دفعات ذات تزايد هندسي بأساس 2 ، الايداع الأول يبلغ 20 دج ، جميع الايداعات لها فائدة مركبة بمعدل سنوي 10 % ، ما هي القيمة الحالية لسلسلة الايداعات ؟

حل المثال7:

أولا: تحويل المعدل السنوي إلى معدل شهري.

$$V(1.1)^1 = V(1+i_m)^{12}$$
$$\therefore (1.1)^1 = (1+i_m)^{12}$$
$$\therefore (1.1)^{\frac{1}{12}} = 1+i_m \Rightarrow i_m = (1.1)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0.008$$
$$\therefore i_m = 0.008 = 0.8\%$$

$$a = 20\ DA\ ,\ n = 25\ ,\ i = 8\%\ ,\ q = 2$$
$$V_0 = \frac{a}{(1+i)^n} \cdot \left[\frac{q^n - (1+i)^n}{q-(1+i)}\right]$$
$$\therefore V_0 = \frac{20}{(1.008)^{25}} \cdot \left[\frac{2^{25} - (1.008)^{25}}{2-(1.008)}\right] = 554319196.5\ DA$$

تمارين محلولة:

تمرين1:

اقترض شخص مبلغا من بنك واتفق مع ادارة هذا البنك على تسديده وفق 10 دفعات سنوية ثابتة ، قيمة الواحدة 70000 دج ، حيث تدفع الأولى في بداية السنة من تاريخ الاقتراض.

المطلوب:

إذا كان معدل الفائدة المطبق 9 %، حدد قيمة القرض ؟

حل التمرين 1:

$$a = 70000DA \ , \ i = 0.09 \ , \ n = 10 \ , \ V_0 = ?$$

$$V_0 = a(1+i)\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 70000(1.09)\cdot\frac{1-(1.09)^{-10}}{0.09}$$

$$\therefore V_0 = 489667.28\ DA$$

تمرين2:

أحسب القيمة المكتسبة لسلسلة من 50 قسطا ربع سنوي ثابتا بقيمة 50000 دج ، بمعدل سنوي قدره 12٪ .

حل التمرين 2:

$$a = 50000DA \ , i = 0.12 \ , \ n = 50(sem)$$

$$(1.12)^{\frac{1}{4}} = 1+i_t \Rightarrow i_t = (1.12)^{\frac{1}{4}} - 1 = 0.028$$

$$\therefore i_t = 0.028 = 2.8\%$$

$$V_n = a\cdot\frac{(1+i)^n - 1}{i} = 50000\cdot\frac{(1.028)^{50} - 1}{0.028} = 5317709.186\ DA$$

تمرين 3:

أحسب القيمة المكتسبة لسلسلة من 15 قسط سنوي ذو تزايد حسابي بأساس يساوي 1.1 وبمعدل سنوي 7٪ ، تم تحديد أول قسط سنوي بـ 8000 دج ، ما هو مقدار القسط الأخير؟

حل التمرين 3:

$$a = 8000DA \ , i = 0.07 \ , \ n = 15 \ , \ r = 1.1$$

$$V_n = \left(a + \frac{r}{i}\right)\cdot\frac{(1+i)^n - 1}{i} - \frac{nr}{i}$$

$$\therefore V_n = \left(8000 + \frac{1.1}{0.07}\right)\cdot\frac{(1.07)^{15} - 1}{0.07} - \frac{15\cdot 1.1}{0.07} = 201191.35\ DA$$

القسط الأخير : $a + (n-1)r = 8000 + 14(1.1) = 8015.4\ DA$

تمرين 4:

نفس معطيات التمرين 2 وبفرض $n=8$ وفي حالة دفعات ذات تزايد هندسي ما هو مقدار القسط الأخير؟

حل التمرين 4:

$$a=8000\ DA\ ,\ i\ =0.07\ ,\ n=8\ ,\ q=1.1$$

$$V_n=a\cdot\left[\frac{q^n-(1+i)^n}{q-(1+i)}\right]$$

$$\therefore V_n=8000\cdot\left[\frac{1.1^8-(1.07)^8}{1.1-(1.07)}\right]=113440.7\ DA$$

القسط الأخير: $aq^{n-1}=8000(1.1)^7=15589.73\ DA$

تمرين 5:

أودع شخص مبلغ من المال في بنك في أول من كل شهر من 2020/4/4 إلى 2023/4/4، أراد تجميع 1465133.58 دج في 2023/4/4 ، إذا كان المعدل الشهري 0.008 فما هي قيمة مبلغ المال المودع كل شهر (الدفعة) ؟

حل التمرين 5:

$$a=?\ ,\ i_m=0.008\ ,\ n=36\ ,\ V_n=1465133.58\ \text{DA}$$

$$V_n=a(1+i)\frac{(1+i)^n-1}{i}\Rightarrow a=\frac{i\times V_n}{(1+i)^{n+1}-(1+i)}$$

$$\therefore a=\frac{0.008\times1465133.58}{(1.008)^{37}-(1.008)}=35000\ \text{DA}$$

تمرين 6:

أودع شخص في بنك دفعات في نهاية كل سنة، كانت على الأشكال التالية:

- الدفعتين الأوليتين متساويتين، قيمة كل واحدة 70000 دج بمعدل فائدة 9%.
- الخمس الدفعات الموالية كذلك متساوية ، قيمة كل واحدة 40000 دج بمعدل فائدة 8 % .

- الأربع الدفعات الموالية كذلك متساوية ، قيمة كل واحدة 30000 دج بمعدل فائدة 10 % .
- الثلاث الدفعات الأخيرة كذلك متساوية ، قيمة كل واحدة 50000 دج بمعدل فائدة 6 % .

المطلوب:

أوجد بطريقتين:

الجملة المحققة في نهاية السنة الرابعة عشر ؟

القيمة الحالية لهذه الدفعات ؟

حل التمرين 6:

نلاحظ أن هذه الدفعات غير ثابتة (دفعات كيفية في نهاية المدة).

الجملة المحققة في نهاية السنة الرابعة عشر

- **الطريقة الأولى:**

$$V_n = \sum_{p=1}^{n} ap\left(1+i\right)^{n-p}$$

$$\therefore V_n = a_n + a_{n-1}\left(1+i\right) + ... + a_2\left(1+i\right)^{n-2} + a_1\left(1+i\right)^{n-1}$$

$$\therefore V_n = 50000\left[1+1.06+\left(1.06\right)^2\right] + 30000\left[\left(1.1\right)^3+\left(1.1\right)^4+\left(1.1\right)^5+\left(1.1\right)^6\right]$$

$$+40000\left[\left(1.08\right)^7+\left(1.08\right)^8+\left(1.08\right)^9+\left(1.08\right)^{10}+\left(1.08\right)^{11}\right]$$

$$+70000\left[\left(1.09\right)^{12}+\left(1.09\right)^{13}\right] = 1158160.9\ DA$$

$$\therefore V_n = 1158160.9\ DA$$

- **الطريقة الثانية:**

$$V_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$\therefore V_n = \left(70000\cdot\frac{(1.09)^2-1}{0.09}\right)\cdot(1.09)^{12} + \left(40000\cdot\frac{(1.08)^5-1}{0.08}\right)\cdot(1.08)^7$$

$$+\left(30000\cdot\frac{(1.1)^4-1}{0.1}\right)\cdot(1.1)^3 + \left(50000\cdot\frac{(1.06)^3-1}{0.06}\right) = 1158160.9\ DA$$

$$\therefore V_n = 1158160.9\ DA$$

القيمة الحالية لهذه الدفعات:

- **الطريقة الأولى:**

$$V_0 = \sum_{p=1}^{n} ap(1+i)^{-p}$$

$$\therefore V_0 = a_1(1+i)^{-1} + a_2(1+i)^{-2} + \ldots\ldots + a_{n-1}(1+i)^{-n+1} + a_n(1+i)^{-n}$$

$$\therefore V_0 = 70000\left[(1.09)^{-1} + (1.09)^{-2}\right] +$$

$$40000\left[(1.08)^{-3} + (1.08)^{-4} + (1.08)^{-5} + (1.08)^{-6} + (1.08)^{-7}\right] +$$

$$30000\left[(1.1)^{-8} + (1.1)^{-9} + (1.1)^{-10} + (1.1)^{-11}\right] +$$

$$50000\left[(1.06)^{-12} + (1.06)^{-13} + (1.06)^{-14}\right] = 379266.728\ DA$$

$$\therefore V_0 = 379266.728\ DA$$

- **الطريقة الثانية:**

$$V_0 = a\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$\therefore V_0 = 70000\cdot\frac{1-(1.09)^{-2}}{0.09} + \left(40000\cdot\frac{1-(1.08)^{-5}}{0.08}\right)\cdot(1.08)^{-2}$$

$$+\left(30000\cdot\frac{1-(1.1)^{-4}-1}{0.1}\right)\cdot(1.1)^{-7} + \left(50000\cdot\frac{1-(1.06)^{-3}}{0.06}\right)\cdot(1.06)^{-11} = 379266.728\ DA$$

$$\therefore V_0 = 379266.728\ DA$$

تمرين 7:

نفس معطيات التمرين السابق (تمرين 6) باعتبار أن الايداع في بداية كل سنة.

حل التمرين 7:

نلاحظ أن هذه الدفعات غير ثابتة (دفعات كيفية في بداية المدة).

الجملة المحققة في نهاية السنة الرابعة عشر

- **الطريقة الأولى:**

$$V_n = a(1+i)\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i}$$

$$\therefore V_n = \left(70000(1.09)\cdot\frac{(1.09)^2-1}{0.09}\right)\cdot(1.09)^{12} + \left(40000(1.08)\cdot\frac{(1.08)^5-1}{0.08}\right)\cdot(1.08)^7$$

$$+\left(30000(1.1)\cdot\frac{(1.1)^4-1}{0.1}\right)\cdot(1.1)^3 + \left(50000(1.06)\cdot\frac{(1.06)^3-1}{0.06}\right) = 1255451.408\ DA$$

$$\therefore V_n = 1255451.408\ DA$$

- **الطريقة الثانية:**

$$V_n = \sum_{p=1}^{n} ap(1+i)^{n-p+1}$$

$$\therefore V_n = a_n(1+i) + a_{n-1}(1+i)^2 + \ldots.. + a_2(1+i)^{n-1} + a_1(1+i)^n$$

$$\therefore V_n = 50000\left[(1.06)+(1.06)^2+(1.06)^3\right] + 30000\left[(1.1)^4+(1.1)^5+(1.1)^6+(1.1)^7\right]$$

$$+40000\left[(1.08)^8+(1.08)^9+(1.08)^{10}+(1.08)^{11}+(1.08)^{12}\right]$$

$$+70000\left[(1.09)^{13}+(1.09)^{14}\right] = 1255451.408\ DA$$

$$\therefore V_n = 1255451.408\ DA$$

القيمة الحالية لهذه الدفعات:

- **الطريقة الأولى:**

$$V_0 = \sum_{p=1}^{n} ap\left(1+i\right)^{-p+1}$$

$$\therefore V_0 = a_1 + a_2\left(1+i\right)^{-1} + ... + a_{n-1}\left(1+i\right)^{-n+2} + a_n\left(1+i\right)^{-n+1}$$

$$\therefore V_0 = 70000\left[1+\left(1.09\right)^{-1}\right]+$$

$$40000\left[\left(1.08\right)^{-2}+\left(1.08\right)^{-3}+\left(1.08\right)^{-4}+\left(1.08\right)^{-5}+\left(1.08\right)^{-6}\right]+$$

$$30000\left[\left(1.1\right)^{-7}+\left(1.1\right)^{-8}+\left(1.1\right)^{-9}+\left(1.1\right)^{-10}\right]+$$

$$50000\left[\left(1.06\right)^{-11}+\left(1.06\right)^{-12}+\left(1.06\right)^{-13}\right] = 410407.315\ DA$$

$$\therefore V_0 = 410407.315\ DA$$

- **الطريقة الثانية:**

$$V_0 = a\left(1+i\right)\cdot\frac{1-\left(1+i\right)^{-n}}{i}$$

$$\therefore V_0 = 70000\left(1.09\right)\cdot\frac{1-\left(1.09\right)^{-2}}{0.09} + \left(40000\left(1.08\right)\cdot\frac{1-\left(1.08\right)^{-5}}{0.08}\right)\cdot\left(1.08\right)^{-2}$$

$$+\left(30000\left(1.1\right)\cdot\frac{1-\left(1.1\right)^{-4}-1}{0.1}\right)\cdot\left(1.1\right)^{-7}+$$

$$\left(50000\left(1.06\right)\cdot\frac{1-\left(1.06\right)^{-3}}{0.06}\right)\cdot\left(1.06\right)^{-11} = 410407.315\ DA$$

$$\therefore V_0 = 410407.315\ DA$$

الفصل الخامس : القروض les Emprunts

5-1- تمهيد:

يشير مصطلح القرض إلى نوع من وسائل الائتمان، حيث يتم فيه إقراض مبلغ من المال لطرف أخر في مقابل السداد المستقبلي للقيمة أو المبلغ الأساسي، في كثير من الحالات يضيف المُقرض فائدة و / أو رسوم تمويل إلى القيمة الأساسية التي يجب على المقترض سدادها بالإضافة إلى الرصيد الأساسي.

وتجدر الاشارة أن معرفة بعض الخواص لهذه القروض مهمة للغاية، وهي معرفة:

- وضع الدين في كل لحظة؛
- المبلغ المطلوب في كل فترة؛
- الفائدة الموجبة عند كل لحظة.

ونميز نوعين من القروض:

- القروض غير المجزأة (العادية) les Emprunts indivis
- القروض السندية (الاكتتاب) les Emprunts obligataires

5-2- التحديات Les Enjeux :

يسمح القرض بالتمويل من خلال الحفاظ على حق الملكية و بالرغم من الشروط الممكنة للضمانات، يستخدم القرض لتسهيل الدفع للأسر ولتمويل استثمارات الشركات الخاصة.

هناك دائما قدرة قصوى للديون ، والتي تعتمد بشكل خاص على الدخل والهيكل القانوني والضمانات المقدمة ولكن أيضا على حجم الشركة والربحية ، حيث أن مقدار حقوق الملكية للمقترض مصلحة في الإقراض قدر الإمكان وتقليل المخاطر الناتجة عن هذا القرض من أجل تحقيق دخل إضافي، اعتمادا على قانون كل دولة يساهم القانون من الحد الأقصى لنسبة الديون وذلك للحد من حالات الإفراط في المديونية التي تؤدي إلى فقدان الثقة في السوق وزيادة المخاطر الجماعية.

على مستوى استراتيجية العمل ، يمثل القرض تبعية لبيئته الخارجية التي سيسعى إلى تقليلها.

5-3- القروض غير المجزأة (العادية) les Emprunts indivis

القرض العادي هو قرض يتم التعاقد معه مع مقرض واحد (مصدر واحد، عادة ما يكون المؤسسة المالية)، يتم تسديد هذا القرض وفقا لشروط تعاقدية مختلفة ، تسمى شروط الاستهلاكات.

يدفع المقترض للمقرض فائدة على فترات منتظمة على رأس المال المحتفظ به خلال الفترة الماضية، ويسدد المقترض رأس المال إما دفعة واحدة عند الاستحقاق أو على عدة أقساط.

سلسلة الدفعات التي تتم على فترات زمنية متساوية تسمى الأقساط السنوية، إذا كان الفاصل الزمني سنة واحدة فنعتبرها أقساط سنوية، أما إذا كان غير ذلك فنعتبر الأقساط على حسب الدفعات: شهرية، سداسية، ربع سنوية.

أولا: خصائص القروض المجزأة (العادية) Caractéristiques des emprunts indivis :

القرض العادي هو قرض يتم الحصول عليه من مقرض واحد، يتبع التسديد شروط الاستهلاك ودفع الفائدة المنصوص عليها في العقد.

الاستهلاك هو تسديد رأس المال دون أخذ رسوم الفائدة في الاعتبار.

الفائدة هي مكافأة للمقرض.

القسط السنوي (أو الدفعة الشهرية، الدفعة ربع السنوية) هو المبلغ الذي يتم دفعه بشكل دوري للتعويض ورسوم الفائدة.

الدفعة = استهلاك رأس المال السنوي + الفائدة.

ثانيا: طرق تسديد القروض العادية:

هناك ثلاث صيغ: التسديد بطريقة in fine ، التسديد باستهلاكات ثابتة ، التسديد بدفعات ثابتة.

ثالثا: جدول استهلاك قرض وفق القروض العادية:

يأخذ الشكل التالي:

الفترة	رأس المال بداية الفترة	الفائدة (المدفوعة في نهاية الفترة)	الاستهلاكات	الدفعات
1	V_0	$I_1 = V_0 \cdot i$	A_1	$a_1 = A_1 + I_1$
2	$V_1 = V_0 - A_1$	$I_2 = V_1 \cdot i$	A_2	$a_2 = A_2 + I_2$

. .	. .	. .	. .	. .
P	$V_{p-1}=V_{p-2}-A_{p-1}$	$I_p=V_{p-1}\cdot i$	A_p	$a_p=A_p+I_p$
. .	. .	. .	. .	. .
n−1	$V_{n-2}=V_{n-3}-A_{n-2}$	$I_{n-1}=V_{n-2}\cdot i$	A_{n-1}	$a_{n-1}=A_{n-1}+I_{n-1}$
n	$V_{n-1}=V_{n-2}-A_{n-1}$	$I_n=V_{n-1}\cdot i$	A_n	$a_n=A_n+I_n$

حيث:

V_0: رأس المال المتبقي في بداية السنة، أي مبلغ القرض.

I_p : الفائدة المدفوعة في نهاية الفترة $p^{éme}$.

A_p : استهلاك الفترة $p^{éme}$.

V_{p-1}: رأس المال المتبقي في بداية السنة $p^{éme}$.

في الجدول السابق، يتكون القسط السنوي المسدد (الدفعة) من عنصرين هما:

- الفائدة المدفوعة خلال الفترة المنقضية I_p .
- رأس المال المستهلك يرمز له بـ A_p ، حيث يأخذ الصيغة التالية:

$a_p=A_p+I_p$ ، يتم حساب الفائدة المدفوعة في نهاية كل فترة من خلال تطبيق المعدل الاسمي على رأس المال المتبقي المستحق في بداية الفترة.

$$I_p=V_{p-1}\cdot i$$

رابعا: العلاقات بين مختلف عناصر القرض:

القسط السنوي هو مجموع رأس المال المسدد عند الاستحقاق و فائدة الفترة.

الدفعة = الاستهلاك + الفائدة: $a_n = A_n + I_n$

الفائدة المدفوعة في التاريخ n ، مع دفع الأقساط k^{eme} هي الفائدة المتعلقة بالفترة n ، هي فائدة بسيطة وتحسب على الدين المتبقي في بداية الفترة n ، أي على رأس المال المتبقي في بداية الفترة V_{n-1}.

$$I_n = V_{n-1} \cdot i$$

$$V_k = V_0 - \sum_{p-1}^{k} A_p$$

رأس المال المقترض = مجموع الاستهلاكات: $V_0 = A_1 + A_2 + ...A_n$.

أ- التسديد بطريقة in fine :

القرض بطريقة **in fine** يفصل دفع الفائدة وسداد رأس المال، يتم تسديد رأس المال دفعة واحدة عند استحقاق القرض، وطوال مدة القرض يقوم المقترض بسداد فائدة القرض فقط.

من خصائصها نجد:

- تكون الفائدة السنوية ثابتة طوال مدة القرض.
- تكون الدفعات ثابتة وتساوي قيمة الفائدة السنوية عدا السنة الأخيرة، حيث تساوي قيمة القرض مضافا إليها قيمة الفائدة السنوية للسنة الأخيرة.
-

جدول استهلاك قرض وفق طريقة in fine ، يأخذ الشكل التالي:

الفترة	رأس المال بداية الفترة	الفائدة (المدفوعة في نهاية الفترة)	الاستهلاكات	الدفعات
1	V_0	$I_1 = I = V_0 \cdot i$	…..	$a_1 = I_1 = I$
2	V_0	$I_2 = I = V_0 \cdot i$	…….	$a_2 = I_2 = I$
. .	. .	. .	. .	. .
P	V_0	$I_p = I = V_0 \cdot i$	…….	$a_p = I_p = I$
. .	. .	. .	. .	. .
n−1	V_0	$I_{n-1} = I = V_0 \cdot i$	……	$a_{n-1} = I_{n-1} = I$
n	V_0	$I_n = I = V_0 \cdot i$	V_0	$a_n = I_n + V_0$

مثال1:

اقترضت مؤسسة مبلغ من البنك قدره 200000 دج لمدة 8 سنوات بمعدل فائدة 5 % ، حيث يسدد بطريقة in fine .

المطلوب:

اعداد جدول استهلاك القرض؟

حل المثال1:

الفترة	رأس المال بداية الفترة	الفائدة (المدفوعة في نهاية الفترة)	الاستهلاكات	الدفعات
1	200000	10000	–	10000
2	200000	10000	–	10000
3	200000	10000	–	10000
4	200000	10000	–	10000
5	200000	10000	–	10000
6	200000	10000	–	10000
7	200000	10000	–	10000
8	200000	10000	200000	210000

ب–التسديد بطريقة الاستهلاكات الثابتة:

هو قرض يتم تسديد أقساطه عن طريق الاستهلاك المستمر أو بالتسلسل المتساوي.

الخصائص العامة هي:

- في نهاية كل فترة، يتم تسديد جزء ثابت من رأس المال المقترض، هذه الحصة تساوي رأس المال المقترض مقسوما على عدد فترات السداد ؛
- رأس المال المتبقي المستحق والفائدة الواجب دفعها تنخفض بانتظام؛
- أقساط السداد هي مجموع أقساط السداد والفائدة المدفوعة؛
- الاستهلاكات تكون ثابتة في كل وحدة زمنية ، حيث: $A=\frac{V_0}{n}$.

جدول استهلاك قرض بطريقة الاستهلاكات الثابتة ، يأخذ الشكل التالي:

الفترة	رأس المال بداية الفترة	الفائدة (المدفوعة في نهاية الفترة)	الاستهلاكات	الدفعات
1	V_0	$I_1 = V_0 \cdot i$	A	$a_1 = A + I_1$
2	$V_1 = V_0 - A_1$	$I_2 = V_1 \cdot i$	A	$a_2 = A + I_2$
. .	. .	. .	. .	. .
P	$V_{p-1} = V_{p-2} - A_{p-1}$	$I_p = V_{p-1} \cdot i$	A	$a_p = A + I_p$
. .	. .	. .	. .	. .
n−1	$V_{n-2} = V_{n-3} - A_{n-2}$	$I_{n-1} = V_{n-2} \cdot i$	A	$a_{n-1} = A + I_{n-1}$
n	$V_{n-1} = V_{n-2} - A_{n-1}$	$I_n = V_{n-1} \cdot i$	A	$a_n = A + I_n$

مثال2:

نفس معطيات المثال السابق، حيث أن تسديد القرض بطريقة الاستهلاكات الثابتة.

المطلوب:

اعداد جدول استهلاك القرض؟

حل المثال2:

الفترة	رأس المال بداية الفترة	الفائدة (المدفوعة في نهاية الفترة)	الاستهلاكات	الدفعات
1	200000	10000	25000	35000
2	175000	8750	25000	33750
3	150000	7500	25000	32500

4	125000	6250	25000	31250
5	100000	5000	25000	30000
6	75000	3750	25000	28750
7	50000	2500	25000	27500
8	25000	1250	25000	26250

ج- **التسديد بطريقة الدفعات الثابتة:**

تسديد القروض بأقساط سنوية ثابتة يبسط للمقترض إدارة خزينته، تقريبا جميع العقود الموقعة تتوافق مع طريقة السداد هذه.

حساب الدفعة الثابتة:

إذا كانت دفعات السداد ثابتة فإن القيمة المخصومة في تاريخ القرض لتسلسل الدفعات الثابتة هي مجموع حدود متتالية هندسية.

في حالة دفع القسط الأول في نهاية الفترة الأولى، يكون القسط السنوي الثابت a هو حل للمعادلة التالية:

$$V_0 = a \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \Rightarrow a = \frac{V_0 \cdot i}{1-(1+i)^{-n}}$$

علاقات مهمة:

نستخلص وفق هذه الطريقة عدة علاقات نوضحها كالتالي:

أولا: العلاقة بين الفوائد والاستهلاكات:

مثلا: من السطر الثاني و الثالث من جدول استهلاك قرض نجد:

$$a_2 = A_2 + I_2 ....(1)$$
$$a_3 = A_3 + I_3 ....(2)$$
$$a = a_2 = a_3$$

من (1) = (2) نحصل:

$$A_3 - A_2 = I_2 - I_3 ....(3)$$

وفق طريقة الاستقراء الرياضي نستنتج:

$$A_n - A_{n-1} = I_{n-1} - I_n$$

نحاول تفكيك العلاقة بين الاستهلاكات أكثر من هذا، لدينا: $A_3 - A_2 = I_2 - I_3$

من جدول استهلاك قرض نجد كذلك:

$$I_2 = V_1 \cdot i ....(4)$$
$$I_3 = V_2 \cdot i ....(5)$$
$$A_2 = V_1 - V_2 ....(6)$$

نعوض (4) ، (5) ، (6) في (3):

$$A_3 - A_2 = V_1 \cdot i - V_2 \cdot i = (V_1 - V_2) \cdot i = A_2 \cdot i$$
$$\therefore A_3 - A_2 = A_2 \cdot i \Rightarrow A_3 = A_2 \cdot (1+i)$$

من الاستقراء كذلك نستنتج:

$$A_n = A_{n-1}(1+i)$$
$$A_n = A_1(1+i)^{n-1} ....(7)$$

العلاقة بين الاستهلاكات وأصل القرض:

$$V_0 = A_1 + A_2 + A_3 + ... + A_{n-1} + A_n$$

نعوض $A_2 \to A_n$ بدلالة A_1 .

$$V_0 = A_1 + A_1(1+i) + A_1(1+i)^2 + ... + A_1(1+i)^{n-2} + A_1(1+i)^{n-1}$$
$$\therefore V_0 = A_1\left[1+(1+i)+(1+i)^2 + ... + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}\right]$$

مجموع حدود متتالية هندسية حدها الأول 1 وأساسها $(1+i)$ ، حيث:

$$V_0 = A_1 \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

العلاقة بين الدفعة والاستهلاكات:

من جدول استهلاك قرض ومن السطر الأخير نجد كذلك:

$$V_n = A_n$$
$$I_n = A_n \cdot \mathrm{i}$$
$$a = A_n + I_n$$
$$\therefore a = A_n + A_n \cdot \mathrm{i}$$
$$\therefore a = A_n(1+i)$$
$$\therefore A_n = A_1(1+i)^{n-1}$$
$$\therefore a = A_1(1+i)^{n-1}(1+i) = A_1(1+i)^n$$
$$A_1 = a(1+i)^{-n}$$
$$\therefore V_0 = a(1+i)^{-n} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$
$$\therefore V_0 = a \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

جدول استهلاك قرض وفق طريقة الدفعات الثابتة:

يأخذ الشكل التالي:

الفترة	رأس المال بداية الفترة	الفائدة (المدفوعة في نهاية الفترة)	الاستهلاكات	الدفعات
1	V_0	$I_1 = V_0 \cdot i$	A_1	$a_1 = A_1 + I_1$
2	$V_1 = V_0 - A_1$	$I_2 = V_1 \cdot i$	A_2	$a_2 = A_2 + I_2$
. .	. .	. .	. .	. .
P	$V_{p-1} = V_{p-2} - A_{p-1}$	$I_p = V_{p-1} \cdot i$	A_p	$a_p = A_p + I_p$
. .	. .	. .	. .	. .
n−1	$V_{n-2} = V_{n-3} - A_{n-2}$	$I_{n-1} = V_{n-2} \cdot i$	A_{n-1}	$a_{n-1} = A_{n-1} + I_{n-1}$

n	$V_{n-1} = V_{n-2} - A_{n-1}$	$I_n = V_{n-1} \cdot i$	A_n	$a_n = A_n + I_n$

مثال3:

نفس معطيات المثال السابق، بحيث أن تسديد القرض يتم بطريقة الدفعات الثابتة.

المطلوب:

اعداد جدول استهلاك القرض؟

حل المثال3:

$$V_0 = 200000\ DA \ , \ i = 5\% \ , \ n = 8$$

$$V_0 = a \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \Rightarrow a = \frac{V_0 \cdot i}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{200000 \times 0.05}{1-(1.05)^{-8}} = 30944.36\ DA$$

الفترة	رأس المال بداية الفترة	الفائدة (المدفوعة في نهاية الفترة)	الاستهلاكات	الدفعات
1	200000	10000	20944.36	30944.36
2	179055.64	8952.78	21991.59	30944.36
3	157064.062	7853.20	23091.16	30944.36
4	133972.90	6698.64	24245.71	30944.36
5	109727.19	5486.36	25458	30944.36
6	84269.19	4213.46	26730.9	30944.36
7	57538.29	2876.91	28067.44	30944.36
8	29470.84	1473.54	29470.84	30944.36

مثال4:

اقترضت مؤسسة مبلغ قدره 500000 دج تم الاتفاق على تسديده بـ 10 دفعات سنوية ثابتة بمعدل فائدة 9 % .

المطلوب:

- حساب قيمة الدفعة .
- حساب قسط الاستهلاك الأول والأخير.
- حساب المبلغ المتبقي من القرض عند الدفعة السابعة.

حل المثال4:

حساب قيمة الدفعة:

$$V_0 = 500000\ DA \ \ , \ \ i = 9\% \ \ , \ \ n = 10$$
$$V_0 = a \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \Rightarrow a = \frac{V_0 \cdot i}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{500000 \times 0.09}{1-(1.09)^{-10}} = 77910\ DA$$

حساب قسط الاستهلاك الأول والأخير:

$$V_0 = A_1 \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \Rightarrow A_1 = \frac{V_0 \cdot i}{(1+i)^n - 1} = 32910\ DA$$

$$A_n = A_1 (1+i)^{n-1}$$
$$\therefore A_{10} = 32910 (1.09)^9 = 71477.10\ DA$$

المبلغ المسدد عند الدفعة السابعة:

عند تسديد الدفعة $p=7$ ضمنا تسديد الاستهلاكات : $S_{p=7}=A_1+A_2+.......+A_7$ من القرض، والمبلغ المسدد هو مجموع هذه الاستهلاكات، بنفس الكيفية نستخدم مجموع حدود متتالية هندسية لنجد:

$$S_p=A_1\cdot\frac{(1+i)^p-1}{i}=32910\cdot\frac{(1.09)^7-1}{0.09}=302786.3\ DA$$

حساب المبلغ المتبقي من القرض عند الدفعة السابعة:

المبلغ المتبقي من القرض عند تسديد الدفعة $p=7$ هو القيمة المكتسبة من الدفعة الثامنة $(p+1=8)$ إلى الدفعة العاشرة (n=10).

$$R_{p=7}=A_8+A_9+A_{10}$$
$$\therefore R_{p=7}=A_{p+1}\cdot\frac{(1+i)^{n-p}-1}{i}=A_8\cdot\frac{(1+i)^3-1}{i}$$
$$\therefore A_8=A_1(1+i)^7=32910\cdot(1.09)^7=60160.76\ DA$$
$$\therefore R_7=60160.76\cdot\frac{(1.09)^3-1}{0.09}=197212.98\ DA$$

5-4- القروض السندية (الاكتتاب) les Emprunts obligataires :

القروض السندية هي قروض تنشأ من إصدار السندات التي يتم توزيعها بين العديد من المقرضين نسميهم المساهمين، ويحصلون مقابل المبالغ التي أقرضوها على شهادات تسمى السندات.

فالقروض السندية هي دين صادر عن شخص معنوي (شركة خاصة أو شركة عامة أو دولة أو سلطة عامة) لتمويل نفسه مع مستثمرين يطلق عليهم حملة السندات، السندات هي أوراق مالية مماثلة لدين الشركة التي تصدر الأوراق المالية، فأثناء قرض

السندات يوقع المقترض والمكتتب عقد سندات لإضفاء الطابع الرسمي على القرض الذي يحدد بشكل خاص تاريخ الاستحقاق وسعر الفائدة.

يكون مبلغ القرض مقسما إلى وحدات متساوية تسمى السندات titres ، حيث أن المقترض ملزم بدفع المبلغ + الفوائد المستحقة، عندئذ تسمى تلك السندات بالالتزامات obligations .

أولا: شروط الاصدار والتسديد:

نبدأ بإعطاء عناصر مهمة للسند وهي:

القيمة الاسمية valeur nominale :

هي قيمة السند المسجلة وتكون متطابقة لجميع السندات في نفس القرض.

قيمة الاصدار valeur d'émission :

يتم إصدار القرض بالقيمة الاسمية نطلق عليها اسم " au pair " إذا كانت $E = C$ أي عندما يكون سعر الإصدار مساويا للقيمة الاسمية للسند، ويتم إصداره " أعلى من القيمة الاسمية au-dessus du pair " إذا كان $E > C$: سعر الإصدار أعلى من القيمة الاسمية للسند ، و " أقل من القيمة الاسمية au-dessous du pair " إذا كان $E < C$: سعر الإصدار أقل من القيمة الاسمية للسند.
تاريخ التسوية هو التاريخ الذي يتم فيه الخصم الفعلي للمكتتب بمبلغ شراء السند، قد يختلف هذا التاريخ عن تاريخ الاستحقاق (date de jouissance).

سعر الاستحقاق Prix de remboursement :

هو السعر الذي تدفعه الشركة عند الاستحقاق لمختلف حملة السندات، يمكن تسديد السند بالقيمة الاسمية (أي حالة au pair إذا كان $R = C$) (سعر الاستحقاق = سعر الاصدار).

في حالة قيمة الاستحقاق أكبر من القيمة الاسمية يمكن تسديدها بسعر أعلى من القيمة الاسمية أي (au-dessus du pair إذا كانت $R > C$) ، إذن :

علاوة الاستحقاق = قيمة الاستحقاق – القيمة الاسمية.

أقل من القيمة الاسمية au-dessous du pair " إذا كانت $R < C$ ،

العلاوة = سعر الاستحقاق – سعر الاصدار.

ثانيا: تحليل القرض السندي:

نأخذ الترميزات التالية:

V_0: المبلغ المقترض.

N : عدد السندات المصدرة (المكتتبة)

$\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$: عدد السندات المستهلكة في كل فترة (وحدة زمنية).

C: القيمة الاسمية للسند.

$d_1, d_2, ..., d_n$: عدد السندات المتبقية في كل فترة.

i: معدل الفائدة الاسمي.

$C \times i$: الفائدة السنوية للسند، يطلق عليها اسم الكُوبون coupon.

$a_1, a_2, ..., a_n$: الدفعات.

$m_1, m_2, ..., m_n$: n استهلاك مدرج في الدفعات $a_1, a_2, ..., a_n$.

ثالثا: جدول استهلاك القرض السندي:

يشبه هذا الجدول مثيله في استهلاك القرض العادي.

الحالة العامة: حالة au pair $(V_R = V_E)$

الفترات	الدين في بداية الفترة (1)	الفائدة $(2)=(1)\cdot i$	عدد السندات المستهلكة (3)	الاستهلاكات $(4)=(3)\cdot C$	الدفعات $(5)=(2)+(4)$	الدين في نهاية المدة $(6)=(1)-(4)$
1	$V_0 = N \cdot C$	$V_0 \cdot i$	μ_1	$m_1 = \mu_1 \cdot C$	$a_1 = V_0 \cdot i + \mu_1 \cdot C$	$V_1 = V_0 - m_1$
2	$V_1 = d_1 \cdot C$	$V_1 \cdot i$	μ_2	$m_2 = \mu_2 \cdot C$	$a_2 = V_1 \cdot i + \mu_2 \cdot C$	$V_2 = V_1 - m_2$
3	$V_2 = d_2 \cdot C$	$V_2 \cdot i$	μ_3	$m_3 = \mu_3 \cdot C$	$a_3 = V_2 \cdot i + \mu_3 \cdot C$	$V_3 = V_2 - m_3$
. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .
P	$V_{p-1} = d_{p-1} \cdot C$	$V_{p-1} \cdot i$	μ_p	$m_p = \mu_p \cdot C$	$a_p = V_{p-1} \cdot i + \mu_p \cdot C$	$V_p = V_{p-1} - m_p$
. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .
n – 1	$V_{n-2} = d_{n-2} \cdot C$	$V_{n-2} \cdot i$	μ_{n-1}	$m_{n-1} = \mu_{n-1} \cdot C$	$a_{n-1} = V_{n-2} \cdot i + \mu_{n-1} \cdot C$	$V_{n-1} = V_{n-2} - m_{n-1}$
n	$V_{n-1} = d_{n-1} \cdot C$	$V_{n-1} \cdot i$	μ_n	$m_n = \mu_n \cdot C$	$a_n = V_{n-1} \cdot i + \mu_n \cdot C$	$V_n = V_{n-1} - m_n = 0$

رابعا: خصائص عامة:

من الجدول السابق نستنتج خمسة خواص ، علما أن الاثبات هو نفسه كما تطرقنا إليه في حالة القروض العادية.

أ) العلاقة بين المبلغ المقترض والدفعات:

$$V_0 = a_1(1+i)^{-1} + a_2(1+i)^{-2} + ... + a_p(1+i)^{-p} + ... + a_n(1+i)^{-n}$$
$$\therefore V_0 = \sum_{p=1}^{n} a_p(1+i)^{-p}$$

إن تطبيق مبدأ تجزئة القرض يجعل من الممكن الحصول على عبارة مكافئة لسابقتها:

$$V_0 = N \cdot C$$
$$\therefore NC = \sum_{p=1}^{n} a_p(1+i)^{-p}$$
$$\therefore NC(1+i) = \sum_{p=1}^{n} a_p(1+i)^{n-p}$$

ب) العلاقة بين السندات المصدرة والمستهلكة:

مجموع المبالغ الموضحة في العمود 4 تساوي المبلغ المقترض:

$$V_0 = m_1 + m_2 + ... + m_n$$

وفق التعريف نجد:

$$V_0 = N \cdot C$$
$$m_p = \mu_p \cdot C \quad , \quad \forall P$$
$$NC = \mu_1 \cdot C + \mu_2 \cdot C + ... + \mu_p \cdot C$$

نقسم الطرفين C على لنحصل على:

$$N = \mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_p$$
$$\therefore \sum_{p=1}^{n} \mu_p$$

هذا المجموع يساوي مجموع المبالغ الموضحة في العمود 3 من جدول استهلاك القرض.

ج) العلاقة بين السندات المتبقية في بداية الفترة والسندات الصادرة في أخرها:

$$V_{n-1} - m_n = 0$$
$$\therefore V_{n-1} = m_n$$
$$\therefore m_n = \mu_n \cdot C$$
$$\therefore d_{n-1} \cdot C = m_n$$
$$\therefore d_{n-1} \cdot C = \mu_n \cdot C \Rightarrow d_{n-1} = \mu_n$$

عدد السندات المتبقية في الفترة (n−1) وفي بداية الفترة n (d_{n-1}) يتم تسويتها بشكل نهائي في نهاية الفترة الأخيرة عن طريق تسديد μ_n سند.

د) العلاقة بين الدفعات والاستهلاكات:

لتكن لدينا دفعتين متتاليتين: p و $p+1$ مع :

$$a_p = V_{p-1} \cdot i + \mu_p \cdot C$$
$$a_{p+1} = V_p \cdot i + \mu_{p+1} \cdot C$$
$$V_{p-1} = d_{p-1} \cdot C$$
$$V_p = d_p \cdot C$$
$$\therefore a_p = d_{p-1} \cdot C \cdot i + \mu_p \cdot C$$
$$\therefore a_{p+1} = d_p \cdot C \cdot i + \mu_{p+1} \cdot C$$

أما الفرق بين الدفعتين فنكتبه كما يلي:

$$a_{p+1}-a_p=\left(d_p\cdot C\cdot i+\mu_{p+1}\cdot C\right)-\left(d_{p-1}\cdot C\cdot i+\mu_p\cdot C\right)$$

$$m_p=V_{p-1}-V_p \;..........(1)$$
$$m_p=\mu_p\cdot C \;.............(2)$$
$$V_{p-1}=d_{p-1}\cdot C \;..........(3)$$
$$V_p=d_p\cdot C \;..............(4)$$

نعوض (2) و (3) و (4) في (1) فنحصل على:

$$\mu_p\cdot C=d_{p-1}\cdot C-d_p\cdot C$$
$$\mu_p=d_{p-1}-d_p$$
$$\therefore d_p=d_{p-1}-\mu_p \;...........(5)$$

$$a_{p+1}-a_p=d_{p-1}\cdot iC-\mu_p\cdot iC+\mu_{p+1}\cdot C-d_{p-1}\cdot iC-\mu_p\cdot C$$
$$\therefore a_{p+1}-a_p=\mu_{p+1}\cdot C-\mu_p\cdot C\left(1+i\right)$$

العلاقة بين عدد السندات المستهلكة بعد تسديد الدفعة p:

$$r_p=\mu_1+\mu_2+....+\mu_p$$

إن تحديد عدد السندات المتبقية بعد تسديد $P^{iém}$ $\left(d_p\right)$ يتم بنفس الطريقة كما في حالة القرض العادي: $d_p=N-r_p$.

القرض السندي بدفعات ثابتة:

يوضح الجدول أدناه العبارات الخاصة بحالة القروض السندية بدفعات ثابتة ، يتم الحصول على هذه العبارات من تلك التي تم إنشاؤها في إطار القروض العادية.

التسمية	العبارة
الدفعة الثابتة	$a=\dfrac{NC\cdot i}{1-(1+i)^{-n}}$
عدد السندات المستهلكة في الاستهلاك الأول	$\mu_1=\dfrac{Ni}{(1+i)^n-1}$
قانون التزايد لعدد السندات المستهلكة	$\mu_{p+1}=\mu_p(1+i)$ $\mu_p=\mu_1(1+i)^{p-1}$
عدد السندات المستهلكة عند الدفعة p	$r_p=N\cdot\dfrac{(1+i)^p-1}{(1+i)^n-1}$
عدد السندات المتبقية بعد تسديد الدفعة p	$d_p=N\cdot\dfrac{(1+i)^n-(1+i)^p}{(1+i)^n-1}$

مثال5:

قرض سندي بدفات ثابتة له الخصائص التالية:

$$V_0=200000\ DA\ ,\ C=100\ ,\ N=2000\ ,\ i=0.09\ ,\ n=4$$

حل المثال5:

عدد السندات المستهلكة (μ_1) تحدد بعدة طرق:

- عن طريق الحساب المسبق للدفعة الثابتة:

$$a=\frac{NC\cdot i}{1-(1+i)^{-n}}=\frac{2000\times100\times0.09}{1-(1.09)^{-4}}=61733.73\ DA$$

$$a_1=V_0\cdot i+\mu_1\cdot C\Rightarrow\mu_1=\frac{a_1-V_0\cdot i}{C}$$

بمأن الدفعة ثابتة أي: $a_1 = a$ ، فأن:

$$a_1 = V_0 \cdot i + \mu_1 \cdot C \Rightarrow \mu_1 = \frac{a_1 - V_0 \cdot i}{C} = \frac{61733.73 - (200000)(0.09)}{100} = 437.33$$

$$m_1 = NC \cdot \frac{i}{(1+i)^n - 1} = \frac{(2000)(100)(0.09)}{(1.09)^4 - 1} = 43733.73\ DA$$

$$m_1 = \mu_1 \cdot C \Rightarrow \mu_1 = \frac{m_1}{C} = \frac{43733.73}{100} = 437.33$$

$$\mu_1 = \frac{Ni}{(1+i)^n - 1} = \frac{2000 \times 0.09}{(1.09)^4 - 1} = 437.33$$

$$\mu_{p+1} = \mu_p (1+i)$$

μ : ذات تزايد هندسي بأساس $(1+i)$.

القيم	العلاقة مع μ السابقة	العلاقة بـ μ_1	μ_i
437.33	–	–	μ_1
476.68	$\mu_1(1+i)$	$\mu_1(1+i)$	μ_2
519.6	$\mu_2(1+i)$	$\mu_1(1+i)^2$	μ_3
566.35	$\mu_3(1+i)$	$\mu_1(1+i)^3$	μ_4

تحديد القيم الحالية للقيم الحقيقية المتتابعة لـ μ.

μ المدورة	μ النظرية	μ_i
437	437.33	μ_1
477	476.68	μ_2
520	519.6	μ_3
566	566.35	μ_4
2000		

جدول استهلاك قرض:

الفترات	عدد السندات المتبقية d1	الدين في بداية الفترة (1) Dc (2)=(1).C	الفائدة dCi : (3)=(2).i	عدد السندات المستهلكة (4)	الاستهلاكات (5)=(4).C	الدفعات (6)=(3)+(5)	عدد السندات المتبقية في نهاية المدة
1	2000	200000	18000	437	43700	61700	1563
2	1563	156300	14067	477	47700	61767	1086
3	1086	108600	9774	520	52000	61774	566
4	566	56600	5094	566	56600	61694	0
					200000		

قرض سندي باستهلاكات ثابتة:

بنفس الكيفية التي تمت مع القرض العادي، نلخص ذلك في الجدول التالي:

التسمية	العبارة
الاستهلاك الثابت	$m = \frac{NC}{n} = \mu C$
عدد السندات المستهلكة في كل فترة	$\mu = \frac{N}{n}$
قانون التزايد للدفعات	$a_{p+1} - a_p = -\mu C \cdot i$ $a_{p+1} - a_p = -\frac{NC}{n} \cdot i$
عدد السندات المستهلكة عند الدفعة p	$r_p = P \cdot \mu$
عدد السندات المتبقية بعد تسديد الدفعة p	$d_p = \mu(n-p)$

مثال6:

نفس معطيات المثال السابق باستخدام طريقة الاستهلاكات الثابتة:

حل المثال6:

$$V_0 = 200000\ DA\ ,\ C = 100\ ,\ N = 2000\ ,\ i = 0.09\ ,\ n = 4$$

$$m = \frac{NC}{n} = \frac{2000 \times 100}{4} = 50000\ DA$$

عدد السندات المستهلكة في كل سنة:

$$\mu = \frac{N}{n} = \frac{2000}{4} = 500 \quad \vee \quad \mu = \frac{m}{C} = \frac{50000}{100} = 500$$

الفترات	عدد السندات المتبقية d1	الدين في بداية الفترة (1) Dc (2)=(1).C	الفائدة dCi : (3)=(2).i	عدد السندات المستهلكة (4)	الاستهلاكات (5)=(4).C	الدفعات (6)=(3)+(5)	عدد السندات المتبقية في نهاية المدة
1	2000	200000	18000	500	50000	68000	1500
2	1500	150000	13500	500	50000	63500	1000
3	1000	100000	9000	500	50000	59000	500
4	500	50000	4500	500	50000	54500	0
					200000		

الاصدار والاستحقاق بقيم مختلفة عن القيمة الاسمية:

حتى الأن تم اعتبار القيمة الاسمية C كنقطة تعادل (نطلق عليها pair) مع كل من سعر إصدار السند وسعر استحقاقه ، من أجل تسهيل وضع أوراقهم المالية يعرض المُصدرون في كثير من الأحيان ثلاث قيم مختلفة عن القيمة السابقة للسندات ، وبالتالي سيتم إصدار السند بقيمة E أقل من القيمة الاسمية C (au pair) ويتم استحقاقه بقيمة R ، أكبر من سعر الإصدار E والقيمة الاسمية C.

إذا كان المقصود من ممارسة سعر الإصدار $E<C$ تشجيع المكتتبين، فيشكل عرض قيمة الاستحقاق $R>C$ بشكل عام عاملا إضافيا في ضمان القوة الشرائية للمكتتب ، لا سيما في أوقات ارتفاع التضخم.

– **الاصدار بقيمة** $E<C$:

يسمى الفرق بين قيمة الإصدار E والقيمة الاسمية للسند C علاوة الإصدار، وتجدر الإشارة إلى أن إدخال هذا المتغير الجديد لا يغير المكافأة المخصصة للسندات، ويبقى حساب الكُوبون على أساس القيمة الاسمية C لا المتغيرات التي تساهم في بناء جدول الاستهلاك

والتي تغير معدلات التكلفة والعائد فقط.

– **الاستحقاق بقيمة** $R>C$ **مع** $(E=C)$:

الفرق $R-C$ إذا كان : $E=C$ ، أو $R-E$ إذا كان : $R<C$ يشكل علاوة الاستحقاق ، يؤدي إدخال هذا المتغير إلى تعديل التعبيرات السابقة بناء على المساواة بين R و C و E ، وهكذا يصبح التعبير عن الدفعة ذات الرتبة p : $a_p=d_{p-1}\cdot iC+\mu_p\cdot R$.

سنفحص الأثار المترتبة على هذا التمييز على الخصائص المحددة لطريقتي التسديد التي تم التطرق إليها.

أ– **التسديد بدفعات ثابتة:**

نعتبر دفعات ثابتة p و $p+1$ ، الفرق بين دفعتين يكتب كما يلي:

$$a_{p+1}-a_p=\left(d_p\cdot iC+\mu_{p+1}\cdot R\right)-\left(d_{p-1}\cdot iC+\mu_p\cdot R\right)$$

وبمأن الدفعة ثابتة $a_{p+1}=a_p$ ، المساواة السابقة تكتب كالتالي:

$$d_p \cdot iC + \mu_{p+1} \cdot R = d_{p-1} \cdot iC + \mu_p \cdot R$$

أو:

$$\begin{aligned}
&d_p = d_{p-1} - \mu_p \\
&d_{p-1} \cdot iC - \mu_p \cdot iC + \mu_{p+1} \cdot R = d_{p-1} \cdot iC + \mu_p \cdot R \\
&\Rightarrow \mu_{p+1} \cdot R = \mu_p \cdot R + \mu_p \cdot iC \\
&\Rightarrow \mu_{p+1} = \mu_p \left(1 + \frac{iC}{R}\right) ....(1)
\end{aligned}$$

$$i' = \frac{iC}{R} \Rightarrow \mu_{p+1} = \mu_p (1 + i')$$

معدل i' يسمى المعدل الظاهري للقرض، هو السعر المطبق على R الذي يجعل من الممكن الحصول على قيمة الكبون السنوية:

$$\begin{aligned}
&Ri' = iC \quad R > C \quad i' < i \\
&\mu_p = \mu_1 (1 + i')^{p-1}
\end{aligned}$$

$$\mu_1 = N \cdot \frac{i'}{(1 + i')^n - 1}$$

تشير هذه الصيغ على التوالي إلى قانون تزايد الاستهلاك من خلال عدد السندات المستهلكة وعدد السندات المستهلكة في الدفعة الأولى.

يتم الحصول على صيغ الأقساط الجديدة مباشرة عن طريق تعويض C و i و R و i'.

$$a = NR \cdot \frac{i'}{1 - (1 + i')^{-n}}$$

r_p و d_p تصبح كما يلي:

$$r_p = N \cdot \frac{(1+i')^p - 1}{(1+i')^n - 1}$$

$$d_p = N \cdot \frac{(1+i')^n - (1+i')^p}{(1+i')^n - 1}$$

مثال7:

ليكن لدينا قرض سندي بدفعات ثابتة له الخصائص التالية:

$$V_0 = 200000\ DA\ ,\ C = 100\ ,\ N = 2000\ ,$$
$$i = 0.09\ ,\ n = 4\ \ ,\ \ E = 95\ ,\ n = 4\ ,\ R = 106$$

المطلوب:

تشكيل جدول استهلاك قرض ؟

حل المثال7:

نلاحظ أن $R > C$ نستلزم: $i' = \frac{iC}{R} = \frac{(0.09)(100)}{106} = 0.085$ ، المعدل الظاهري i' أقل من المعدل i، استهلاك السندات يتم وفق تزايد هندسي بأساس $(1+i')$.

$$a = NR \cdot \frac{i'}{1-(1+i')^{-n}} = (2000)(106) \cdot \frac{0.085}{1-(1.085)^{-4}} = 64721.03\ DA$$

$$\mu_1 = N \cdot \frac{i'}{(1+i')^n - 1} = (2000) \cdot \frac{0.085}{(1.085)^4 - 1} = 440.57$$

نلاحظ أن قيمة الدفعة 64721.03 دج زادت عن سابقتها (حالة au pair): 61700 دج.

نفس الشيء مع عدد السندات المستهلكة للدفعة الأولى: 437.33 ، أما في حالة المعدل الجديد فكانت: 440.57 .

$$\mu_{p+1} = \mu_p\left(1+i'\right)$$
$$\therefore \mu_2 = 440.57\left(1.085\right) = 478\ DA$$
$$\therefore \mu_3 = 440.57\left(1.085\right)^2 = 518.65\ DA$$
$$\therefore \mu_4 = 440.57\left(1.085\right)^3 = 562.74\ DA$$

تحديد القيم الحالية للقيم الحقيقية المتتابعة لـ μ .

μ_i	**μ النظرية**	**μ المدورة**
μ_1	440.57	440
μ_2	478.02	478
μ_3	518.65	519
μ_4	562.74	563
		2000

جدول استهلاك قرض:

		الدين المتبقي في بداية الفترة						
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	2000	200000	212000	18000	440	46640	64640	1560
2	1560	156000	165360	14040	478	50668	64708	1082
3	1082	108200	114692	9738	519	55014	64752	563

4	563	56300	59678	5067	563	59678	64745	0
						200000		

(1): الفترات.

(2): عدد السدان المتبقية في بداية الفترة d.

(3): بالقيمة الاسمية: $dC = (2) \cdot C$.

(4): بقيمة التسديد: $dR = (2) \cdot R$.

(5): الفائدة: $diC = (3) \cdot i$.

(6): عدد السندات المستهلكة μ .

(7): الاستهلاكات $\mu R = (6) \cdot R$.

(8): الدفعات $(8) = (5) + (7) \therefore a = diC + \mu R = (6)$.

(9): عدد السندات المتبقية في نهاية الفترة$(6) - (2) = (9)$.

التسديد باستهلاكات ثابتة:

الاستهلاك الثابت:

$$m = \mu C$$
$$m = \mu R$$

قانون التزايد الدفعات الأولية: $a_{p+1} - a_p = -\frac{N}{n} iC = -\mu Ci$.

يصبح : $a_{p+1}-a_p=-\frac{N}{n}Ri'=-\mu Ri'$.

مثال8:

نفس بيانات المثال السابق:

$$V_0=200000\ DA\ ,\ C=100\ ,\ N=2000\ ,$$
$$i=0.09\ ,\ n=4\quad ,\quad E=95\ ,\ n=4\ ,\ R=106$$

المطلوب:

تحديد قيمة الاستهلاك الثابت ؟

حل المثال8:

$$m=\mu R\Rightarrow m=\frac{N}{n}R$$
$$\therefore m=\frac{2000}{4}(106)=53000\ DA$$

$$a_{p+1}-a_p=-\mu Ri'$$
$$\therefore a_{p+1}-a_p=-(500)(106\times 0.085)=-4505$$

خامسا: سعر سند عند الاستحقاق:

سعر السند يساوي مجموع التدفقات النقدية التي ينتجها ، محينة بمعدل العائد عند استحقاق السند، يمكن تقدير العائد حتى استحقاق السند بسعر العائد الاكتواري للسندات الموجودة في السوق والتي لها نفس الخصائص.

بالنسبة لسند بطريقة in fine

$$P=\frac{c_1}{(1+r)}+\frac{c_2}{(1+r)^2}+.....+\frac{c_{n-1}}{(1+r)^{n-1}}+\frac{c_n}{(1+r)^n}+\frac{R}{(1+r)^n} \quad ....(1)$$

$$\text{in } fine \ : \ (c_1=c_2=....=c)$$

$$\therefore \quad P=c\cdot\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}+\frac{R}{(1+r)^n}$$

P : سعر اصدار السند.

$c_1,c_2,...,c_n$: تمثل الكُوبونات المدفوعة من سعر السند.

R : سعر الاستحقاق.

n: مدة حياة السند.

r: معدل العائد الاكتواري.

مثال9:

أحسب السعر الحالي للسند بطريقة in fine بقيمة اسمية قدرها 500000 دج ، ومعدل اسمي قدره 6٪ ، واستحقاق لمدة 4 سنوات يتم تسديده بالقيمة الاسمية au pair ، إذا كان معدل عائد السوق هو 7٪ للسندات من نفس النوع.

حل المثال9:

$$V_0=500000\ DA\ ,\ i=0.06\ ,\ r=0.07\ ,\ c_1=c_2=c_3=c_4=c$$

$$R=C\ ,\ \ c_1=c_2=c_3=c_4=c=V_0\cdot i=500000(0.06)=30000\ DA$$

$$P=\frac{30000}{(1.07)}+\frac{30000}{(1.07)^2}+\frac{30000}{(1.07)^3}+\frac{530000}{(1.07)^4}=483063.94\ DA$$

سادسا: معدل العائد الاكتواري (TRA) taux de rendement actuariel :

هو المعدل الذي يجعل من الممكن معادلة قيمة الإصدار والقيم الحالية للتدفقات المستقبلية الناتجة عن السند ، حيث يتوافق مع الربحية التي تم الحصول عليها عن طريق الاحتفاظ بأصل مالي حتى تاريخ استحقاقه (العمر المتبقي للاستغلال) وعن طريق إعادة استثمار الفائدة بنفس السعر الاكتواري.

يتيح معدل العائد الاكتواري للسند على سبيل المثال قياس أدائه المالي الحقيقي إذا تم الاحتفاظ به حتى يتم سداده ، يشير العائد الاكتواري إلى العائد الفعلي للاستثمار مثل السند ، حيث يسمح لنا بمعرفة مقدار ما سيكسبه الاستثمار مع مراعاة جميع العوامل التي تحدد عائده، يعني هذا :

- سعر شراء هذا الأصل (سعر الإصدار إذا كان سندا)؛
- سعر الاسترداد عند الاستحقاق ؛
- مبلغ وجدول المدفوعات ؛
- المدة المتبقية إلى غاية السداد.

من خلال تجاوز هذه العوامل ، يكون معدل العائد الاكتواري مشابها بشكل خاص لما سيحصل عليه حامل السند إذا احتفظ به حتى تاريخ استحقاقه (عن طريق إعادة استثمار الكُوبونات بنفس المعدل).

وبالتالي فإن العائد الاكتواري يجعل من الممكن تحديد ما تبقى ليتم ربحها حتى الاستحقاق، إنه مشابه إلى حد ما لمعدل العائد الداخلي **TRI**.

بالنسبة للمستثمر من المهم التمييز بين المعدل الاكتواري الخام وصافي المعدل الاكتواري، الأول لا يأخذ في الحسبان الضرائب ، والثاني يأخذها في الحسبان، ومع ذلك قد تكون بعض الاستثمارات أكثر جاذبية من غيرها بعد الضرائب، وبالتالي فإن الدفتر البنكي الذي يقدم معدل اكتواري أعلى من الدفتر A مثلا قد يثبت في النهاية أنه أقل ربحا بعد حساب الضريبة.

حساب معدل العائد الاكتواري الخام (in fine) :

العائد الاكتواري الخام أو معدل العائد حتى الاستحقاق ، هو معدل العائد (باستثناء تكاليف المعاملات والضرائب) للمستثمر الذي سيشتري السند فورا مقابل البقاء حتى الاستحقاق.

من خلال الصيغة (1)، يمكن إعادة كتابتها على الشكل التالي:

$$\underbrace{\frac{c_1}{(1+r)}+\frac{c_2}{(1+r)^2}+.....+\frac{c_{n-1}}{(1+r)^{n-1}}+\frac{c_n}{(1+r)^n}}_{\text{القيمة الحلية للكوبونات المستقبلية}}+\underbrace{\frac{R}{(1+r)^n}}_{\text{القيمة الحالية للاستحقاق (بطريقة in fine)}}$$

مثال10:

أحسب المعدل الاكتواري الخام r عند إصدار السند $(E=483063.9437\ DA)$ بطريقة **in fine** بقيمة اسمية قدرها 500000 دج ، ومعدل اسمي قدره 6٪ ، واستحقاق لمدة 4 سنوات يتم تسديده بالقيمة الاسمية **au pair** .

حل المثال10:

$$V_0=500000\ DA\ ,\ i=0.06\ ,\ r=?\ ,\ c_1=c_2=c_3=c_4=c\ ,\ E=483063.9437\ DA$$
$$R=C\ ,\ \ c_1=c_2=c_3=c_4=c=V_0\cdot i=500000(0.06)=30000\ DA$$
$$E=\frac{30000}{(1+r)}+\frac{30000}{(1+r)^2}+\frac{30000}{(1+r)^3}+\frac{30000}{(1+r)^4}+\frac{500000}{(1+r)^4}=450000$$

المعدل الاكتواري الخام لهذا السند هو المعدل r ، نحول المساواة الأخيرة إلى معادلة جبرية كالتالي:

$$f(r)=30000(1+r)^{-1}+30000(1+r)^{-2}+30000(1+r)^{-3}$$
$$+30000(1+r)^{-4}+500000(1+r)^{-4}-483063.9437=0$$

r هو جذر للمعادلة الأخيرة ، لإيجاده بالطرق التحليلية صعب إن لم نقل مستحيل ، لذا سنستخدم الطرق العددية (Méthodes Numériques) لإيجاده ، من بين الطرق المشهورة نجد:

1- طريقة تنصيف المجال (الفترة) the Bisection Method

2- طريقة النقطة الثابتة the Fixed- point Method

3- طريقة نيوتن – رافسون Newton –Raphson Method

نتطرق فقط للطريقة الأولى والثالثة (للتوسع في فهم هذه الطرق أنظر كتب التحليل العددي).

1- طريقة تنصيف المجال (الفترة) the Bisection Method

تعتمد هذه الطريقة على مبرهنة القيمة المتوسطة التي تنص على ما يلي:

إذا كانت الدالة f مستمرة في مجال $[a,b]$ و كان K عدد محصورا بين القيمتين $f(a)$ و $f(b)$ بأي: $f(a)<k<f(b)$ ، فأن هناك نقطة (c) في المجال المفتوح (a,b) أي: $f(c)=k$.

وكحالة خاصة لهذه المبرهنة في حالة كون إشارتي $f(a)$ و $f(b)$ مختلفتين أي ($f(a)\cdot f(b)<0$) فأن هناك جذر واحد على الأقل للمعادلة: $f(x)=0$ في المجال (a,b).

باستخدام هذه الطريقة فأن المجال الذي يوجد فيه جذر للمعادلة $f(x)=0$ يتم تقليصه بشكل مستمر إلى غاية الوصول إلى الدقة.

خوارزمية هذه الطريقة تكمن في اتباع الخطوات التالية:

- إيجاد حدود المجال $[a,b]$ الذي تتغير فيه اشارة الدالة f عند أطرافه.
- حساب النقطة c التي تنصف المجال $[a,b]$، أي: $c=\frac{a+b}{2}$.
- حساب $f(c)$ أي قيمة الدالة عند النقطة c، هناك حالتان وهما:

إذا كانت $f(c)=0$ أي أن c هو جذر للمعادلة.

إذا كانت $f(c)\neq 0$ وفي هذه النقطة هناك أيضا حالتين وهما:

أ- أن تكون $f(a)\cdot f(c)<0$ ، أي أن الدالة f قد غيرت اشارتها في المجال $[a,c]$، وهذا يدل أن جذر المعادلة يقع في هذا المجال.

ب-أن تكون $f(a)\cdot f(c)>0$ ، أي أن الدالة f لم تغير اشارتها في المجال $[a,c]$، وهذا يدل أن جذر المعادلة يقع في المجال $[c,b]$.

نستمر بتنصيف المجال إلى أن نصل إلى الدقة المطلوبة.

نرجع إلى مثالنا:

$$f(r)=30000(1+r)^{-1}+30000(1+r)^{-2}+30000(1+r)^{-3}$$
$$+30000(1+r)^{-4}+500000(1+r)^{-4}-483063.9437=0$$

نحدد أول الفترة (المجال): بما أن سعر الفائدة موجب وعادة ما يكون أقل من 10 % فاختيارنا يكون كما يلي: $a=0.01$ ، $b=0.1$.

n	a	b	c	$f(a)$	$f(b)$	$f(c)$
1	0,01	0,1	0,055	114485,19	−46461,25	25698,93
2	0,055	0,1	0,0775	25698,93	−46461,25	−12207,06
3	0,055	0,0775	0,06625	25698,93	−12207,06	6260,79
4	0,06625	0,0775	0,071875	6260,79	−12207,06	−3090,67
5	0,06625	0,071875	0,06906	6260,79	−3090,67	1555,21
6	0,06906	0,071875	0,70704	1555,21	−3090,67	−775,13
7	0,06906	0,70704	0,0697	1555,21	−775,13	388,12
8	0,0697	0,70704	0,70701	388,12	−775,13	−193,93
9	0,0697	0,70701	0,06994	388,12	−193,93	97
10	0,06994	0,7071	0,07	97	−193,93	−48

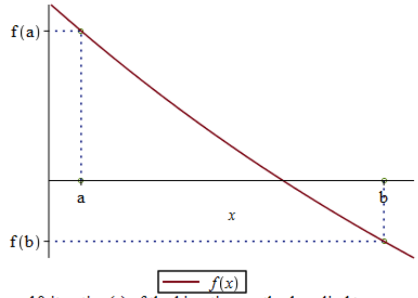
نتوقف عند التكرار العاشر $c = 0.07$ ، أي أن المعدل الاكتواري الخام يساوي $r = 0.07$.

باستخدام برنامج Maple تحصلنا على نفس النتيجة :

-2

```
> with(Student[NumericalAnalysis]) :
> f := 30000(1 + x)^-1 + 30000(1 + x)^-2 + 30000(1 + x)^-3 + 30000(1 + x)^-4 + 500000(1 + x)^-4
     - 483063.9437 :
> Bisection(f, x = [0.01, 0.10], tolerance = 10^-4)
                                0.07000183105
> Bisection(f, x = [0.01, 0.1], tolerance = 10^-4, output = sequence)
[0.01, 0.1], [0.05500000000, 0.1], [0.05500000000, 0.07750000000], [0.06625000000,
    0.07750000000], [0.06625000000, 0.07187500000], [0.06906250000, 0.07187500000],
    [0.06906250000, 0.07046875000], [0.06976562500, 0.07046875000], [0.06976562500,
    0.07011718750], [0.06994140625, 0.07011718750], [0.06994140625, 0.07002929687]
```

$Bisection\left(f, x=[0.01, 0.10], output=animation, tolerance=10^{-4}, stoppingcriterion=function\_value\right)$



10 iteration(s) of the bisection method applied to

$f(x)=\frac{30000}{1+x}+\frac{30000}{(1+x)^2}+\frac{30000}{(1+x)^3}+\frac{530000}{(1+x)^4}-4.830639437\ 10^5$

with initial points $a=0.01$ and $b=0.10$. The stopping criteria is not met.

2- طريقة نيوتن – رافسون Newton –Raphson Method :

تعتبر هذه الطريقة من أشهر الطرق ، وهي حالة خاصة من طريقة النقطة الثابتة، وتعتمد على سلسلة تايلور، للوصول إلى الجذر المطلوب نستخدم الصيغة التالية:

نضع $r=x$.

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

نرجع لمثالنا ، ولإيجاد المعدل الاكتواري بهذه الطريقة نختار قيمة تقريبية لهذا الجذر $x_0=0.01$.

$$f(x)=30000(1+x)^{-1}+30000(1+x)^{-2}+30000(1+x)^{-3}$$
$$+30000(1+x)^{-4}+500000(1+x)^{-4}-483063.9437$$
$$f'(x)=-30000(1+x)^{-2}-60000(1+x)^{-3}-90000(1+x)^{-4}$$
$$-2120000(1+x)^{-5}$$

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n-\frac{\begin{array}{l}30000(1+x_n)^{-1}+30000(1+x_n)^{-2}+30000(1+x_n)^{-3}\\+30000(1+x_n)^{-4}+500000(1+x_n)^{-4}-483063.9437\end{array}}{\begin{array}{l}-30000(1+x_n)^{-2}-60000(1+x_n)^{-3}-90000(1+x_n)^{-4}\\-2120000(1+x_n)^{-5}\end{array}}$$

$$x_1=x_0-\frac{\begin{array}{l}30000(1+x_0)^{-1}+30000(1+x_0)^{-2}+30000(1+x_0)^{-3}\\+30000(1+x_0)^{-4}+500000(1+x_0)^{-4}-483063.9437\end{array}}{\begin{array}{l}-30000(1+x_0)^{-2}-60000(1+x_0)^{-3}-90000(1+x_0)^{-4}\\-2120000(1+x_0)^{-5}\end{array}}$$

$$x_1=0.01-\frac{\begin{array}{l}30000(1+(0.01))^{-1}+30000(1+(0.01))^{-2}+30000(1+(0.01))^{-3}\\+30000(1+(0.01))^{-4}+500000(1+(0.01))^{-4}-483063.9437\end{array}}{\begin{array}{l}-30000(1+(0.01))^{-2}-60000(1+(0.01))^{-3}-90000(1+(0.01))^{-4}\\-2120000(1+(0.01))^{-5}\end{array}}$$

$$\therefore x_1=0.06224$$

بنفس الكيفية نجد :

$$x_2=0.069864$$
$$x_3=0.06999$$
$$x_4=0.07$$

باستخدام برنامج Maple تحصلنا على نفس النتيجة :

> $with(Student[Calculus1])$:

> $NewtonsMethod\left(30000(1+x)^{-1}+30000(1+x)^{-2}+30000(1+x)^{-3}+30000(1+x)^{-4}+500000(1+x)^{-4}-483063.9437, x=0.01\right)$

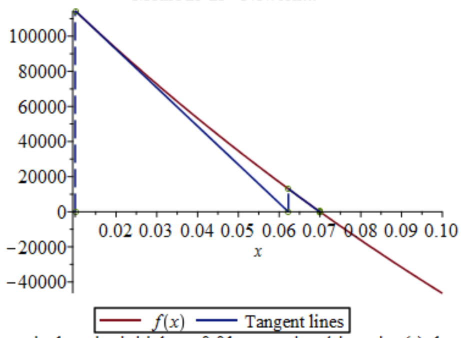
$$0.07000000042$$

> $NewtonsMethod\left(30000(1+x)^{-1}+30000(1+x)^{-2}+30000(1+x)^{-3}+30000(1+x)^{-4}+500000(1+x)^{-4}-483063.9437, x=0.01, output=sequence\right)$

$$0.01, 0.06224676742, 0.06986460992, 0.06999995838, 0.07000000042$$

$NewtonsMethod\left(30000(1+x)^{-1}+30000(1+x)^{-2}+30000(1+x)^{-3}+30000(1+x)^{-4}+500000(1+x)^{-4}-483063.9437, x=0.01, view=[0.01..0.1, DEFAULT], output=plot\right)$

Méthode de ~Newton...



À partir du point initial $x=0.01$, au moins 4 iteration(s) de la méthode de Newton pour

$$f(x)=\frac{30000}{1+x}+\frac{30000}{(1+x)^2}+\frac{30000}{(1+x)^3}+\frac{530000}{(1+x)^4}-4.830639437\ 10^5$$

جباية السندات Fiscalité des obligations :

بالنسبة للمكتتب من الضروري التمييز بين نوعين من المكاسب المتعلقة بالسندات:

يتعلق الدخل بالكُوبونات وربما علاوة الاستحقاق ، حيث يتم فرض ضريبة على هذا الدخل بنسبة 15 ٪ من اشتراكات الضمان الاجتماعي.

فائض القيمة المحقق من بيع السند قبل الاستحقاق تخضع للضريبة بنسبة 15٪ فقط إذا تجاوز إجمالي فائض القيمة على مدار السنة.

تمارين محلولة:

تمرين 1:

قرض بقيمة 300000 دج يسدد على أربعة أقساط سنوية، يدفع الأول بعد انتهاء سنة واحدة ، علما أن الاستهلاك يزداد بمقدار 15000 دج.

المطلوب:

شكل جدول استهلاك قرض، علما أن معدل الفائدة 9 %.

حل التمرين 1 :

نلاحظ أن هذا الجدول كيفي، لا هو بطريقة in fine ولا بطريقة الدفعات الثابتة ولا بطريقة الاستهلاكات الثابتة.

لدينا مجموع الاستهلاكات يساوي قيمة القرض، أي:

$$\sum_{p=1}^{4} A_p = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 300000$$

نفرض أن x قيمة الاستهلاك الأول، إذن:

$$x + (x + 15000) + (x + 30000) + (x + 45000) = 300000$$
$$\therefore 4x + 90000 = 300000 \Rightarrow x = \frac{300000 - 90000}{4} = 52500$$
$$\therefore x = 52500\ DA$$

بطرقة أخرى من مجموع متتالية حسابية ذات أساس $r = 15000$ ، نجد:

$$S=\frac{n}{2}\left(A_1+A_4\right)=\frac{4}{2}\left(A_1+A_1+3\cdot(15000)\right)=300000$$

$$\therefore \Rightarrow A_1=\frac{300000-90000}{4}=52500$$

$$A_4=A_1+3r$$

الفترة	رأس المال بداية الفترة	الفائدة (المدفوعة في نهاية الفترة)	الاستهلاكات	الدفعات
1	300000	27000	52500	79500
2	247500	22275	67500	89775
3	180000	16200	82500	98700
4	97500	8775	97500	106275

تمرين 2:

قرض بقيمة 1260000 دج يسدد على ستة أقساط سنوية، يدفع الأول بعد انتهاء سنة واحدة ، علما أن الاستهلاك يتضاعف بضعفين في كل سنة.

المطلوب:

شكل جدول استهلاك قرض، علما أن معدل الفائدة 10 %.

حل التمرين 2 :

نلاحظ أن هذا الجدول كيفي، لا هو بطريقة in fine ولا بطريقة الدفعات الثابتة ولا بطريقة الاستهلاكات الثابتة.

لدينا مجموع الاستهلاكات يساوي قيمة القرض، أي:

$$\sum_{p=1}^{6} A_p = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 = 1260000$$

نفرض أن x قيمة الاستهلاك الأول، إذن:

$$x + 2x + 4x + 8x + 16x + 32x = 1260000$$
$$\therefore 63x = 1260000 \Rightarrow x = \frac{1260000}{63} = 20000$$
$$\therefore x = 20000\ DA$$

بطرقة أخرى من مجموع متتالية هندسية ذات أساس $q = 2$ ، نجد:

$$S_n = v_\beta \left[\frac{1 - q^{n-\beta+1}}{1-q} \right]$$
$$\therefore S_6 = A_1 \cdot \left[\frac{1-(2)^n}{1-2} \right] = 1260000$$
$$\therefore \Rightarrow A_1 = \frac{1260000}{63} = 20000\ DA$$

الفترة	رأس المال بداية الفترة	الفائدة (المدفوعة في نهاية الفترة)	الاستهلاكات	الدفعات
1	1260000	126000	20000	146000
2	1240000	124000	40000	164000
3	1200000	120000	80000	200000
4	1120000	112000	160000	272000
5	960000	96000	320000	416000
6	640000	64000	640000	704000

تمرين 3:

نفس معطيات التمرين 1، **المطلوب:** اعداد جدول استهلاك القرض بطريقة in fine

حل التمرين 3:

الدفعات	الاستهلاكات	الفائدة (المدفوعة في نهاية الفترة)	رأس المال بداية الفترة	الفترة
27000	–	27000	300000	**1**
27000	–	27000	300000	**2**
27000	–	27000	300000	**3**
327000	300000	27000	300000	**4**

تمرين 4:

نفس معطيات التمرين 1، **المطلوب:** اعداد جدول استهلاك القرض بطريقة الاستهلاكات الثابتة.

حل التمرين 4:

الدفعات	الاستهلاكات	الفائدة (المدفوعة في نهاية الفترة)	رأس المال بداية الفترة	الفترة
102000	75000	27000	300000	**1**
95250	75000	20250	225000	**2**
88500	75000	13500	150000	**3**
81750	75000	6750	75000	**4**

تمرين 5:

نفس معطيات التمرين 1، **المطلوب:** اعداد جدول استهلاك القرض بطريقة الدفعات الثابتة.

حل التمرين 5:

$$V_0 = 300000\ DA \ , \ i = 9\% \ , \ n = 4$$

$$V_0 = a \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \Rightarrow a = \frac{V_0 \cdot i}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{300000 \times 0.09}{1-(1.09)^{-4}} = 92600.60\ DA$$

الفترة	رأس المال بداية الفترة	الفائدة (المدفوعة في نهاية الفترة)	الاستهلاكات	الدفعات
1	300000	27000	65600.6	92600.60
2	234399.4	21095.94	71504.66	92600.60
3	162894.74	14660.52	77940.08	92600.60
4	84954.66	7645.92	84954.68	92600.60

تمرين 6:

اقترضت مؤسسة مبلغ قدره 100000 دج تم الاتفاق على تسديده بـ 5 دفعات سنوية ثابتة بمعدل فائدة 10 % .

المطلوب:

- حساب قيمة الدفعة .
- حساب قسط الاستهلاك الأول والأخير.
- حساب المبلغ المسدد عند الدفعة الثالثة و المبلغ المتبقي من القرض عند تسديد الدفعة الثالثة.

حل التمرين 6:

حساب قيمة الدفعة:

$$V_0 = 100000\ DA\ ,\ \ i = 10\%\ ,\ \ n = 5$$

$$V_0 = a \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \Rightarrow a = \frac{V_0 \cdot i}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{100000 \times 0.10}{1-(1.10)^{-5}} = 26379.75\ DA$$

حساب قسط الاستهلاك الأول والأخير:

$$V_0 = A_1 \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \Rightarrow A_1 = \frac{V_0 \cdot i}{(1+i)^n - 1} = 16379.75\ DA$$

$$A_n = A_1 (1+i)^{n-1}$$
$$\therefore A_5 = 16379.75 (1.10)^4 = 23981.60\ DA$$

المبلغ المسدد عند الدفعة الثالثة:

عند تسديد الدفعة $p = 3$ ضمنا تسديد الاستهلاكات : $S_{p=3} = A_1 + A_2 + A_3$ من القرض، والمبلغ المسدد هو مجموع هذه الاستهلاكات، بنفس الكيفية نستخدم مجموع حدود متتالية هندسية لنجد:

$$S_p = A_1 \cdot \frac{(1+i)^p - 1}{i} = 16379.75 \cdot \frac{(1.10)^3 - 1}{0.10} = 54217\ DA$$

حساب المبلغ المتبقي من القرض عند الدفعة الثالثة:

المبلغ المتبقي من القرض عند تسديد الدفعة $p = 3$ هو القيمة المكتسبة من الدفعة الرابعة ($p+1 = 4$) إلى الدفعة الخامسة(n=5).

$$R_{p=3} = A_4 + A_5$$

$$\therefore R_{p=3} = A_{p+1} \cdot \frac{(1+i)^{n-p} - 1}{i} = A_4 \cdot \frac{(1+i)^2 - 1}{i}$$

$$\therefore A_4 = A_1 (1+i)^3 = 16379.75 \cdot (1.10)^3 = 21801.45\ DA$$

$$\therefore R_3 = 21801.45 \cdot \frac{(1.10)^2 - 1}{0.10} = 45783\ DA$$

تمرين 7:

نفرض أنه لدينا جدول استهلاك قرض بدفعات ثابتة كالتالي:

الفترة	رأس المال بداية الفترة	الفائدة (المدفوعة في نهاية الفترة)	الاستهلاكات	الدفعات
1		40000		91842.95
2				
3				
4			69003	
....	......	......	......	....

المطلوب:

- أوجد معدل الفائدة ؟
- حساب قيمة القرض V_0.
- حساب مدة القرض.

حل التمرين 7:

- ايجاد معدل الفائدة:

$$V_0 \cdot i = 40000\ DA\ ,\ a = 91842.95\ DA\ ,\ A_4 = 69003\ DA$$

$$A_1 = a - I_1 = 91842.95 - 40000 = 51842.95\ DA$$

$$A_4 = A_1(1+i)^3 \Rightarrow (1+i)^3 = \frac{A_4}{A_1} = \frac{69003}{51842.95} = 1.331$$

$$\therefore (1+i)^3 = 1.331$$

$$\therefore 1+i = (1.331)^{1/3} = 1.10 \Rightarrow i = 0.1$$

- حساب قيمة القرض V_0:

$$V_0 \cdot i = 40000 \Rightarrow V_0 = \frac{40000}{i} = \frac{40000}{0.1} = 400000\ DA$$

- حساب مدة القرض:

$$V_0 = A_1 \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \Rightarrow (1+i)^n = \frac{V_0 \cdot i}{A_1} + 1 = \frac{40000}{51842.95} + 1 = 1.771$$

$$\therefore (1.10)^n = 1.771$$

$$\therefore Ln(1.10)^n = Ln(1.771) \Rightarrow n = \frac{Ln(1.771)}{Ln(1.10)} = \frac{0.5718}{0.0953} \simeq 6$$

تمرين 8:

قرض سندي بدفعات ثابتة له الخصائص التالية:

$$V_0 = 600000\ DA\ ,\ C = 200\ ,\ N = 3000\ ,\ i = 0.08\ ,\ n = 4$$

المطلوب:

تشكيل جدول قرض.

حل التمرين 8:

عدد السندات المستهلكة (μ_1) تحدد بعدة طرق:

- عن طريق الحساب المسبق للدفعة الثابتة:

$$a=\frac{NC\cdot i}{1-(1+i)^{-n}}=\frac{3000\times 200\times 0.08}{1-(1.08)^{-4}}=181152.48\ DA$$

$$a_1=V_0\cdot i+\mu_1\cdot C\Rightarrow \mu_1=\frac{a_1-V_0\cdot i}{C}$$

بمأن الدفعة ثابتة أي: $a_1=a$ ، فأن:

$$a_1=V_0\cdot i+\mu_1\cdot C\Rightarrow \mu_1=\frac{a_1-V_0\cdot i}{C}=\frac{181152.48-(600000)(0.08)}{200}=665.76$$

$$m_1=NC\cdot\frac{i}{(1+i)^n-1}=\frac{(3000)(200)(0.08)}{(1.08)^4-1}=133152.48\ DA$$

$$m_1=\mu_1\cdot C\Rightarrow \mu_1=\frac{m_1}{C}=\frac{133152.48}{200}=665.76$$

$$\mu_1=\frac{Ni}{(1+i)^n-1}=\frac{3000\times 0.08}{(1.08)^4-1}=665.76$$

$$\mu_{p+1}=\mu_p(1+i)$$

μ : ذات تزايد هندسي بأساس $(1+i)$.

μ_i	العلاقة بـ μ_1	العلاقة مع μ السابقة	القيم
μ_1	−	−	665.76
μ_2	$\mu_1(1+i)$	$\mu_1(1+i)$	719.02
μ_3	$\mu_1(1+i)^2$	$\mu_2(1+i)$	776.54
μ_4	$\mu_1(1+i)^3$	$\mu_3(1+i)$	838.66

تحديد القيم الحالية للقيم الحقيقية المتتابعة لـ μ.

μ المدورة	μ النظرية	μ_i
666	665.76	μ_1
719	719.02	μ_2
776	776.54	μ_3
839	838.66	μ_4
3000		

جدول استهلاك قرض:

عدد السندات المتبقية في نهاية المدة	الدفعات (6)=(3)+(5)	الاستهلاكات (5)=(4).C	عدد السندات المستهلكة (4)	الفائدة dCi : (3)=(2).i	الدين في بداية الفترة (1) Dc (2)=(1).C	عدد السندات المتبقية d1	الفترات
2334	181200	133200	666	48000	600000	3000	1
1615	181144	143800	719	37344	466800	2334	2
839	181040	155200	776	25840	323000	1615	3
0	181224	167800	839	13424	167800	839	4
		600000					

تمرين 9:

نفس معطيات التمرين السابق (8) باستخدام طريقة الاستهلاكات الثابتة:

حل التمرين9:

$$V_0 = 600000\ DA\ ,\ C = 200\ ,\ N = 3000\ ,\ i = 0.08\ ,\ n = 4$$

$$m = \frac{NC}{n} = \frac{3000 \times 200}{4} = 150000\ DA$$

عدد السندات المستهلكة في كل سنة:

$$\mu=\frac{N}{n}=\frac{3000}{4}=750 \quad \vee \quad \mu=\frac{m}{C}=\frac{150000}{200}=750$$

الفترات	عدد السندات المتبقية d1	الدين في بداية الفترة (1) Dc (2)=(1).C	الفائدة dCi : (3)=(2).i	عدد السندات المستهلكة (4)	الاستهلاكات (5)=(4).C	الدفعات (6)=(3)+(5)	عدد السندات المتبقية في نهاية المدة
1	3000	600000	48000	750	150000	198000	2250
2	2250	450000	36000	750	150000	186000	1500
3	1500	300000	24000	750	150000	174000	750
4	750	150000	12000	750	150000	162000	0
					600000		

تمرين10:

ليكن لدينا قرض سندي بدفعات ثابتة له الخصائص التالية:

$V_0=600000\ DA\ ,\ C=200\ ,\ N=3000\ ,$
$i=0.08\ ,\ n=4\ \ ,\ \ E=194\ ,\ n=4\ ,\ R=205$

المطلوب:

تشكيل جدول استهلاك قرض ؟

حل التمرين10:

نلاحظ أن $R>C$ نستلزم: $i'=\frac{iC}{R}=\frac{(0.08)(200)}{205}=0.078$ ، المعدل الظاهري i' أقل من المعدل i، استهلاك السندات يتم وفق تزايد هندسي بأساس $(1+i')$.

$$a = NR \cdot \frac{i'}{1-(1+i')^{-n}} = (3000)(205) \cdot \frac{0.078}{1-(1.078)^{-4}} = 184855.36\ DA$$

$$\mu_1 = N \cdot \frac{i'}{(1+i')^n - 1} = (3000) \cdot \frac{0.078}{(1.078)^4 - 1} = 667.73$$

نلاحظ أن قيمة الدفعة 184855.36 دج زادت عن سابقتها (حالة التعادل): 181200 دج.

نفس الشيء بالنسبة لعدد السندات المستهلكة للدفعة الأولى: 666، أما في حالة المعدل الجديد فكانت : 667.73.

$$\mu_{p+1} = \mu_p (1+i')$$
$$\therefore \mu_2 = 667.73(1.078) = 719.81\ DA$$
$$\therefore \mu_3 = 667.73(1.078)^2 = 775.96\ DA$$
$$\therefore \mu_4 = 667.73(1.078)^3 = 836.48\ DA$$

تحديد القيم الحالية للقيم الحقيقية المتتابعة لـ μ .

μ_i	μ **النظرية**	μ **المدورة**
μ_1	667.73	668
μ_2	719.81	720
μ_3	775.96	776
μ_4	836.48	836
		3000

جدول استهلاك قرض:

		الدين المتبقي في بداية الفترة						
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	3000	600000	615000	48000	668	136940	184940	2332
2	2332	466400	478060	37312	720	147600	184912	1612
3	1612	322400	330460	25792	776	159080	184872	836
4	836	167200	171380	13376	836	171380	184756	0
						615000		

(1): الفترات.

(2): عدد السندات المتبقية في بداية الفترة d.

(3): بالقيمة الاسمية: $dC = (2)\cdot C$.

(4): بقيمة التسديد: $dR = (2)\cdot R$.

(5): الفائدة: $diC = (3)\cdot i$.

(6): عدد السندات المستهلكة μ .

(7): الاستهلاكات $\mu R = (6)\cdot R$.

(8): الدفعات (6) $a = diC + \mu R = (8) = (5) + (7) \therefore$.

(9): عدد السندات المتبقية في نهاية الفترة $(6)-(2)=(9)$.

تمرين 11:

نفس بيانات التمرين السابق (10):

$$V_0 = 600000\ DA\ ,\ C = 200\ ,\ N = 3000\ ,$$
$$i = 0.08\ ,\ n = 4\quad ,\quad E = 194\ ,\ n = 4\ ,\ R = 205$$

المطلوب:

تحديد قيمة الاستهلاك الثابت ؟

حل المثال:

$$m = \mu R \Rightarrow m = \frac{N}{n}R$$
$$\therefore m = \frac{3000}{4}(205) = 153750\ DA$$

$$a_{p+1} - a_p = -\mu R i'$$
$$\therefore a_{p+1} - a_p = -(750)(205\times 0.078) = -11992.5$$

تمرين 12:

قرض بقيمة 250000 دج مقسم على 250 سند ، يتم تسديده في كل سنة بقيمة 1100 دج لمدة أربع سنوات، حيث بلغ معدل الفائدة الاسمي 10 % .

ملاحظة: عملية التسديد تتم وفق دفعات ثابتة.

المطلوب:

- حساب القيمة الاسمية للسند ؟
- تشكيل جدول استهلاك قرض ؟

حل التمرين 12:

- حساب القيمة الاسمية للسند:

$$V_0 = NC \Rightarrow C = \frac{V_0}{N} = \frac{250000}{250} = 1000\ DA$$

- تشكيل جدول استهلاك قرض:

نلاحظ أن $R > C$ نستلزم: $i' = \frac{iC}{R} = \frac{(0.10)(1000)}{1100} = 0.09$ ، المعدل الظاهري i' أقل من المعدل i، استهلاك السندات يتم وفق تزايد هندسي بأساس $(1+i')$.

$$a = NR \cdot \frac{i'}{1-(1+i')^{-n}} = (250)(1100) \cdot \frac{0.09}{1-(1.09)^{-4}} = 84883.88\ DA$$

$$\mu_1 = N \cdot \frac{i'}{(1+i')^n - 1} = (250) \cdot \frac{0.09}{(1.09)^4 - 1} = 54.66$$

$$\mu_{p+1} = \mu_p (1+i')$$

$$\therefore \mu_2 = 54.67(1.09) = 59.59\ DA$$

$$\therefore \mu_3 = 54.67(1.09)^2 = 64.95\ DA$$

$$\therefore \mu_4 = 54.67(1.09)^3 = 70.79\ DA$$

تحديد القيم الحالية للقيم الحقيقية المتتابعة لـ μ .

μ_i	μ **النظرية**	μ **المدورة**
μ_1	54.66	55
μ_2	59.59	59
μ_3	64.95	65

μ_4	70.79	71
		250

جدول استهلاك قرض:

		الدين المتبقي في بداية الفترة						
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	250	250000	275000	25000	55	60500	85500	195
2	195	195000	214500	19500	59	64900	84400	136
3	136	136000	149600	13600	65	71500	85100	71
4	71	71000	78100	7100	71	78100	85200	0
						275000		

(1): الفترات.

(2): عدد السندات المتبقية في بداية الفترة d.

(3): بالقيمة الاسمية: $dC=(2)\cdot C$.

(4): بقيمة التسديد: $dR=(2)\cdot R$.

(5): الفائدة: $diC=(3)\cdot i$.

(6): عدد السندات المستهلكة μ .

(7): الاستهلاكات $\mu R = (6)\cdot R$.

(8): الدفعات (6) $(8) = (5) + (7) \therefore a = diC + \mu R = (6)$.

(9): عدد السندات المتبقية في نهاية الفترة(6) $(9) = (2) - (6)$.

تمرين13 :

أحسب المعدل الاكتواري الخام r عند إصدار السند $(E = 207292.3464\ DA)$ بطريقة in fine بقيمة اسمية قدرها 200000 دج ، ومعدل اسمي قدره 8٪ ، واستحقاق لمدة 3 سنوات يتم تسديده بالقيمة الاسمية au pair .

حل التمرين13:

$$V_0 = 200000\ DA\ ,\ i = 0.08\ ,\ r = ?\ ,\ c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c\ ,\ E = 207292.3464\ DA$$
$$R = C\ ,\ \ c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c = V_0 \cdot i = 200000(0.08) = 16000\ DA$$
$$E = \frac{16000}{(1+r)} + \frac{16000}{(1+r)^2} + \frac{16000}{(1+r)^3} + \frac{216000}{(1+r)^3} = 207292.3464$$

المعدل الاكتواري الخام لهذا السند هو المعدل r ، نحول المساواة الأخيرة إلى معادلة جبرية كالتالي:

$$f(r) = 16000(1+r)^{-1} + 16000(1+r)^{-2} + 16000(1+r)^{-3}$$
$$+216000(1+r)^{-3} - 207292.3464 = 0$$

r هو جذر للمعادلة الأخيرة ، لإيجاده بالطرق التحليلية صعب إن لم نقل مستحيل ، لذا سنستخدم الطرق العددية (Méthodes Numériques) لإيجاده ، نستخدم طريقة نيوتن – رافسون:

نضع $r = x$.

ولإيجاد المعدل الاكتواري بهذه الطريقة نختار قيمة تقريبية لهذا الجذر $x_0 = 0.01$.

$$f(x) = 16000(1+x)^{-1} + 16000(1+x)^{-2} + 16000(1+x)^{-3}$$
$$+216000(1+x)^{-3} - 207292.3464$$
$$f'(x) = -16000(1+x)^{-2} - 32000(1+x)^{-3} - 696000(1+x)^{-4}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{16000(1+x)^{-1} + 16000(1+x)^{-2} + 16000(1+x)^{-3} + 216000(1+x)^{-3} - 207292.3464}{-16000(1+x)^{-2} - 32000(1+x)^{-3} - 696000(1+x)^{-4}}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{16000(1+x_0)^{-1} + 16000(1+x_0)^{-2} + 16000(1+x_0)^{-3} + 216000(1+x_0)^{-3} - 207292.3464}{-16000(1+x_0)^{-2} - 32000(1+x_0)^{-3} - 696000(1+x_0)^{-4}}$$

$$x_1 = 0.01 - \frac{16000(1+(0.01))^{-1} + 16000(1+(0.01))^{-2} + 16000(1+(0.01))^{-3} + 216000(1+(0.01))^{-3} - 207292.3464}{-16000(1+(0.01))^{-2} - 32000(1+(0.01))^{-3} - 696000(1+(0.01))^{-4}}$$
$$\therefore x_1 = 0.079$$

بنفس الكيفية نجد :

$$x_2 = 0.0897$$
$$x_3 = 0.08999$$
$$x_4 = 0.089999$$

المعدل الاكتواري الخام لهذا السند هو r = 9%

باستخدام برنامج Maple تحصلنا على نفس النتيجة:

> $with(Student[Calculus1])$:

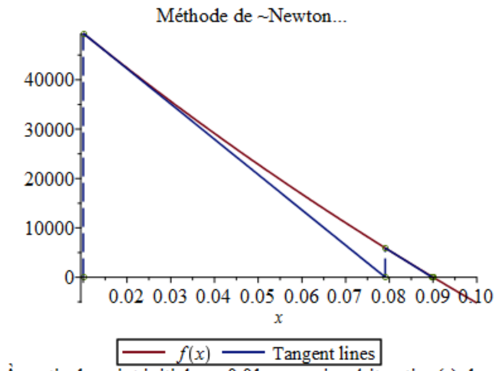
> $NewtonsMethod\left(\frac{16000}{1+x}+\frac{16000}{(1+x)^2}+\frac{232000}{(1+x)^3}-207292.3464, x=0.01\right)$

$$0.08999999985$$

> $NewtonsMethod\left(\frac{16000}{1+x}+\frac{16000}{(1+x)^2}+\frac{232000}{(1+x)^3}-207292.3464, x=0.01, output=sequence\right)$

$$0.01, 0.07904955219, 0.08978663950, 0.08999991797, 0.08999999985$$

> $NewtonsMethod\left(\frac{16000}{1+x}+\frac{16000}{(1+x)^2}+\frac{232000}{(1+x)^3}-207292.3464, x=0.01, view=[0.01..0.1, DEFAULT], output=plot\right)$



À partir du point initial $x=0.01$, au moins 4 iteration(s) de la méthode de Newton pour

$$f(x)=\frac{16000}{1+x}+\frac{16000}{(1+x)^2}+\frac{232000}{(1+x)^3}-2.072923464\ 10^5$$

الفصل السادس : مردودية الاستثمارات

Rentabilité des investissements

6-1- تمهيد :

أغلب الشركات إن لم نقل جُلها[1] هدفها تحقيق الربح ، فعندما تقوم شركة ما باستثمار مبلغ معين تطمح بتحقيق عائد في السنوات التالية للاستثمار، تكمن المشكلة في تقييم ما إذا كان الاستثمار مربحا أم لا ، لذا وجب إجراء دراسة الربحية مع الأخذ في الاعتبار معدل الفائدة الحالي في تاريخ الاستثمار ، نظرا لأن الشركة تلجأ إلى الاقتراض لدفع المصاريف المخططة حيث تتحمل بعد ذلك دفع فوائد.

لتقييم الاستثمار، من الضروري تحديد التكاليف والفوائد التي سيحققها المشروع بمرور الزمن، للقيام بذلك سيتعين علينا تحديد التدفقات النقدية التي يمكن أن تباشر بها في المستقبل البعيد إلى حد ما ، وتقييم معايير الربحية والمخاطر المرتبطة بهذا الاستثمار على أساس المعرفة الحالية، لذلك سيكون من الضروري أن تبني خياراتها الاستثمارية على أساس اكتواري.

بقدر ما يوجد تفضيل واضح لامتلاك احتياطيات نقدية اليوم بدلا من غدا لا يمكننا مقارنة التدفقات المالية الموزعة بمرور الزمن دون وضعها في وحدة زمنية مشتركة ، لذا يتيح التحيين إمكانية "تحويل" التدفقات المالية المستقبلية بحيث تصبح مكافئة للتدفقات الحالية.

[1]- باستثناء المؤسسات ذات الطابع الانساني التي لا تهدف بتحقيق الربح ، فالمنظمة غير الربحية ويطلق عليها أيضا منظمة لا تسعى للربح، هي أي منظمة تهدف في الأساس إلى دعم نشاط أو عدد من الأنشطة العامة أو الخاصة بدون أي مصلحة تجارية أو هدف ربحي أو الدعوة إليه أو الانخراط فيه وهو ما تقوم به المنظمات الربحية، ينشط هذا الشكل من المنظمات في مجالات واسعة كالمساعدات الإنسانية والبيئة وحماية الحيوان والتعليم والفنون والرعاية الصحية والقضايا الاجتماعية والمؤسسات الخيرية والسياسة والدين والبحوث والرياضة وغيرها من المساعي.

في ظل هذه الظروف، يتم استخدام ثلاثة معايير بشكل عام لتقييم مدى ملائمة الاستثمار:

- صافي القيمة الحالية (VAN) ؛
- معدل العائد الداخلي (TRI)؛
- مؤشر الربحية (PI) .

6-2- معيار صافي القيمة الحالية (VAN) للاستثمار:

Critère de la valeur actuelle nette (VAN)

تعريف:

صافي القيمة الحالية للاستثمار هو المجموع الجبري للقيم الحالية بسعر السوق للمقبوضات والمدفوعات النقدية المستحقة لهذا الاستثمار مقدر في التاريخ 0 من الاستثمار الأولي.

أولا: اختيار الاستثمارات Le choix d'investissement :

يكون الاستثمار مربحا إذا كانت VAN موجبة، وغير مربح إذا كانت VAN سالبة.

إذا كان علينا الاختيار من بين عدة استثمارات، فإننا نختار الاستثمار ذو أكبر صافي قيمة حالية له .

ملاحظة:

إذا كنا نريد مقارنة كل من الاستثمارات والتمويل، فعلينا العمل خلال نفس الفترة.

ثانيا: تحديد صافي القيمة الحالية، التدفق النقدي:

La determination de la VAN, Cash-flow

في مالية المؤسسات التدفقات النقدية هي جميع الحركات النقدية الواردة أو الصادرة التي تمر على خزينة المؤسسة ، ويحسب كما يلي:

CF = النتيجة بعد الضريبة + مخصصات الاهتلاك.

حيث أن النتيجة تحسب كما يلي:

النتيجة = إيرادات الاستغلال – أعباء الاستغلال – مخصصات الاهتلاك + الايرادات المالية – النفقات المالية.

فصافي القيمة الحالية VAN هو مجموع التدفقات النقدية المحينة بتاريخ 0 – مجموع الاستثمارات المحينة بتاريخ 0 .

معدل التحيين المستخدم هو سعر السوق لنفس القروض.

هناك حالتين لحساب صافي القيمة الحالية **VAN** وهما:

ثالثا: حالة التدفقات النقدية الثابتة: Formules VAN pour les flux de trésorerie constants

لحسابه تعطى الصيغة التالية:

$$VAN = \sum_{t=1}^{T} \frac{CF_t}{(1+i)^t} - I$$

I : رأس المال المستثمر.

CF_t : صافي ايرادات الاستغلال المتوقعة للفترة t أو صافي التدفق النقدي.

i : معدل التحيين للتدفق النقدي.

فـ **VAN** هي دالة متناقصة لمعدل التحيين، أي كلما ارتفع المعدل انخفض صافي القيمة الحالية.

مثال1:

تخطط شركة " س " في انجاز استثمار تقدر تكلفته 600000 دج ، صافي التدفق السنوي المتوقع 150000 دج لمدة 5 سنوات .

المطلوب:

- أحسب ربحية المشروع في حالة عدم وجود تحيين.
- أحسب ربحية المشروع في حالة وجود تحيين بمعدل 7 %.

حل المثال1:

- حساب ربحية المشروع في حالة عدم وجود تحيين:

$$-600000+\left(5\times150000\right)=150000\ DA$$

- حساب ربحية المشروع في حالة وجود تحيين بمعدل 7 %.

$$VAN=-600000+150000\times\frac{1-\left(1.07\right)^{-5}}{0.07}=15029.61\ DA$$

مادامت VAN موجبة فالاستثمار ذو مردودية.

رابعا: حالة التدفقات النقدية مختلفة :

Formules VAN pour les flux de trésorerie différents

$$VAN = -C + R_1(1+i)^{-1} + R_2(1+i)^{-2} + ... + R_n(1+i)^{-n} + V(1+i)^{-n}$$

C : رأس المال المستثمر.

R : صافي ايرادات الاستغلال المتوقعة.

i : معدل التحيين للتدفق النقدي.

V: القيمة المتبقية للاستثمار.

يتضمن رأس المال المستثمر مبلغ سعر اقتناء الاستثمار والتكاليف الأولية المرتبطة بالاستثمار (تكاليف البحث والتطوير، وتكاليف الإعلان وما إلى ذلك)، والزيادة في احتياجات رأس المال العامل المصاحبة لتحقيق الاستثمار.

معدل التحيين يتوافق مع معدل العائد المطلوب من قبل الشركة، يتوافق مع تكلفة تمويل رأس المال للمشروع ويتم التعبير عنه كنسبة مئوية.

تتوافق القيمة المتبقية للاستثمار مع الدخل الإضافي الذي يضاف إلى دخل الاستغلال للسنة الأخيرة من المشروع، إنه يساوي القيمة السوقية للاستثمار في نهاية المشروع و احتياجات رأس المال العامل الاستغلال المسترد في نهاية المشروع.

مثال2:

نريد مقارنة استثمارين مدة حياتهما 4 سنوات، حيث توفرت لدينا المعلومات التالية:

استثمار A :

تكلفة الحيازة : 240000 دج، إيرادات الاستغلال المتوقعة كانت كما يلي:

120000 ، 140000 ، 160000 ، 100000 دج خلال السنوات الأربعة.

استثمار B :

تكلفة الحيازة : 300000 دج، إيرادات الاستغلال المتوقعة كانت كما يلي:

140000 ، 135000 ، 120000 ، 110000 دج خلال السنوات الأربعة.

معدل الضريبة كان 20 % ، تستخدم طريقة الاهتلاك الخطي.

المطلوب:

إذا كان المعيار المستخدم هو *VAN* فأي استثمار سنختار بمعدل تحيين 6 % .

حل المثال2:

نحسب التدفقات النقدية في التواريخ التالية : 1 ، 2 ، 3 ،4 لكل استثمار لنستنتج في الأخير صافي القيمة الحالية *VAN*.

استثمار A :

	1	2	3	4	
الايرادات المقدرة	120000	140000	160000	100000	(1)
مخصصات الاهتلاك	60000	60000	60000	60000	(2) $\frac{240000}{4} = 60000$

النتيجة قبل الضريبة	60000	80000	100000	40000	(3)=(1)−(2)
الضريبة	12000	16000	20000	8000	(4)=(3)*0.2
النتيجة بعد الضريبة	48000	64000	80000	32000	(5)=(3)−(4)
التدفق النقدي	108000	124000	140000	90000	(6)=(5)+(2)

VAN = المجموع المحين بتاريخ 0 لجميع التدفقات النقدية.

$$VAN = -240000 + 108000(1+i)^{-1} + 124000(1+i)^{-2} + 140000(1+i)^{-3}$$
$$+92000(1+i)^{-4}$$

إذا كان معدل التحيين6 % .

$$VAN_A = 162665.67\ DA > 0$$

المشروع A ذو مردودية.

استثمار B :

	1	2	3	4	
الايرادات المقدرة	140000	135000	120000	110000	(1)
مخصصات الاهتلاك	75000	75000	75000	75000	(2) $\frac{600000}{4} = 150000$
النتيجة قبل الضريبة	65000	60000	45000	35000	(3)=(1)−(2)

الضريبة	13000	12000	9000	7000	(4)=(3)*0.2
النتيجة بعد الضريبة	52000	48000	36000	28000	(5)=(3)−(4)
التدفق النقدي	127000	123000	111000	103000	(6)=(5)+(2)

VAN = المجموع المحين بتاريخ 0 لجميع التدفقات النقدية.

$$VAN = -300000 + 127000(1+i)^{-1} + 123000(1+i)^{-2} + 111000(1+i)^{-3} + 103000(1+i)^{-4}$$

إذا كان معدل التحيين6 % .

$$VAN_B = 104064.27\ DA > 0$$

المشروع B ذو مردودية.

بمأن $VAN_A > VAN_B$ فعلينا باختيار المشروع A .

5-3- معيار معدل العائد الداخلي Critère du taux interne de rentabilité TIR ou TRI

معدل العائد الداخلي **(TRI)** للاستثمار هو معدل التحيين الذي تمثل قيمته عندما تكون $VAN = 0$.

يكون المشروع الاستثماري مربحا إذا كان معدل العائد الداخلي أعلى من معدل التحيين المستخدم ، إذا كان علينا الاختيار بين استثمارين ، فإننا نختار الاستثمار الذي يكون معدله الداخلي هو الأعلى.

ايجابياته:

الميزة الرئيسية هو أن يكون التحديد بسيطا نسبيا لأنه يركز على البيانات الداخلية (عكس VAN) لا يتطلب معدل تحيين.

سلبياته:

تعتمد طريقة (**TRI**) على افتراض إعادة استثمار التدفقات المالية من فترة الاستغلال بنفس المعدل ، والتي يمكن أن تكون قابلة للنقاش في الواقع.

لا يجعل من الممكن إدارة حالات معينة: عندما تزداد VAN أو عندما لا يكون رتيبا ويحتمل أن يكون له تدفقات إيجابية وسلبية .

يمكن أن يؤدي إلى استنتاجات معاكسة لصافي القيمة الحالية والتي تظل أفضل مؤشر اقتصادي لاختيار الاستثمار.

أولا: حساب معدل العائد الداخلي:

يتم ذلك بحل المعادلة $VAN = 0$ ، حيث نستخدم الطرق العددية السالفة الذكر في الفصل السابق: طريقة تصنيف الفترة ، طريقة النقطة الثابتة ، طريقة نيوتن – رافسون.

مثال3:

تخطط شركة " ص " في انجاز استثمار تقدر تكلفته 227816.52 دج ، صافي التدفق السنوي المتوقع 90000 دج لمدة 3 سنوات .

المطلوب:

حساب معدل العائد الداخلي لهذا الاستثمار ؟

حل المثال3:

$$I = 227816.52\ DA\ ,\ \ r = ?\ \ ,\ n = 3\ ,\ CF\ = \ 90000\ DA$$

$$VAN = \frac{90000}{(1+r)} + \frac{90000}{(1+r)^2} + \frac{90000}{(1+r)^3} - 227816.52 = 0$$

r هو جذر للمعادلة الأخيرة ، لإيجاده بالطرق التحليلية صعب إن لم نقل مستحيل ، لذا سنستخدم الطرق العددية (Méthodes Numériques) لإيجاده ، نستخدم طريقة نيوتن – رافسون:

نضع $r = x$.

ولإيجاد معدل العائد الداخلي بهذه الطريقة نختار قيمة تقريبية لهذا الجذر $x_0 = 0.01$.

$$f(x) = \frac{90000}{(1+x)} + \frac{90000}{(1+x)^2} + \frac{90000}{(1+x)^3} - 227816.52$$

$$f'(x) = -\frac{90000}{(1+x)^2} - \frac{180000}{(1+x)^3} - \frac{270000}{(1+x)^3}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\dfrac{90000}{(1+x)} + \dfrac{90000}{(1+x)^2} + \dfrac{90000}{(1+x)^3} - 227816.52}{-\dfrac{90000}{(1+x)^2} - \dfrac{180000}{(1+x)^3} - \dfrac{270000}{(1+x)^3}}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{\dfrac{90000}{(1+x_0)} + \dfrac{90000}{(1+x_0)^2} + \dfrac{90000}{(1+x_0)^3} - 227816.52}{-\dfrac{90000}{(1+x_0)^2} - \dfrac{180000}{(1+x_0)^3} - \dfrac{270000}{(1+x_0)^3}}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{\frac{90000}{(1+(0.01))} + \frac{90000}{(1+(0.01))^2} + \frac{90000}{(1+(0.01))^3} - 227816.52}{-\frac{90000}{(1+(0.01))^2} - \frac{180000}{(1+(0.01))^3} - \frac{270000}{(1+(0.01))^3}}$$

$$\therefore x_1 = 0.080582$$

بنفس الكيفية نجد :

$$x_2 = 0.08986$$
$$x_3 = 0.08999$$
$$x_4 = 0.089999$$

معدل العائد الداخلي لهذا الاستثمار هو r = 9%

باستخدام برنامج Maple تحصلنا على نفس النتيجة:

$with(Student[Calculus1]):$

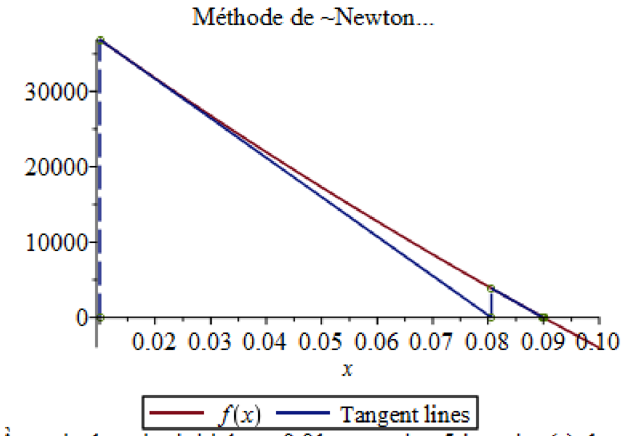
$$NewtonsMethod\left(-227816.52 + \frac{90000}{1+x} + \frac{90000}{(1+x)^2} + \frac{90000}{(1+x)^3}, x = 0.01\right)$$

0.08999999932

$$NewtonsMethod\left(-227816.52 + \frac{90000}{1+x} + \frac{90000}{(1+x)^2} + \frac{90000}{(1+x)^3}, x = 0.01, output = sequence\right)$$

0.01, 0.08058254326, 0.08986673657, 0.08999997264, 0.08999999954, 0.08999999932

$$NewtonsMethod\left(-227816.52 + \frac{90000}{1+x} + \frac{90000}{(1+x)^2} + \frac{90000}{(1+x)^3}, x = 0.01, view = [0.01 ..0.1, DEFAULT], output = plot\right)$$



À partir du point initial $x = 0.01$, au moins 5 iteration(s) de la méthode de Newton pour

$$f(x) = -2.2781652\ 10^5 + \frac{90000}{1+x} + \frac{90000}{(1+x)^2} + \frac{90000}{(1+x)^3}$$

5-4- مؤشر الربحية L'indice de profitabilité :

في هذا المؤشر تتم مقارنة التدفقات النقدية الصافية مع الاستثمار الأولي، يتم حسابه كما يلي:

$$IP = \frac{C + VAN}{C}$$

كلما إرتفع المؤشر كان المشروع أكثر إثارة للاهتمام.

مثال4:

بالرجوع إلى المثال الأول أحسب مؤشر الربحية لكل مشروع؟

حل المثال4:

$$C_A = 240000\ DA \quad , \quad VAN_A = 162665.67\ DA$$
$$C_B = 300000\ DA \quad , \quad VAN_B = 104064.27\ DA$$
$$IP_A = \frac{C_A + VAN_A}{C_A} = \frac{240000 + 162665.67}{240000} = 1.678$$
$$IP_B = \frac{C_B + VAN_B}{C_B} = \frac{300000 + 104064.27}{300000} = 1.347$$
$$IP_A > IP_B$$

المشروع A أكثر ربحية من المشروع B .

تمارين محلولة:

تمرين 1:

تخطط شركة " س " في انجاز استثمار تقدر تكلفته 1000000 دج ، صافي التدفق السنوي المتوقع 250000 دج لمدة 6 سنوات .

المطلوب:

- أحسب ربحية المشروع في حالة عدم وجود تحيين.
- أحسب ربحية المشروع في حالة وجود تحيين بمعدل 8 %.

حل التمرين 1:

- حساب ربحية المشروع في حالة عدم وجود تحيين:

$$-1000000 + (6 \times 250000) = 500000\ DA$$

- حساب ربحية المشروع في حالة وجود تحيين بمعدل 8 %.

$$VAN = -1000000 + 250000 \times \frac{1-(1.08)^{-6}}{0.08} = 155719.92\ DA$$

مادامت VAN موجبة فالاستثمار ذو مردودية.

تمرين 2:

نريد مقارنة استثمارين مدة حياتهما 5 سنوات، حيث توفرت لدينا المعلومات التالية:

استثمار A :

تكلفة الحيازة : 1200000 دج، إيرادات الاستغلال المتوقعة كانت كما يلي:

500000 ، 300000 ، 450000 ، 400000 ، 350000 دج خلال السنوات الخمسة.

استثمار B :

تكلفة الحيازة : 1500000 دج، إيرادات الاستغلال المتوقعة كانت كما يلي:

500000 دج لكل سنة خلال السنوات الخمسة.

معدل الضريبة كان 20 % ، تستخدم طريقة الاهتلاك الخطي.

المطلوب:

إذا كان المعيار المستخدم هو VAN فأي استثمار سنختار بمعدل تحيين 7 % ؟

حل التمرين 2:

نحسب التدفقات النقدية في التواريخ التالية : 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 لكل استثمار لنستنتج في الأخير صافي القيمة الحالية VAN

استثمار A :

	1	2	3	4	5	
الايرادات المقدرة	500000	300000	450000	400000	350000	(1)
مخصصات الاهتلاك	240000	240000	240000	240000	240000	(2) $\frac{1200000}{5}=240000$
النتيجة قبل الضريبة	260000	60000	210000	160000	110000	(3)=(1)−(2)
الضريبة	52000	12000	42000	32000	22000	(4)=(3)*0.2
النتيجة بعد الضريبة	208000	48000	168000	128000	88000	(5)=(3)−(4)
التدفق النقدي	448000	288000	408000	368000	328000	(6)=(5)+(2)

VAN = المجموع المحين بتاريخ 0 لجميع التدفقات النقدية.

$$VAN=-1200000+448000(1+i)^{-1}+288000(1+i)^{-2}$$
$$+408000(1+i)^{-3}+368000(1+i)^{-4}+328000(1+i)^{-5}$$

إذا كان معدل التحيين7 % .

$$VAN_A = 317896.81\, DA > 0$$

المشروع A ذو مردودية.

استثمار B :

	1	2	3	4	5	
الايرادات المقدرة	500000	500000	500000	500000	500000	(1)
مخصصات الاهتلاك	300000	300000	300000	300000	300000	(2) $\frac{1500000}{5} = 300000$
النتيجة قبل الضريبة	200000	200000	200000	200000	200000	(3)=(1)−(2)
الضريبة	40000	40000	40000	40000	40000	(4)=(3)*0.2
النتيجة بعد الضريبة	160000	160000	160000	160000	160000	(5)=(3)−(4)
التدفق النقدي	360000	360000	360000	360000	360000	(6)=(5)+(2)

VAN = المجموع المحين بتاريخ 0 لجميع التدفقات النقدية.

$$VAN = -1500000 + 360000(1+i)^{-1} + 360000(1+i)^{-2} + 360000(1+i)^{-3}$$
$$+360000(1+i)^{-4} + 360000(1+i)^{-5}$$

أو : $VAN = -1500000 + 360000 \cdot \frac{1-(1+i)^{-5}}{i}$

إذا كان معدل التحيين7 % .

$$VAN_B = -23928.92\ DA < 0$$

المشروع B ليس ذو مردودية.

بمأن $VAN_A > VAN_B$ فعلينا باختيار المشروع A .

تمرين 3:

تخطط شركة " ص " في انجاز استثمار تقدر تكلفته 530196.7375 دج ، صافي التدفق السنوي المتوقع للسنوات الخمس كان كما يلي : 120000 ، 100000 ، 90000 ، 130000 ، 120000 دج ، القيمة الباقية في السنة الخامسة كانت 80000 دج .

المطلوب:

حساب معدل العائد الداخلي لهذا الاستثمار ؟

حل التمرين 3:

$$VAN = \frac{120000}{(1+r)} + \frac{100000}{(1+r)^2} + \frac{90000}{(1+r)^3} + \frac{130000}{(1+r)^4} + \frac{200000}{(1+r)^5} - 530196.7375 = 0$$

r هو جذر للمعادلة الأخيرة ، لإيجاده بالطرق التحليلية صعب إن لم نقل مستحيل ، لذا سنستخدم الطرق العددية **(Méthodes Numériques)** لإيجاده ، نستخدم طريقة نيوتن – رافسون:

نضع $r = x$.

ولإيجاد معدل العائد الداخلي بهذه الطريقة نختار قيمة تقريبية لهذا الجذر $x_0 = 0.01$.

$$f(x) = \frac{120000}{(1+x)} + \frac{100000}{(1+x)^2} + \frac{90000}{(1+x)^3} + \frac{130000}{(1+x)^4} + \frac{200000}{(1+x)^5} - 530196.7375 = 0$$

$$f'(x) = -\frac{120000}{(1+x)^2} - \frac{200000}{(1+x)^3} - \frac{270000}{(1+x)^4} - \frac{520000}{(1+x)^5} - \frac{1000000}{(1+x)^6}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\frac{120000}{(1+x)} + \frac{100000}{(1+x)^2} + \frac{90000}{(1+x)^3} + \frac{130000}{(1+x)^4} + \frac{200000}{(1+x)^5} - 530196.7375}{-\frac{120000}{(1+x)^2} - \frac{200000}{(1+x)^3} - \frac{270000}{(1+x)^4} - \frac{520000}{(1+x)^5} - \frac{1000000}{(1+x)^6}}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{\frac{120000}{(1+x_0)} + \frac{100000}{(1+x_0)^2} + \frac{90000}{(1+x_0)^3} + \frac{130000}{(1+x_0)^4} + \frac{200000}{(1+x_0)^5} - 530196.7375}{-\frac{120000}{(1+x_0)^2} - \frac{200000}{(1+x_0)^3} - \frac{270000}{(1+x_0)^4} - \frac{520000}{(1+x_0)^5} - \frac{1000000}{(1+x_0)^6}}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0.01 - \frac{\frac{120000}{(1+0.01)} + \frac{100000}{(1+0.01)^2} + \frac{90000}{(1+0.01)^3} + \frac{130000}{(1+0.01)^4} + \frac{200000}{(1+0.01)^5} - 530196.7375}{-\frac{120000}{(1+0.01)^2} - \frac{200000}{(1+0.01)^3} - \frac{270000}{(1+0.01)^4} - \frac{520000}{(1+0.01)^5} - \frac{1000000}{(1+0.01)^6}}$$

$$\therefore x_1 = 0.054430$$

بنفس الكيفية نجد :

$$x_2 = 0.05992$$
$$x_3 = 0.05999$$
$$x_4 = 0.05999$$

معدل العائد الداخلي لهذا الاستثمار هو r = 6%

باستخدام برنامج Maple تحصلنا على نفس النتيجة:

$$with(Student[Calculus1]):$$

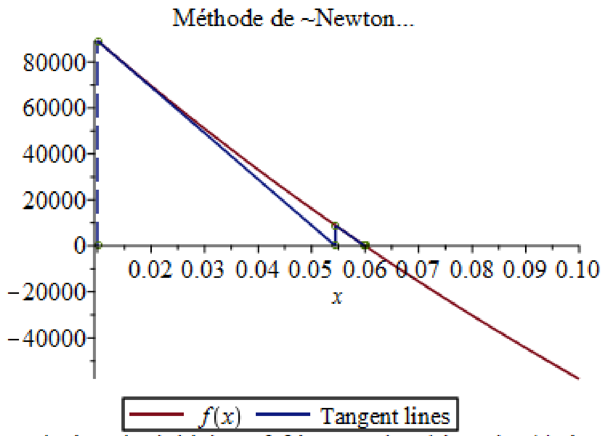
$$NewtonsMethod\left(\frac{120000}{1+x} + \frac{100000}{(1+x)^2} + \frac{90000}{(1+x)^3} + \frac{130000}{(1+x)^4} + \frac{200000}{(1+x)^5} - 530196.7375\,, x = 0.01\right)$$

$$0.05999999971$$

$$NewtonsMethod\left(\frac{120000}{1+x} + \frac{100000}{(1+x)^2} + \frac{90000}{(1+x)^3} + \frac{130000}{(1+x)^4} + \frac{200000}{(1+x)^5} - 530196.7375, x = 0.01, output = sequence\right)$$

$$0.01, 0.05443092876, 0.05992866052, 0.05999998776, 0.05999999971$$

$$NewtonsMethod\left(\frac{120000}{1+x} + \frac{100000}{(1+x)^2} + \frac{90000}{(1+x)^3} + \frac{130000}{(1+x)^4} + \frac{200000}{(1+x)^5} - 530196.7375, x = 0.01, view = [0.01\,..0.1, DEFAULT], output = plot\right)$$



À partir du point initial $x = 0.01$, au moins 4 iteration(s) de la méthode de Newton pour

$$f(x) = \frac{120000}{1+x} + \frac{100000}{(1+x)^2} + \frac{90000}{(1+x)^3} + \frac{130000}{(1+x)^4} + \frac{200000}{(1+x)^5} - 5.301967375\ 10^5$$

تمرين 4:

بالرجوع إلى بيانات التمرين 2 أحسب مؤشر الربحية لكل مشروع؟

حل التمرين 4:

$$C_A = 1200000\ DA\ ,\ \ VAN_A = 317896.81\ DA$$

$$C_B = 1500000\ DA\ ,\ \ VAN_B = -23928.92\ DA$$

$$IP_A = \frac{C_A + VAN_A}{C_A} = \frac{1200000 + 317896.81}{1200000} = 1.264$$

$$IP_B = \frac{C_B + VAN_B}{C_B} = \frac{1500000 - 23928.92}{1500000} = 0.98$$

$$IP_A > IP_B$$

المشروع A أكثر ربحية من المشروع B .

قائمة المراجع:

أ) الكتب باللغة العربية:

1) صفيح صادق ، يقور أحمد ، الرياضيات المالية ، درا هومة ، الجزائر، 2019.

2) ياسين أحمد الشبول ، التقنيات العددية ، مكتبة المجتمع العربي، عمان ، 2004 .

3) جون بيار فاذر ، الرياضيات المالية والاكتوارية ، ترجمة نوفل سالم الزريبي ، العبيكان ، الرياض ، 2012.

ب) الدروس والمحاضرات والمجلات:

1) محمد بداوي ، الرياضيات ، سنة ثانية ليسانس ديموغرافيا ، قسم علم الاجتماع والديموغرافيا ، 2019.

ت) الكتب باللغة الأجنبية:

1) B. de FINETTI , FINANCE ET ÉCONOMIE APPLIQUÉE : leçons de mathématiques financières , Dunod , paris , 1969.
2) Armelle Mathé , L'essentiel Mathématiques financières , Gualino éditeur, Lextenso éditions, France, 2015.
3) Joanne Hamet , Les mathématiques financières , e-theque , 2003.
4) Meghraoui kada , Tout Pour Réussir en mathématiques financières , Gualino éditeur, Lextenso éditions, France, 2014.
5) Maurice saada , mathématiques financières , presse universetaire de France , paris , 1985.
6) Benjamine Legros , Manuel de mathématiques financières, Dunod , paris , 2011.

ث) الدروس باللغة الأجنبية:

ج) Mathématiques-financières-Licence-03_économhttps://umeci.org.ci/wpcontent/uploads/2020/04/Math%C3%A9matiques-financi%C3%A8res-Licence-03_%C3%A9conomie.pdf

ح) مواقع الكترونية :

1) https://xn--apprendreconomie-jqb.com/les-annuites/

2) http://modellis.fr/choix-d-investissement-methodes/

3) https://www.l-expert-comptable.com/a/6272-calcul-de-la-valeur-actuelle-nette-van-definition-utilite.html#:~:text=Elle%20est%20%C3%A9gale%20%C3%A0%20la,%C3%A0%20la%20CAF%20d'exploitation.

4) http://www.fifrance.com/emprunt_(finance).php

5) https://www.investopedia.com/terms/l/loan.asp

6) www.wikipedia.org