

Chapitre 1. Logique et raisonnements

KAMEL El-hadi

17/05/2024



Table des matières

Objectifs	3
I - Carte conceptuelle du module	4
II - Pré-requis	5
III - Exercice : Test prérequis	6
IV - Logique	7
1. Assertions.....	7
2. Quantificateurs	8
V - Raisonnement	10
1. Raisonnement direct	10
2. Contraposée.....	10
3. Absurde	10
4. Contre-exemple	10
5. Récurrence	11
VI - Exercice : Série N°1	12
Bibliographie	13

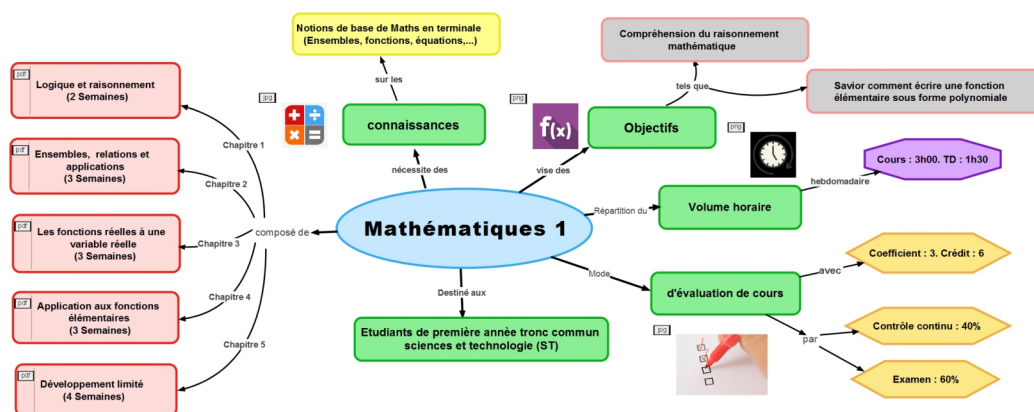
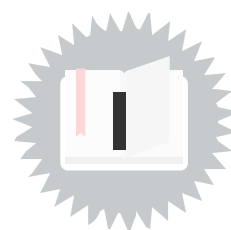
Objectifs



A l'issue de ce chapitre, l'étudiant sera capable de :

- Connaître les principaux opérateurs, quantificateurs universels et leurs propriétés : NON, ET, OU,...
- Comprendre les notions d'implication et d'équivalence.
- Tester la validité d'une proposition mathématique.
- Comprendre les méthodes classiques de raisonnements.

Carte conceptuelle du module



Pré-requis



Ce chapitre nécessite des connaissances sur :

- Les variables, les équations et les inégalités.
- Les opérations arithmétiques (addition, soustractions, multiplication et division).
- La démonstration par récurrence.

Exercice : Test prérequis



Répondre par vrai ou faux aux questions suivantes

Exercice

« $2+2=4$ »

Exercice

« $2 \times 3 = 7$ »

Exercice

« Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $x \geq 0$ »

Exercice

« Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $x^2 \geq 0$ »

Exercice

« Pour tout $z \in \mathbf{C}$, on a $|z| = 1$ »



1. Assertions

Une assertion est une phrase soit vraie, soit fausse, pas les deux en même temps.

? Exemple

$2 + 2 = 4$ est une assertion vraie.

$3 \times 2 = 7$ est une assertion fausse.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x^2 \geq 0$ est une assertion vraie.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a $|z| = 1$ est une assertion fausse.

Si P est une assertion et Q est une autre assertion, nous allons définir de nouvelles assertions construites à partir de P et de Q .

L'opérateur logique « et »

L'assertion « P et Q » est vraie si P est vraie et Q est vraie. L'assertion « P et Q » est fausse sinon. On résume ceci en une table de vérité :

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

FIGURE 1 – Table de vérité de « P et Q »

L'opérateur logique « ou »

L'assertion « P ou Q » est vraie si l'une (au moins) des deux assertions P ou Q est vraie. L'assertion « P ou Q » est fausse si les deux assertions P et Q sont fausses. On reprend ceci dans la table de vérité :

P	Q	P ou Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

FIGURE 2 – Table de vérité de « P ou Q »

Q Remarque

Pour définir les opérateurs « ou », « et » on fait appel à une phrase en français utilisant les mots ou, et!
Les tables de vérités permettent d'éviter ce problème.

La négation « non »

L'assertion « non P » est vraie si P est fausse, et fausse si P est vraie.

P	Non P
V	F
F	V

FIGURE 3 – Table de vérité « Négation »

Propriétés

$$\overline{P \wedge Q} = \overline{P} \vee \overline{Q}.$$

$$\overline{P \vee Q} = \overline{P} \wedge \overline{Q}.$$

L'implication $\Rightarrow$

La définition mathématique est la suivante :

« L'assertion « (non P) ou Q » est notée « $P \Rightarrow Q$ ».

Sa table de vérité est :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

FIGURE 4 – Table de vérité « Implication »

L'équivalence $\Leftrightarrow$

L'équivalence est définie par : « $P \Rightarrow Q$ » est l'assertion « $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$ ».

On dira « P est équivalent à Q » ou « P équivaut à Q » ou « P si et seulement si Q ». Cette assertion est vraie lorsque P et Q sont vraies ou lorsque P et Q sont fausses. La table de vérité est :

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

FIGURE 5 – Table de vérité « Equivalence »

2. Quantificateurs

Le quantificateur $\forall$: pour tout

L'assertion $\forall x \in E \sim P(x)$ est une assertion vraie lorsque les assertions $P(x)$ sont vraies pour tous les éléments x de l'ensemble E . On lit Pour tout x appartenant à E , $P(x)$ est vraie .

? Exemple

$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ est une assertion vraie.

$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 1$ est une assertion fausse.

Le quantificateur $\exists$: il existe

L'assertion $\exists x \in E P(x)$ est une assertion vraie lorsque l'on peut trouver au moins un élément x de E pour lequel $P(x)$ est vraie. On lit il existe x appartenant à E tel que $P(x)$ (soit vraie).

? Exemple

$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 0$ est une assertion vraie, par exemple $x = 0$.

$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$ est une assertion fausse.

Raisonnement



1. Raisonnement direct

On veut montrer que l'assertion « $P \Rightarrow Q$ » est vraie. On suppose que P est vraie et on montre qu'alors Q est vraie. C'est la méthode à laquelle vous êtes le plus habitué

? Exemple

Montrer que si $a, b \in \mathbb{Q}$ alors $a + b \in \mathbb{Q}$.

2. Contraposée

Le raisonnement par contraposition est basé sur l'équivalence suivante. L'assertion $P \Rightarrow Q$ est équivalente à $(\text{Non } Q) \Rightarrow (\text{Non } P)$. Donc si l'on souhaite montrer l'assertion $P \Rightarrow Q$. On montre en fait que si $(\text{Non } Q)$ est vraie alors $(\text{Non } P)$ est vraie

? Exemple

Soit $n \in \mathbb{N}$. montrer que si $n^2 n 2$ est pair alors n est pair.

3. Absurde

Le raisonnement par l'absurde pour montrer $P \Rightarrow Q$ repose sur le principe suivant : On suppose à la fois que P est vraie et que Q est fausse et on cherche une contradiction. Ainsi si P est vraie alors Q doit être vraie et donc $P \Rightarrow Q$ est vraie.

4. Contre-exemple

Si l'on veut montrer qu'une assertion du type $\forall x \in E P(x)$ est vraie alors pour chaque x de E il faut montrer que $p(x)$ est vraie. Par contre pour montrer que cette assertion est fausse alors il suffit de trouver $x \in E$ tel que $P(x)$ soit fausse. (Rappelez-vous la négation de $\forall x \in E, P(x)$ est $\exists x \in E, P(x)$). Trouver un tel x c'est trouver un contre-exemple à l'assertion $\forall x \in E, P(x)$.

? Exemple

Montrer que l'assertion suivante est fausse « Tout entier positif est somme de trois carrés »

5. Récurrence

Le principe de récurrence permet de montrer qu'une assertion $P(n)$, dépendant de n , est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. La démonstration par récurrence se déroule en trois étapes :

- Lors de l'initialisation on prouve $P(0)$.
- Pour l'étape d'hérédité, on suppose $n \geq 0$ donné avec $P(n)$ vraie.
- et on démontre alors que l'assertion $P(n + 1)$ au rang suivant est vraie.

Enfin dans la conclusion, on rappelle que par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice : Série N°1



Exercice 1 :

Etudier la validité des propositions suivantes

1. $(2 + 2 = 4) \wedge (1 + 1 = 3)$
2. $(2 + 2 = 4) \Rightarrow (1 + 1 = 3)$
3. $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 = 1$
4. $\exists x \in \mathbf{R} : (x < 0 \Rightarrow x + 1 < 0)$

Exercice 2 :

Exprimer les propositions suivantes à l'aide des quantificateurs :

1. Il existe un nombre réel x inférieur à 2.
2. Pour tout entier x , si 4 divise x , alors 2 divise x .
3. Il existe un unique nombre naturel n tel que : $n+1 = 3$.

Exercice 3 :

1. Donner la contraposée de la proposition suivante : $-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow |x| \leq 1$
2. Donner l'inverse de la proposition suivante : $-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow |x| \leq 1$
3. Donner la négation de la proposition suivante : $-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow |x| \leq 1$

Exercice 4 :

1. Prouver que si $a, b \in \mathbf{Q}$, alors $a + b \in \mathbf{Q}$.
2. Soient $a, b \in \mathbf{R}$. Démontrer que si $a \leq b$, alors $(a + b)/2 \leq b$.
1. Soit $n \in \mathbf{N}$. Démontrer que si n est multiple de 3, alors n^2 est divisible par 9.

Bibliographie



[1] Cours de mathématiques Première année : exo7 .

[2] Serie Ramis, Mathématiques Tout-en-un pour la Licence Cours complet et 270 exercices corrigés , (2007).

[3] Marc Hindry :Cours mathématiques première année (L1) .