Chapitre 2. Ensembles, relations et applications

KAMEL El-hadi

21/02/2024

Table des matières

Objectifs **3**

I - Pré-requis **4**

II - Exercice : Test prérequis **5**

III - Ensembles **6**

1. Définir des ensembles 6
2. Inclusion, union, intersection, complémentaire 6

IV - Relations **8**

1. Relations binaires 8
2. Relation d’équivalence 8
3. Relations d'ordre 8

V - Applications **9**

1. Définitions 9
2. Image directe, image réciproque 9
3. Injection, surjection, bijection 10

VI - Exercice : Série N°2 **11**

Bibliographie **12**

Objectifs

A l'issu de ce chapitre, l'étudiant sera capable de :

- Comparer deux ensembles : égalité et inclusion.
- Connaitre les notions de ; l'union, l'intersection et le complémentaire.
- Comprendre la relation entre un ensemble de départ et un ensemble d'arrivé 'une application'.
- Etudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité d'une application.
- Connaître la différence entre relation d'équivalence et relation d'ordre.

Pré-requis

Ce chapitre nécessite des connaissances sur :

- Les ensembles **N**, **Z**, **Q**, **R** et **C**.
- Le produit cartésien de dimension 2.
- Les fonctions.

Exercice : Test prérequis

Choisir la bonne réponse

Exercice

L'inclusion entre les ensembles **N** et **Z** est :

- [ ] **N** ⊂ **Z**
- [ ] **Z** ⊂ **N**

Exercice

L'inclusion entre les ensembles **Z** et **Q** est :

- [ ] **Q** ⊂ **Z**
- [ ] **Z** ⊂ **Q**

Exercice

L'inclusion entre les ensembles **R** et **C** est :

- [ ] **R** ⊂ **C**
- [ ] **C** ⊂ **R**

Exercice

Soit f(x)= $(2x+2)^2$+x. La dérivée de f est :

- [ ] f'(x)= 2(2x+2)+1
- [ ] f'(x)= 4(2x+2)+1

Exercice

Si n est un nombre pair, alors :

- [ ] Il existe un entier k, tel que n=2k+1
- [ ] Il existe un entier k, tel que n=2k

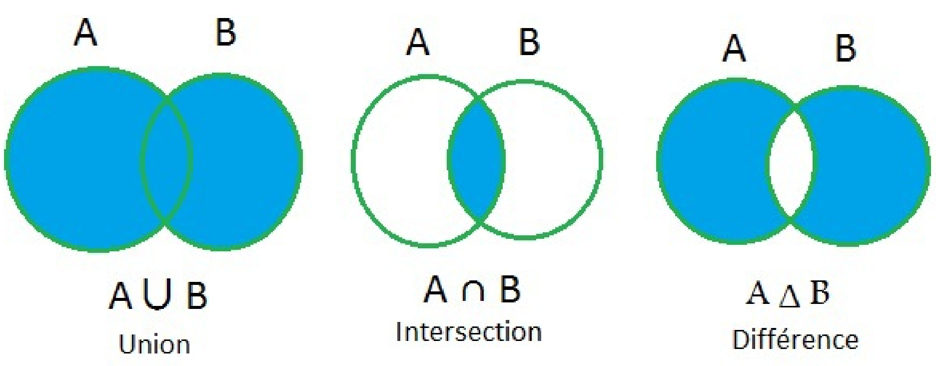
Ensembles

1. Définir des ensembles

- On va définir informellement ce qu'est un ensemble : un ensemble est une collection d'éléments. Par exemple, $\{0, 1\}$, {rouge, noir}, $\{0, 1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N}$.
- Un ensemble particulier est l'ensemble vide, noté $\emptyset$ qui est l'ensemble ne contenant aucun élément.
- On note $x \in E$ si x est un élément de E, et $x \notin E$ dans le cas contraire

2. Inclusion, union, intersection, complémentaire

1. **L'inclusion**. $E \subset F$ si tout élément de E est aussi un élément de F. Autrement dit : $\forall x \in E\ (x \in F)$. On dit alors que E est un sous-ensemble de F ou une partie de F.
2. **L'égalité**. $E = F$ si et seulement si $E \subset F$ et $F \subset E$.
3. **Ensemble des parties** de E. On note $P(E)$ l'ensemble des parties de E. Par exemple si $E = \{1, 2, 3\}$: $P(\{1, 2, 3\}) = \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$.
4. Soient E; A deux ensembles, si A E; alors le **complémentaire** de A dans E est l'ensemble $E \backslash A = \{x \in E \mid x \notin A\}$.
5. **Union**. $A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$. (Le "ou" n'est pas exclusif : x peut appartenir à A et à B en même temps).
6. **Intersection**. $A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$.
7. **L'ensemble fini**. On dit que l'ensemble E est fini si nombre d'éléments de E est fini. Nombre d'éléments de E s'appelle le cardinal de E noté Card(E).
8. **La différence symétrique** est l'ensemble $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.



Union, intersection et différence

Fondamental

Soient A, B, C des parties d'un ensemble E. Alors, les propositions suivantes ont lieu.

- $A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$ (commutativité).
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ et $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (associativité).
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributivité).
- $\{E\backslash(A \cap B)\} = (E\backslash A) \cup (E\backslash B)$ et $\{E\backslash(A \cup B)\} = (E\backslash A) \cap (E\backslash B)$ (loi de Morgan).

Relations

IV

1. Relations binaires

Définition

On appelle relation binaire, toute assertion entre deux objets, pouvant être vérifiée ou non. On note xRy et on lit x est en relation avec y .

2. Relation d'équivalence

Définition

Soit **R** une relation binaire dans un ensemble E et x, y, z des éléments de E, **R** est dite

- Réflexive si : x **R** x c'est à dire chaque élément est en relation avec lui même.
- Symétrique si : x **R** y ⇒ y **R** x. Si x est en relation avec y alors y est en relation avec x.
- Transitive si : [x **R** y et y **R** z] ⇒ x **R** z. Si x est en relation avec y et y en relation avec z alors x est en relation avec z.
- Anti-symétrique si : [x **R** y et y **R** x] ⇒ x = y. Si deux éléments sont en relation l'un avec l'autre, ils sont égaux.

La relation **R** est une relation d'équivalence si elle est à la fois réflexive, symétrique et transitive. Dans ce cas, on appelle classe d'équivalence d'un élément x de E, l'ensemble des éléments de E en relation avec x par **R**, notée x˙ ou cl(x) ou bien C(x) :

Exemple

La relation R définie par :

$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad xRy \Longleftrightarrow x^2 = y^2$

est une relation d'équivalence.

3. Relations d'ordre

Définition

Une relation R sur E est dite relation d'ordre si elle est antisymétrique, transitive et réflexive.

Exemple

Soit R la relation définie sur **N**-{0} par la relation '' x divise y ''. la relation R est une relation d'ordre puisque elle est antisymétrique, transitive et réflexive.

Applications

1. Définitions

- **Une application** (ou une fonction) $f : E \to F$, c'est la donnée pour chaque élément $x \in E$ d'un unique élément de F noté $f(x)$

  Nous représenterons les applications par deux types d'illustrations : les ensembles « patates », l'ensemble de départ (et celui d'arrivée) est schématisé par un ovale ses éléments par des points. L'association x 7→ f (x) est représentée par une flèche.

  L'autre représentation est celle des fonctions continues de R dans R (ou des sous-ensembles de R). L'ensemble de départ R est représenté par l'axe des abscisses et celui d'arrivée par l'axe des ordonnées. L'association x 7→ f (x) est représentée par le point $(x, f(x))$.

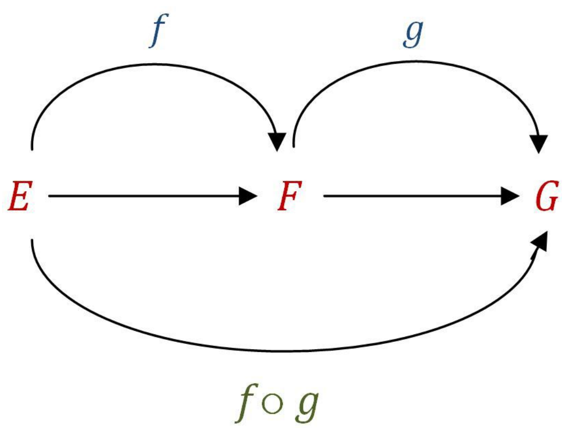
- **Domaine de définition** de f : noté Df l'ensemble des éléments $x \in E$ fait correspondre un unique élément $y \in F$ noté $f(x)$. $y = f(x)$ est appelé image de x et x est un antécédent de y. E est appelé ensemble de départ et F l'ensemble d'arrivée de l'application f. On écrit :

  $f : E \longrightarrow F$
  $xlongmapstof(x)$

- **Égalité**. Deux applications $f, g : E \to F$ sont égales si et seulement si pour tout $x \in E$, $f(x) = g(x)$. On note alors $f = g$.

- **Graphe** de $f : E \to F$ est l'ensemble $\Gamma(f) = \{ x, f(x) \in E \times F \mid x \in E\}$.

- **Composition**. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ alors $g \circ f : E \to G$ est l'application définie par $g \circ f(x) = g\, f(x)$



Composition de deux fonctions

2. Image directe, image réciproque

Définition

Soit $A \subset E$ et $f : E \to F$, l'**image directe** de A par f est l'ensemble $f(A) = \{ f(x) \mid x \in A \}$.

Soit $B \subset F$ et $f : E \to F$, l'**image réciproque** de B par f est l'ensemble $f^{-1}(B) = x \in E \mid f(x) \in B$.

Remarque

Ces notions sont plus difficiles à maîtriser qu'il n'y paraît, f (A) est un sous-ensemble de F, f−1 (B) est un sous-ensemble de E, La notation « f −1 (B) » est un tout, rien ne dit que f est un fonction bijective (voir plus loin). L'image réciproque existe quelque soit la fonction. L'image directe d'un singleton f ({x}) = f (x) est un singleton. Par contre l'image réciproque d'un singleton f−1 { y} dépend de f . Cela peut être un singleton, un ensemble à plusieurs éléments ; mais cela peut-être E tout entier (si f est une fonction constante) ou même l'ensemble vide (si aucune image par f ne vaut y.

3. Injection, surjection, bijection

Définition

f est **injective** si pour tout x, x ' ∈ E avec f (x) = f (x ') alors x = x ' . Autrement dit :

$\forall x_1, x_2 \in E, f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2.$

Définition

f est **surjective** si pour tout y ∈ F, il existe x ∈ E tel que y = f (x). Autrement dit :

$\forall y \in F, \exists x \in E, \quad y = f(x).$

Une autre formulation : f est surjective si et seulement si f (E) = F .

Définition

f est **bijective** si elle injective et surjective. Cela équivaut à : pour tout y ∈ F il existe un unique x ∈ E tel que y = f (x). Autrement dit :

$\forall y \in F, \exists ! x \in E, \quad y = f(x).$

L'existence du x vient de la surjectivité et l'unicité de l'injectivité. Autrement dit, tout élément de F a un unique antécédent par f.

Remarque

Encore une fois ce sont des notions difficiles à appréhender. Une autre façon de formuler l'injectivité et la surjectivité est d'utiliser les antécédents. • f est injective si et seulement si tout élément y de F a au plus un antécédent (et éventuellement aucun). • f est surjective si et seulement si tout élément y de F a au moins un antécédent.

Exercice : Série N°2

Exercice 1 :

Soient A =]−∞; 3], B =]−2; 7], et C =]−5; +∞[trois sous ensembles de **R**.

1. Trouver
    - A ∩ B, B ∩ C.
    - A ∪ B, B ∪ C.
    - **R** \ A, A \ B.
    - A Δ B, B Δ C.
2. Soit F = {2n; n ∈ N}.
    - Trouver **N** \ (F).

Exercice 2 :

Soit f : **R** → **R**, f(x) = y. Que signifient les formules suivantes :

1. ∀x ∈ **R** , ∃!y ∈ **R** : f (x) = y.
2. ∀y ∈ **R** , ∃x ∈ **R** : f (x) = y (f est une application).
3. (∀x1, x2 ∈ **R** si f (x1) = f (x2)) ⇒ (x1 = x2). (f est une application).
4. ∀y ∈ **R** , ∃!x ∈ **R** : f (x) = y. (f est une application).

Exercice 3 :

Soit f une fonction définie de **R** dans **R** par f(x) = x^2+1

1. Trouver f (2; 6); f (]2; 6]); et f (]5; 7]), et puis déduire f (]2; 6] ∪]5; 7]).
2. Déterminer f−1({2; 6}); f−1(]2; 6]), f−1(]5; 7]),et puis déduire f−1(]2; 6] ∪]5; 7]) et f−1(]2; 6] ∩]5; 7]).
3. Calculer f(−2) et f(2). f est-elle injective?
4. Déterminer f(R). f est-elle surjective?
5. Déterminer un domaine (de départ) de I et un ensemble (d'arrivé) de J pour que f soit bijective.

Exercice 4 :

Considérons la relation binaire x**R**y ⇔ |x| = |y| pour x, y ∈ **R**.

- Montrer que **R** est une relation d'équivalence.
- Pour x ∈ **R**, Trouver la classe d'équivalence de x.

Bibliographie

[1] Hitta Amara : Cours Algebre et Analyse I ,LMD : DEUG I-MI/ST 2008-2009

[2] Mohamed Mehabali : Mathématique 1, Fonction d'une variable réelle. Première année Universitaire 2011 .

[3] M. Mechab : Cours d'algèbre-LMD Sciences et Techniques.