

السنة الثالثة ليسانس تسيير واقتصاد المؤسسة

سلسلة تمارين في الاقتصاد القياسي

سلسلة تمارين حول المحور الثاني نموذج الانحدار الخطي البسيط

التمرين الأول:

لدينا الجدول التالي يبين متغيرين اثنين لثمانية مشاهدات على النحو التالي:

y	x	i
10	25	1
14	20	2
12	19	3
9	26	4
15	23	5
8	28	6
10	20	7
13	22	8

المطلوب:

1- احسب كلا من $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ باستعمال طريقة المربعات الصغرى العادية، مع اختبار معنويتهما عند

مستوى احتمال 5% (تعطي قيمة إحصائية t الحرجة : $t_{8-2}^{0.05} = 2.447$)

2- احسب معامل الارتباط بين المتغيرين واختبر معنويته عند مستوى احتمال 5%

3- اختبر معنوية النموذج ككل عند مستوى احتمال 5% (تعطي $F_{1,8-2}^{0.05} = 5.99$)

التمرين الثاني:

لدينا المعطيات التالية لمتغيرين هما النمو الاقتصادي في الجزائر كمتغير تابع y والكتلة النقدية كمتغير

مستقل x خلال الفترة 1970-2018:

$$\bar{X} = 16.34, \bar{Y} = 1.37, \sigma_x^2 = 89.19,$$

$$Cov(x, y) = 15.97, \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2 = 918.91$$

المطلوب:

- 1- قدر معادلة الانحدار الخطي البسيط لكلا المتغيرين
- 2- اختبر معنوية الميل الحدل مع تحديد مجال الثقة له
- 3- احسب جدول تحليل التباين مع اختبار جودة النموذج ككل

حل السلسلة الثانية

التمرين الأول:

1- تقدير نموذج الانحدار الخطي واختبار معنوية المقدرات

- حساب المقدرات: نقوم باستعمال العلاقات التالية لحساب مقدرات النموذج:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} + \hat{\beta}\bar{X}$$

جدول مساعد لحساب المقدرات

i	x	y	$(x_i - \bar{x})$	$(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
1	25	10	2,125	-1,375	-2,921875	4,515625	1,890625
2	20	14	-2,875	2,625	-7,546875	8,265625	6,890625
3	19	12	-3,875	0,625	-2,421875	15,015625	0,390625
4	26	9	3,125	-2,375	-7,421875	9,765625	5,640625
5	23	15	0,125	3,625	0,453125	0,015625	13,140625
6	28	8	5,125	-3,375	-17,296875	26,265625	11,390625
7	20	10	-2,875	-1,375	3,953125	8,265625	1,890625
8	22	13	-0,875	1,625	-1,421875	0,765625	2,640625
Σ	91	183	0	0	-34.625	72.875	43.875

ومنه نجد ما يلي:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} = \frac{-34.62}{72.87} = -0.47$$

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} + \hat{\beta}\bar{X} = 11.37 - (-0.47)(22.87) = 22.24$$

ومنه معادلة الانحدار تكون على الشكل التالي:

$$\hat{Y}_t = 22.24 - 0.47X_t$$

• اختبار معنوية المقدرات

نستخدم الجدول التالي المساعد لحساب تباين المقدرات

i	x	y	\hat{y}	e_t	e_t^2	\hat{x}	e'_i	e'^2_i
1	25	10	10,366	-0,366	0,133956	24,06	0,94	0,8836
2	20	14	12,7415	1,2585	1,583822	20,9036	-0,9036	0,81649296
3	19	12	13,2166	-1,2166	1,480116	22,4818	-3,4818	12,12293124
4	26	9	9,8909	-0,8909	0,793703	24,8491	1,1509	1,32457081
5	23	15	11,3162	3,6838	13,57038	20,1145	2,8855	8,32611025
6	28	8	8,9407	-0,9407	0,884916	25,6382	2,3618	5,57809924
7	20	10	12,7415	-2,7415	7,515822	24,06	-4,06	16,4836
8	22	13	11,7913	1,2087	1,460956	21,6927	0,3073	0,09443329
Σ	91	183		0	27,42367			45,62983779

حساب تباين الأخطاء العشوائية:

$$\hat{\sigma}_{\hat{\epsilon}_t}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \epsilon_t^2}{n-2} = \frac{27.42}{8-2} = 4.57$$

حساب تباين الحد الثابت:

$$\hat{\sigma}_{\hat{\alpha}}^2 = \hat{\sigma}_{\hat{\epsilon}_t}^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \right) = 4.57 \left(\frac{1}{8} + \frac{(22.87)^2}{72.87} \right) = 33.38 \rightarrow \hat{\sigma}_{\hat{\alpha}} = 5.77$$

حساب تباين الميل الحدي:

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}^2 = \frac{\hat{\sigma}_{\hat{\epsilon}_t}^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} = \frac{4.57}{72.87} = 0.062 \rightarrow \hat{\sigma}_{\hat{\beta}} = 0.25$$

اختبار المعنوية بالنسبة للحد الثابت، نضع:

$$\begin{cases} H_0: \alpha = 0 \\ H_1: \alpha \neq 0 \end{cases}$$

حيث يتم حساب إحصائية t^* المحسوبة وفق مايلي :

$$t^* = \frac{|\hat{\alpha} - \alpha|}{\hat{\sigma}_{\hat{\alpha}}} = \frac{|22.24 - 0|}{5.77} = 3.84$$

ومنه لدينا إحصائية $t^* = 3.84$ أكبر من إحصائية $t_{8-2}^{0.05} = 2.447$ ومنه نرفض الفرضية الصفرية وبالتالي الحد الثابت α له معنوية تختلف عن الصفر عند درجة معنوية 5%

اختبار المعنوية بالنسبة للميل الحدي، نضع:

$$\begin{cases} H_0: \beta = 0 \\ H_1: \beta \neq 0 \end{cases}$$

حيث يتم حساب إحصائية t^* المحسوبة وفق مايلي :

$$t^* = \frac{|\hat{\beta} - \beta|}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}} = \frac{|-0.47 - 0|}{0.25} = 1.89$$

ومنه لدينا إحصائية $t^* = 1.89$ أصغر من إحصائية $t_{8-2}^{0.05} = 2.447$ ومنه نقبل الفرضية الصفرية وبالتالي الميل الحدي β ليس له معنوية إحصائية أو لا يختلف معنويا عن الصفر عند درجة معنوية 5% وهذا يدل على أن المتغير x لا يؤثر معنويا على المتغير y

2- حساب معامل الارتباط واختبار معنويته

يتم حساب معامل الارتباط وفق القانون التالي:

$$r_{x,y} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}}$$

من الجدول المساعد أعلاه نجد:

$$r_{x,y} = \frac{-34.62}{\sqrt{72.87} \sqrt{43.87}} = -0.61$$

ومنه نقول بأن العلاقة بين المتغيرين عكسية، فكلما زاد x ينخفض معه y والعكس صحيح

لاختبار معنوية معامل الارتباط نستخدم العلاقة التالية:

$$t_{r_{x,y}}^* = \frac{|r_{x,y}|}{\sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}} = \frac{|-0.61|}{\sqrt{\frac{1-(-0.61)^2}{8-2}}} = 1.89$$

ومنه لدينا إحصائية $t_{r_{x,y}}^* = 1.89$ أصغر من إحصائية $t_{8-2}^{0.05} = 2.447$ ومنه نقبل الفرضية الصفرية وبالتالي معامل الارتباط بين المتغيرين غير معنوي أو لا يختلف معنويا عن الصفر عند درجة معنوية 5%

3- اختبار جودة النموذج ككل:

نختبر الفرضيات التالية:

$$\begin{cases} H_0: \alpha = \beta = 0 \\ H_1: \beta \neq 0 \end{cases}$$

نحسب أولا معامل التحديد R^2 حيث انه في حالة الانحدار البسيط نستعمل العلاقة التالية

$$R^2 = r_{x,y}^2 = (-0.61)^2 = 0.37$$

الآن نحسب إحصائية F^* المحسوبة بالعلاقة التالية

$$F^* = \frac{R^2(n-2)}{(1-R^2)} = \frac{0.37(8-2)}{(1-0.37)} = 3.59$$

ومنه لدينا إحصائية $F^* = 3.59$ أصغر من إحصائية $F_{1,8-2}^{0.05} = 5.99$ ومنه نقبل الفرضية الصفرية وهذا يدل على النموذج المقدر غير معنوي عند مستوى احتمال 5%

التمرين الثاني:

1- تقدير معادلة الانحدار الخطي البسيط

نستعمل العلاقة التالية:

$$\hat{\beta} = \frac{Cov(x, y)}{V(x)} = \frac{15.97}{89.13} = 0.17$$

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X} = 1.37 - (0.17)(16.34) = -1.54$$

ومنه معادلة الانحدار تكون على الشكل التالي:

$$\hat{Y}_t = -1.54 + 0.17X_t$$

أي ان الزيادة في الكتلة النقدية ب10 بالمئة تؤدي الى زيادة النمو الاقتصادي ب1.97 بالمئة

2- اختبار معنوية الميل الحدي وجمال الثقة

اختبار المعنوية بالنسبة للميل الحدي، نضع:

$$\begin{cases} H_0: \beta = 0 \\ H_1: \beta \neq 0 \end{cases}$$

حساب التباين المقدر للأخطاء العشوائية:

$$\hat{\sigma}_{\hat{\epsilon}_t}^2 = \frac{\sum_{t=1}^n \epsilon_t^2}{n-2} = \frac{918.91}{49-2} = 19.55$$

حساب التباين المقدر للميل الحدي:

نبحث أولاً على القيمة $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ من خلال قانون حساب التباين للمتغير x ومنه

$$V(x) = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n} \Rightarrow \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = V(x) * n = 89.19 * 49 = 4281.2$$

ومنه

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}^2 = \frac{\hat{\sigma}_{\hat{\epsilon}_t}^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} = \frac{19.55}{4281.2} = 0.0045 \rightarrow \hat{\sigma}_{\hat{\beta}} = 0.067$$

الآن يتم حساب إحصائية t^* المحسوبة وفق مايلي :

$$t^* = \frac{|\hat{\beta} - \beta|}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}} = \frac{|0.17 - 0|}{0.067} = 2.65$$

ومنه لدينا إحصائية $t^* = 2.65$ أكبر من إحصائية $t_{49-2}^{0.05} = 1.96$ ومنه نرفض الفرضية الصفرية

وبالتالي الميل الحدي β له معنوية إحصائية أو يختلف معنوياً عن الصفر عند درجة معنوية 5%

وهذا يدل على أن المتغير x يؤثر معنوياً على المتغير y

مجال الثقة يكون كالتالي:

$$\beta = \hat{\beta} \pm \hat{\sigma}_{\hat{\beta}} * t_{47}^{0.05} = 0.17 \pm 0.067 * 1.96$$

$$\beta \in [0.064; 0.329]$$

3- حساب جدول التباين واختبار جودة النموذج الكلية

بما أننا في حالة نموذج الانحدار الخطي البسيط نستعمل العلاقة التالية

$$F^* = (t_{\hat{\beta}}^*)^2 = (2.65)^2 = 7.03$$

ولدينا أيضا العلاقة التالية:

$$F^* = \frac{ESS}{\hat{\sigma}_{\hat{\varepsilon}_t}^2} \Rightarrow ESS = F^* * \hat{\sigma}_{\hat{\varepsilon}_t}^2 = 7.03 * 19.55 = 137.61$$

ومنه نستنتج ما يلي:

$$TSS=ESS+RSS=137.61+918.91=1056.53$$

إذن يكون جدول تحليل التباين كما يلي

مصدر التغير	مجموع مربعات الانحرافات	عدد درجات الحرية	متوسط مربعات الانحرافات
المتغير المستقل	ESS=137.61	1	137.61
البواقي	RSS=918.91	47	19.55
المجموع	TSS=1056.53	48	/

نختبر المعنوية الكلية للنموذج وفق الفرضيات التالية:

$$\begin{cases} H_0: \alpha = \beta = 0 \\ H_1: \beta \neq 0 \end{cases}$$

ومنه لدينا إحصائية $F^* = 7.03$ أكبر من إحصائية $F_{1,47}^{0.05} = 4.06$ ومنه نرفض الفرضية الصفرية

وهذا يدل على النموذج المقدر معنوي ككل عند مستوى احتمال 5% (نموذج مقبول وصالح)