Formes bilinéaires et formes quadratiques, orthogonalité
Cours avec des exercices
(Cours d'Algèbre 4, deuxième année LMD Mathématiques)

Hanifa Zekraoui

7 juillet 2018

Table des matières

Préface

Cet ouvrage est le fruit des cours destinés aux étudiants de la deuxième année LMD Mathématiques qui ont déjà fait leur cours en algèbre linéaire de la première année et l'algèbre 3. Il est constitué de l'Algèbre 4 qui traite le sujet de la réduction des formes quadratiques (la diagonalisation des endomorphismes réels auto adjoints, donc la diagonalisation des matrices symétriques) est leurs applications aux quelques aspects mathématiques.

La réduction des formes quadratiques est un outil puissant pour la détermination de plusieurs notions de l'algèbre linéaire comme le rang d'une matrice, la puissance d'une matrice, l'inverse d'une matrice inversible, etc., en plus aux notions de la géométrie comme l'orthogonalité. Comme elle a plusieurs applications dans d'autres aspects mathématiques, comme la géométrie algébrique la théorie des nombre, la topologie et les équations aux dérivées partielles.

Le but de cette partie est d'exposer les notions et les théorèmes qui servent à réduire une forme quadratique à la forme diagonale par les différentes méthodes, en montrant le lien spécifique entre ce cours et le cours d'algèbre 3 qui traite la diagonalisation des endomorphismes et de la présenter aux étudiants de la deuxième année L. M. D. Mathématiques dans un cours plus simple et compréhensible.

La partie est constituée en cinq chapitres, chaque chapitre est terminé par une série des exercices, en plus d'une section pour les examens des années passées et leurs corrigés types afin d'éclairer le contenu et l'enrichir.

Le premier chapitre expose quelques notions et théorèmes nécessaires des formes linéaires et la dualité

Le deuxième chapitre traite les formes bilinéaires en général et les formes bilinéaires symétriques en particulier et leur présentation matricielle dans des différentes bases, les noyaux des formes bilinéaires, décomposition d'une forme bilinéaire au produit des formes linéaires, l'orthogonalité pour une forme bilinéaire. les formes quadratiques associées aux formes bilinéaires symétriques, les notions du rang, noyau et orthogonalité, les vecteurs isotropes, les formes quadratiques définies, non définies, positives, négatives, le produit scalaires et l'espace quadratique.

Le troisième chapitre présente les différentes méthodes de la réduction d'une forme quadratique, la réduction dans une base orthogonale, réduction dans une base orthonormée (méthode de Gram-Schmidt pour l'obtention d'une base orthogonale ou orthonormée selon la base si elle contient des vecteurs isotropes ou non), réduction par la méthode du carré incomplet (méthode de Gauss), méthode des mineurs consécutifs (méthode de Jacobi), réduction dans une base orthonormée des vecteurs propres (qui représente le lien indiqué en haut). Par les méthodes exposées (à l'exception de la méthode de Jacobi qu'on doit parfois manipuler la matrice par des opérations élémentaires pour que la méthode puisse être appliquée), nous avons démontré que toute matrice symétrique réelle est diagonalisable et que tous les coefficients dans la diagonale sont réels (ainsi on en déduit ques les valeurs propres d'une matrice symétrique sont toutes réelles). Ainsi nous avons introduit la notion de la signature et la classification d'une forme quadratique réelle ou complexe (formes quadratiques équivalentes).

Le quatrième chapitre expose quelques notions de l'espace Euclidien et l'espace Hermitien que les étudiants doivent connaitre pour leurs études de géométrie, topologie et la théorie des opérateurs linéaires.

Dans toute la partie, on désigne par E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ de dimension finie n (sauf exception), où $\mathbb{K}$ est le corps des réels ou les complexes.

Table des notations

$\mathbb{N}$ – l'ensemble des entiers naturels
$\mathbb{Z}$ – l'anneau des entiers relatifs
$\mathbb{Z}_n$ – l'anneau des entiers relatifs modulo n
$p\,\mathrm{gcd}\,(x, y)$– le plus grand commun diviseur de x et y
$\mathbb{R}^n$– $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension n
$\mathbb{C}^n$– $\mathbb{C}-$espace vectoriel de dimension n
$\ell\,(E)$– l'espace des endmorphismes d'un espace vectoriel E
$\mathbb{K}\,[X]$– l'space des polynômes sur un corps $\mathbb{K}$ (l'anneau des polynômes sur un corps $\mathbb{K}$)
$\mathbb{K}_n\,[X]$– l'espace vectoriel des polynômes sur un corps $\mathbb{K}$ de degré inférieur ou égal à n
$vect\,(X)$– l'espace vectoriel engenedré par l'ensemble X
$\{e_1, ..., e_n\}$– la base canonique d'un espace vectoriel de dimension n
$\dim E$– dimension d'un espace vectoriel E
$\mathrm{Im}\, f$– Image d'une application linéaire f
$\ker f$–noyau d'une application linéaire f
$M_{m\times n}\,(\mathbb{K})$ ou $M\,(m \times n, \mathbb{K})$–espace vectoriel des matrices $m\times n$ sur un corps $\mathbb{K}$
I_n– matrice unité d'ordre n
$0_{m\times n}$– matrice zéro $m \times n$
O_n– le groupe des matrices orthogonales d'ordre n
U_n – le groupe des matrices unitaires d'ordre n
A^T– transposée de la matrice A
A^*– adjointe de la matrice A (de l'application linéaire A)
$diag(a_{11}, ..., a_{nn})$ – matrice diagonale
$f_{/L}$– la restriction de l'application f au sous-espace L
$P_{L,M}$ – projecteur sur L parallèle à M
$J_{\lambda,k}$ ou $J_k\,(\lambda)$– Le bloc de Jordan d'ordre k correspondant à la valeur propre λ
$\det A$– déterminant d'une matrice carrée A
$tr\,(A)$– trace d'une matrice carrée A
$\oplus$– somme directe
$\langle ., . \rangle$– produit scalaire
$\overline{1, n}$ – l'ensemble des indices $\{1, 2, ..., n\}$

Chapitre 1

Les formes linéaires, dualité

Itroduction

Rappelons que l'ensemble des applications linéaires d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F sur le même corps $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ noté $\ell(E, F)$. Il est de dimension $\dim E \times \dim F$ et isomorphe à l'espace des matrices $M_{\dim F \times \dim E}(\mathbb{K})$. Les formes linéaires sont des types particuliers des applications linéaires. Ils portent parfois également le nom de covecteur, comme ils ont une grande importance dans la décomposition des formes quadratiques en sommes des carrées, en d'autre terme la présentation par la forme diagonale.

Définition 1 *Une forme linéaire est une application linéaire de l'espace vectoriel E dans le corps $\mathbb{K}$ (vu comme espace vectoriel sur lui-même), son noyau s'appelle un hyperplan .*

Du théorème des dimensions et la définition précédente, on résulte qu'une forme linéaire est soit nulle soit surjective. Dans le deuxième cas, son noyau est supplémentaire d'une droite vectorielle.

Exemple 2 *La trace est une forme linéaire sur l'espace des matrices carrées d'ordre n. On en déduit que le sous espace des matrices de trace nulle est un hyperplan, d'où la dimension est égale à $n^2 - 1$. Ainsi son supplémentaire est un sous espace des matrices scalaires.*

Définition 3 *L'espace des formes linéaires $\ell(E, \mathbb{K})$ s'appelle l'espace dual de E, noté E^*.*

Représentation matricielle

Soit $\{v_1, \cdots, v_n\}$ une base de E, et $\varphi \in E^*$. Alors la matrice représentant φ dans cette base est une matrice ligne $1 \times n$ à coefficients $\varphi(v_i) \in \mathbb{K}$. En effet, soit

$$x = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n \Rightarrow \varphi(x) = x_1 \varphi(v_1) + \cdots + x_n \varphi(v_n)$$

ce qui donne

$$\varphi(x) = \begin{matrix} \varphi(v_1) & \cdots & \varphi(v_n) \end{matrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

d'où nous pouvons conclure que toute matrice de rang 1 peut être identifie à une forme linéaire.

Bases duale et antéduale

De la définition 3 et la répresentation matricielle, il est claire que E et E^* sont isomorphes car ils ont la même dimension. Si $\{v_1, \cdots, v_n\}$ une base de E, alors il existe $\{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\}$ une base de E^*.

Théorème 4 *Pour toute base $\{v_1, \cdots, v_n\}$ de E, il existe l'unique base $\{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\}$ de E^* satisfaisant la condition : $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}$ s'appelle la base duale de la base $\{v_1, \cdots, v_n\}$, souvent notée $\{v_1^*, \cdots, v_n^*\}$.*

Preuve. Une forme linéaire est entièrement déterminée par l'image de chaque vecteur de la base $\{v_1, \cdots, v_n\}$ de E. Ainsi pour chaque i fixé, les n équations $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}$, $j = \overline{1, n}$ définissent de façon unique la forme φ_i.

Maintenant montrons que $\{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\}$ est une base de E^*. Comme E^* a la même dimension que E, il suffit de montrer que les n formes sont libres.

Soit

$$\alpha_1 \varphi_1 + \cdots + \alpha_n \varphi_n = 0,$$

alors, pour tout $j = \overline{1, n}$, on a

$$\begin{aligned} 0 &= (\alpha_1 \varphi_1 + \cdots + \alpha_n \varphi_n)(v_j) \\ &= \alpha_1 \varphi_1(v_j) + \cdots + \alpha_j \varphi_j(v_j) + \cdots + \alpha_n \varphi_n(v_j) \\ &= \alpha_1 \cdot 0 + \cdots + \alpha_j \cdot 1 + \cdots + \alpha_n \cdot 0 = \alpha_j \end{aligned}$$

(En d'autre manière, de l'isomorphisme entre E et E^*, à chaque v_i de la base de E on correspond l'unique φ_i de la base de E^*). ■

De ce qui précède, pour $x = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n \in E$, on a $v_i^*(x) = x_i$, ce qui donne

$$x = v_1^*(x)\, v_1 + \cdots + v_n^*(x)\, v_n$$

Pour $\varphi = \alpha_1 v_1^* + \cdots + \alpha_n v_n^* \in E^*$, alors d'une part,

$$\varphi(x) = \alpha_1 v_1^*(x) + \cdots + \alpha_n v_n^*(x).$$

D'autre part,

$$\varphi(x) = v_1^*(x)\,\varphi(v_1) + \cdots + v_n^*(x)\,\varphi(v_n)$$

De l'unicité de l'écriture, on résulte que,

$$\alpha_i = \varphi(v_i)\,,\ i = \overline{1,n}.$$

Ainsi on a le corollaire suivant :

Corollaire 5 *Les coordonnées d'un vecteur $x \in E$ et son dual $x^* \in E^*$ dans la base de E et la base duale sont*

$$x = \begin{pmatrix} v_1^*(x) \\ \vdots \\ v_n^*(x) \end{pmatrix},\ \varphi = \begin{pmatrix} \varphi(v_1) \\ \vdots \\ \varphi(v_n) \end{pmatrix}$$

Exemple 6 *La base canonique de l'espace des matrices d'ordre 2 à trace nulle est* $\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. *Ainsi la base duale est* $\{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ *telle que* $e_i^* \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & -a_{11} \end{pmatrix} = a_{1i}$, $i = 1, 2, 3$. *D'où on peut présenter une matrice à trace nulle A par ses formes coordonnées dans la base canonique sous forme d'un vecteur colonne à 3 coordonnées*

$$A = \begin{pmatrix} e_1^*(A) \\ e_2^*(A) \\ e_3^*(A) \end{pmatrix}$$

Comme on peut représenter une forme linéaire φ sur l'espace des matrices à trace nulle dans la base duale par un vecteur ligne de 3 coordonnées

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi(e_1) & \varphi(e_2) & \varphi(e_3) \end{pmatrix}$$

Par exemple, si $\varphi = trace$, alors, $\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est la forme nulle sur l'espace des matrices à trace nulle. C'est la restriction de la trace sur l'espace des matrices carrées à son noyau.

Exemple 7 *Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$, alors ses colonnes forment une base de $\mathbb{K}^n$. La base duale est donnée par les lignes de son inverse.*

En effet, soit $A = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_i & \cdots & C_n \end{pmatrix}$ *et* $A^{-1} = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$.

De l'égalité $A^{-1}A = I_n$, on en déduit que $L_i(C_j) = \delta_{ij}$. i.e. $L_i = C_i^*$, $i = \overline{1,n}$. Ainsi que les C_i forment une base antéduale de la base des L_i. Donc pour trouver la base antéduale de la base duale, on construit une matrice lignes de la base duale donnée. Ensuite on calcule son inverse. Les colonnes de l'inverse forment la base antéduale.

L'orthogonalité pour la dualité

Soit F et F^* des sous espaces vectoriels de E et E^* respectivement. Nous laissons aux étudiants de vérifier que les ensembles

$$\begin{aligned} F^{\perp} &= \{\varphi \in E^*, \forall v \in F, \varphi(v) = 0\} \\ (F^*)^{\perp} &= \{v \in E, \forall \varphi \in F^*, \varphi(v) = 0\} \end{aligned}$$

sont des sous espaces vectoriel de E^* et E respectivement.

Définition 8 *Soit F et F^* des sous espaces vectoriels de E et E^* respectivement. l'espace $F^{\perp}$ (resp $(F^*)^{\perp}$) s'appelle l'orthogonal de F (resp F^*) pour la dualité.*

Le sous-espace de $\mathbb{K}^n$ des solutions d'un système linéaire homogène est l'orthogonal des formes linéaires définissant ce système, par exemple, étant donné le système

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ \quad x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Alors $(F^*)^{\perp} = \{(3x, x, 5x, -5x), x \in \mathbb{R}\}$ est l'orthogonal de $F^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ où les φ_i sont les lignes de la matrice du système. Remarquons que $\dim F^* + \dim (F^*)^{\perp} = \dim E = 4$. Ainsi on peut citer le théorème suivant :

Théorème 9 *Soit F un sous espace vectoriel de E. Alors*

$$\dim F + \dim F^{\perp} = \dim E.$$

(la même propriété est vraie en échangeant les rôles de E et de E^*.

En effet, le théorème est un résultat immédiat des solutions d'un système linéaire de p équations à n inconnues. L'espace des solutions est de dimension égale à $n - p$.

Séries des exercices

Exercice 10 *(Interpolation de Lagrange) Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré $\leq n$. Soient $a_0, \ldots, a_{n+1}$ nombres réels distincts.*

1. *Montrer que l'ensemble des polynômes $\{L_0, ..., L_n\}$ où*

$$L_i = \prod_{j \neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j},\ i = 0, \ldots, n$$

   est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. *Montrer que les formes linéaires $P \mapsto P(a_i)$ pour $i = 0, \ldots, n$ forment une base de $(\mathbb{R}_n[X])^*$, duale de la base $\{L_0, ..., L_n\}$.*

Exercice 11 *Soient $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts et $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ les formes linéaires sur $E = \mathbb{R}_n[X]$ déterminées par $\varphi_i(P) = P(a_i)$. Montrer que la famille $\{\varphi_0, ..., \varphi_n\}$ est une base du dual de E et déterminer sa base antéduale.*

1. *Déduire le même résultat pour $\varphi_i(P) = P(i)$ pour $i = \overline{0, n}$.*

2. *Même question pour les φ_i définies par*

$$\varphi_i(P) = \int_0^1 x^i P(x)\, dx$$

   et donner la base antéduale pour $n = 2$.

3. *Meme question pour $n = 2$ et les φ_i définies par*

$$\varphi_0(P) = P(1),\ \varphi_1(P) = P'(1),\ \varphi_2(P) = \int_0^1 P(x)\, dx$$

Chapitre 2

Les formes bilinéaires et les formes quadratiques

Introduction

La notion de forme bilinéaire est définie sur les espaces vectoriels, se sont des cas particuliers des applications bilinéaires sur un produit cartésien de deux espaces vectoriels dans un espace vectoriel (où tous les espaces intervenus sont définis sur le même corps). Ces formes sont intimement liées aux applications linéaires. Le savoir associé à ces dernières permet d'éclairer la structure d'une forme bilinéaire. Certaines formes bilinéaires sont de plus des produits scalaires. Les produits scalaires (sur les espaces vectoriels de dimension finie ou infinie) sont très utilisés, dans toutes les branches mathématiques, pour définir une distance.

La physique classique, relativiste ou quantique utilise ce cadre formel. La géométrie utilise le produit scalaire pour définir la distance, l'orthogonalité, l'angle, ...La théorie des nombre utilise les formes quadratiques pour démontrer ou résoudre certaines problèmes purement algébriques. Parfois, reliant les branches mathématiques, comme la théorie des nombres et la géométrie algébrique, comme la recherche des solutions d'une équation diophantienne. Certaines d'entre elles s'écrivent comme la recherche des racines d'une équation polynomiale à plusieurs variables et à coefficients entiers. Les solutions recherchées sont celles qui s'expriment uniquement avec des nombres entiers. Un exemple célèbre et difficile est le grand théorème de Fermat. L'équation s'écrit $x^n + y^n = z^n$ (pour $n = 2$, les solutions sont les triplets pythagoriciens, qu'on appelle le théorème des deux carrés de Fermat). Les solutions peuvent être vues comme des points d'intersection entre $\mathbb{Z}^3$ et une surface d'un espace géométrique de dimension trois. Pour être compatible avec le programme ministériel, nous nous limitons aux formes bilinéaires sur un espace vectoriel de dimension finie (c. à. d. le produit cartésien d'un espace vectoriel dans lui-même), en particulier, les formes quadratiques prises sont celles des formes bilinéaires symétriques.

Les formes bilinéaires

Définition 12 *Une forme bilinéaire φ est une application*

$$\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$$

satisfaisant les conditions suivantes :

1. $\forall x,\ y,\ x',\ y' \in E$,

$$\begin{aligned} \varphi(x + x', y) &= \varphi(x, y) + \varphi(x', y) \\ &\textit{et} \\ \varphi(x, y + y') &= \varphi(x, y) + \varphi(x, y'). \end{aligned}$$

2. $\forall x,\ y \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$,

$$\varphi(\lambda x, y) = \lambda \varphi(x, y) = \varphi(x, \lambda y).$$

Si de plus $\forall x,\ y \in E,\ \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$, on dit que la forme est symétrique. La forme bilinéaire est dite alternée (anti-symétriques), si

$$\forall x,\ y \in E,\ \varphi(x, y) = -\varphi(y, x),$$

Remarquer que la symétrie permet de ne vérifier la linéarité que d'un seul côté..

Exemple 13 *Déterminer les formes bilinéaires et les formes bilinéaires symétriques parmi les applications suivantes :*

1. $\varphi : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\ \varphi(x, y) = xy.$
2. $\varphi : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\ \varphi(x, y) = x + y.$
3. $\varphi : \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K},\ \forall x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2) \in \mathbb{K}^2,$

$$\varphi(x, y) = x_1 y_2 + x_2 y_2.$$

4. $\varphi : \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}$, $\forall x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{K}^2$,

$$\varphi(x, y) = x_1 y_2 + x_2 y_1.$$

5. $\varphi : \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}$, $\forall x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{K}^2$,

$$\varphi(x, y) = x_1 + y_2 + x_2 y_2.$$

Réponse : Appliquons la définition précédente, nous avons la première et la quatrième sont des formes bilinéaires symétriques tandis que la troisième est une forme bilinéaire non symétrique, par contre, la deuxième et la cinquième ne sont pas bilinéaires.

D'après l'exemple précédant, nous pouvons nous interroger s'il existe un moyen plus facile pour connaitre les formes bilinéaires à partir de son apparence ? La réponse st affirmative. Dans ce qui suit nous allons chercher une expression algébrique pour une forme bilinéaire, ainsi, il suffit de comparer une forme donnée avec cette expression dans la même base.

L'expression algébrique d'une forme bilinéaire et la matrice associée

Soit φ une forme bilinéaire sur un espace vectoriel E muni d'une base $\{v_1, \cdots, v_n\}$. Alors, pour i, $j = \overline{1, n}$, nous avons $\varphi(v_i, v_j) \in \mathbb{K}$. Ainsi il existe une matrice $(\varphi(v_i, v_j))_{n \times n} \in M(n, \mathbb{K})$ s'appelle la matrice associée à φ dans la base indiquée. D'autre part, $\forall x$, $y \in E$, $\exists x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{K}$, tels que

$$x = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n,\ y = y_1 v_1 + \cdots + y_n v_n$$

Appliquons la linéarité plusieurs fois aux deux côtés, nous obtenons la double somme suivante

$$\varphi(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} \varphi(v_i, v_j)\, x_i y_j \tag{2.1}$$

L'expression 2.1 s'appelle l'expression algébrique de φ, ou plus souvent dite expression en coordonnées. Ainsi les termes de la somme dont on définit φ ne contiennent que des produits mixtes $x_i y_j$ avec des coefficients dans $\mathbb{K}$. Comme on peut ecrire l'expression 2.1 sous forme matricielle :

$$\varphi(x, y) = x^{\top} A y, \text{ où } A = (\varphi(v_i, v_j))_{n \times n}.$$

La matrice $A = (\varphi(v_i, v_j))_{n \times n}$ s'appelle la matrice de *Gram.*

Posons $\varphi(v_i, v_j) = a_{ij}$ pour $i,\ j = \overline{1,n}$. Si on change la base de E à la base $\{u_1, \cdots, u_n\}$, alors pour tous $k,\ l = \overline{1,n}$, on obtient

$$u_k = p_{1k}v_1 + \cdots + p_{nk}v_n,\ u_l = p_{1l}v_1 + \cdots + p_{nl}v_n$$

Par suite, de la même manière précédente, nous obtenons

$$\varphi(u_k, u_l) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}p_{ik}p_{jl} = \sum_{i,j=1}^{n} p'_{ki}a_{ij}p_{jl},\ \text{où } p'_{ki} = p_{ik}$$

Ainsi, la matrice $B = (\varphi(u_k, u_l))_{n\times n}$ associée à φ dans la nouvelle base est donnée par

$$B = P^T AP.$$

Exemple 14 *Donner la matrice associée à la forme bilinéaire φ définie sur $\mathbb{R}^3$ par $\varphi(x, y) = x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_3$.*

Soit $\{v_1 = (1, 1, -1), v_2 = (1, -1, 0), v_3 = (0, 1, 1)\}$ une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer la matrice associée à φ dans cette base par deux méthodes différentes.

Réponse :

1. *Méthode directe : On pose $b_{ij} = \varphi(v_i, v_j)$ pour $i,\ j = 1, 2, 3$. Ainsi on obtient*

$$\begin{aligned} b_{11} &= \varphi(v_1, v_1) = 1\times 1 + 1\times(-1) + (-1)\times\times(-1) = 1 \\ b_{12} &= \varphi(v_1, v_2) = 1\times(-1) + 1\times 0 + (-1)\times 0 = -1 \\ b_{13} &= \varphi(v_1, v_2) = 1\times 1 + 1\times 1 + (-1)\times 1 = 1 \end{aligned}$$

De la même manière nous obtenons les restes des lignes de la matrice. D'où $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2. *Méthode indirecte ; utilisons la matrice A associée à φ dans la base canonique et la matrice P de passage à la nouvelle base.*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où,

$$\begin{aligned} P^T AP &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = B \end{aligned}$$

Si la forme bilinéaire donnée est symétrique, alors la matrice associée est symétrique dans n'importe quelle base, car pour une base $\{v_1, \cdots, v_n\}$ de E, on a

$$b_{ij} = \varphi(v_i, v_j) = \varphi(v_j, v_i) = b_{ji}$$

ce qui permet de calculer la moitie des coefficients seulement.

Les matrices congruantes

Définition 15 *Les matrices qui représentent la même forme bilinéaire dans différentes bases sont dites congruentes.*

Nous laissons aux étudiants de vérifier la proposition suivante :

Proposition 16 *La relation "congruente à" dans l'ensemble des matrices carrées est une relation d'équivalence.*

Les classes d'équivalence des matrices symétriques sont données par la classification des formes quadratiques dans le chapitre prochain.

Les forme bilinéaire et dualité

Soit $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme bilinéaire. Pour tout $y \in E$, l'application

$$\begin{array}{rcl} \varphi(\cdot, y) & : & E \longrightarrow \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \varphi(x, y) \end{array}$$

est une forme linéaire sur $\mathbb{K}$, c'est à dire un élément du dual E^*. Par conséquent, Pour tout $y \in E$, on peut définir une application linéaire à droite d_φ

$$\begin{array}{rcl} d_\varphi & : & E \longrightarrow E^* \\ y & \mapsto & d_\varphi(y) = \varphi(\cdot, y) \end{array}$$

La linéarité de d_φ découle directement de la linéarité de φ. De la même manière on définit l'application linéaire à gauche. $g_\varphi(x) = \varphi(x, \cdot)$.

Définition 17 *Les noyaux des applications d_φ et g_φ définies en haut s'appellent noyau à droite et noyau à gauche respectivement. Si la forme bilinéaire φ est symétrique, alors l'application à droite et à gauche sont les mêmes et nous les notons par Φ_φ, ainsi le noyau à droite et le noyau à gauche sont les même et égaux à $\ker \Phi_\varphi$.*

Remarque 18 *De ce qui précède, pour une forme bilinéaire quelconque, les noyaux à gauche et à droite sont donnés par*

$$\begin{aligned}\ker g_\varphi &= \{x \in E, \forall y \in E, \varphi(x,y) = 0\},\\ \ker d_\varphi &= \{y \in E, \forall x \in E, \varphi(x,y) = 0\}.\end{aligned}$$

Soit $A = (a_{ij})_{n\times n}$ *la matrice associée à* φ *et* x_1, ...,x_n, y_1, ..., y_n *désignent les coordonnées de* x *et* y *dans une base donnée. Alors de l'expression algébrique de* φ, *on a* $\forall y \in E$,

$$\varphi(x,y) = (a_{11}x_1 + \cdots a_{n1}x_n)\, y_1 + \cdots (a_{1n}x_1 + \cdots a_{nn}x_n)\, y_n = 0$$

est équivalente à

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + \cdots a_{n1}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{1n}x_1 + \cdots a_{nn}x_n = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow A^T x = 0 \Leftrightarrow x \in \ker A^T$$

Ainsi, cherchons le noyau à gauche revient de chercher le noyau de la transposée de la matrice associée à φ. *Procédons de la même façon, nous avons le noyau à droite est le noyau de la matrice associée.*

Dans ce qui suit nous nous limitons aux formes bilinéaires symétriques.

Le rang d'une forme bilinéaire symétrique, forme non dégénérée

Définition 19 *Si le noyau de la forme bilinéaire* φ *est réduit à* $\{0\}$, *la forme est dite non dégénérée. Le rang de la forme bilinéaire* φ *est le rang de l'application* d_φ *(qui est égale aussi à* g_φ*), c'est donc le rang de la matrice associe à* φ *dans une base de* E.

Comme E est de dimension finie, ainsi les formes bilinéaires non dégénérées sont celles correspondantes aux matrices inversibles, ce qui est équivalent à d_φ est bijective, c.-à-d. pour toute forme linéaire $f \in E^*$, il existe un unique $y \in E$, $d_\varphi(y) = f$, tel que $\forall x \in E$, $f(x) = \varphi(x,y)$.

L'orthogonalité pour une forme bilinéaire symétrique

Définition 20 *Soient* F *un sous espace vectoriel de* E *et* φ *une forme bilinéaire symétrique sur* E. *L'orthogonal de* F *pour* φ *est l'ensemble*

$$F^\perp = \{x \in E, \forall y \in F, \varphi(x,y) = 0\}$$

Nous laissons aux étudiants de vérifier les propriéés suivantes :

Proposition 21 *Soient F un sous espace vectoriel de E et φ une forme bilinéare sur E.*

i) *$F^{\perp}$ est un sous espace vectoriel de E*

ii) *$E^{\perp} = \ker \varphi \subset F^{\perp}$.*

iii) *$F \subseteq \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$. On a l'égalité si φ est non dégénérée.*

Théorème 22 *Soient F un sous espace vectoriel de E et φ une forme bilinéaire symétrique sur E. Alors,*

$$\dim F^{\perp} = n - \dim F + \dim \left(F \cap \ker \varphi\right).$$

Preuve. Prenons l'application Φ_φ de E dans E^* définie dans le paragraphe "Forme bilinéaire et dualité". Comme F est un sous espace vectoriel de E, alors $G = \Phi_\varphi(F)$ est un sous espace vectoriel de E^*. D'où,

$$\forall f \in G, \exists y \in F, \; f = \Phi_\varphi(y)$$

Prenons maintenant l'orthogonal de G pour Φ_φ, nous obtenons

$$\begin{aligned} G^{\perp} &= \{x \in E, \forall f \in G, f(x) = 0\} \\ &= \{x \in E, \forall y \in F, (\Phi_\varphi(y))(x) = 0\} \\ &= \{x \in E, \forall y \in F, \varphi(x, y) = 0\} = F^{\perp} \end{aligned}$$

Ainsi d'après le théorème 9, Chap. 6., nous avons

$$\dim E = \dim E^* = \dim G + \dim G^{\perp} = \dim \Phi_\varphi(F) + \dim F^{\perp} \tag{2.2}$$

D'autre part, prenons $\Phi_{\varphi/F}$ la restriction de Φ_φ à F et appliquons le théorème des dimensions, nous avons

$$\dim F = \dim \Phi_{\varphi/F}(F) + \dim \ker \Phi_{\varphi/F} \tag{2.3}$$

Or

$$\begin{aligned} \Phi_{\varphi/F}(F) &= \Phi_\varphi(F) = G \\ \ker \Phi_{\varphi/F} &= \left\{x \in F, \Phi_{\varphi/F}(x) = 0\right\} \\ &= \{x \in F, \forall y \in E, \varphi(x, y) = 0\} = F \cap \ker \varphi \end{aligned}$$

Ainsi l'égalité devient

$$\dim F = \dim G + \dim \left(F \cap \ker \varphi\right) \tag{2.4}$$

Des égalités (2.2), (2.3), (2.4), nous avons

$$\dim E = \dim F - \dim \left(F \cap \ker \varphi\right) + \dim F^{\perp}$$

■

Corollaire 23 *Si φ est non dégénérée, alors* $\dim F^{\perp} = n - \dim F$.

Les formes quadratiques

Définition 24 *Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$ et φ une forme bilinéaire symétrique sur E. On appelle forme quadratique q sur E l'application $q : E \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par*

$$\forall x \in E,\ q(x) = \varphi(x, x)$$

La forme est dite réelle ou complexe selon $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. La matrice associée à φ s'appelle la matrice de q. Le rang et le noyau de q sont le rang et le noyau de cette matrice. La forme quadratique est dite non dégénérée si φ est non dégénérée (i.e. la matrice est inversible)

Une autre définition équivalente de la forme quadratique

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, muni d'une base $\{v_1, \cdots, v_n\}$, φ une forme bilinéaire symétrique sur E et $A = (\varphi(v_i, v_j))_{n\times n}$ la matrice associée à φ dans cette base. De la définition 24 et de l'expression algébrique de φ nous avons

$$q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} \varphi(v_i, v_j)\, x_i x_j$$

où $x = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$. Ainsi nous avons la définition équivalente suivante :

Définition 25 *On appelle forme quadratique q sur E tout polynôme sur $\mathbb{K}$ homogène* [1] *de degré deux en les coordonnées de x.*

En général, pour $n = 2$, 3, ou 4 on note par (x, y), (x, y, z) ou (x, y, z, t) pour un vecteur X dans la base canonique de E.

La forme polaire d'une forme quadratique

À l'aide de la définition de la forme bilinéaire symétrique, il est facile de montrer le lemme suivant :

Lemme 26 *Soit q une forme quadratique sur E. L'application $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$, définie par*

$$\forall x,\ y \in E,\ \varphi(x, y) = \frac{1}{2}\left(q(x + y) - q(x) - q(y)\right)$$

[1] Un polynôme homogène, ou forme algébrique, est un polynôme en plusieurs indéterminées dont tous les monômes non nuls sont de même degré total. Par exemple le polynôme $x^4 - 2x^3 y + x^2 y^2$ est homogène de degré 4

est une forme bélinéaire symétrique. Par définition, φ s'appelle la forme polaire de q.

Remarque 27 *La forme polaire peut -être aussi donnée par*

$$\forall x,\ y \in E,\ \varphi(x,y) = \frac{1}{4}\left(q(x+y) - q(x-y)\right)$$

La règle du parallélogramme

Il est facile de vérifier l'identité

$$\forall x, y \in E, q(x+y) + q(x-y) = 2q(x) + 2q(y).$$

L'identité s'appelle la règle de parallélogramme. Cette identité est très importante pour les espaces normés ; elle a ses applications dans l'analyse fonctionnelle et la topologie[2]

Quelques remarques importantes

Nous laissons aux étudiants de vérifier les propriétés (non prouvées) suivantes :

- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall X \in E,\ q(\lambda X) = \lambda^2 q(X)$.
- Pour toute forme bilinéaire φ il existe une forme quadratique q associée à la forme bilinéaire symétrique φ_q définie par

$$\forall x,\ y \in E,\ \varphi_q(x,y) = \frac{\varphi(x,y) + \varphi(y,x)}{2} \tag{2.5}$$

- Une forme bilinéaire φ est alternée si et seulement si la forme quadratique q de φ_q est nulle.
  En effet,

$$\begin{aligned} \varphi \text{ est alternée } &\Leftrightarrow \forall x, y \in E, \varphi(x,y) = -\varphi(y,x) \\ &\Leftrightarrow \varphi(x,y) + \varphi(y,x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \varphi_q = 0 \Rightarrow \forall x \in E, q(x) = \varphi_q(x,x) = 0 \end{aligned}$$

  Inversement, supposons que $\forall x \in E,\ q(x) = 0$, alors

$$\begin{aligned} \forall x, y &\in E, 0 = q(x+y) = \varphi_q(x+y, x+y) \\ &= \varphi_q(x,y) + \varphi_q(y,x) = 2\varphi_q(x,y) \\ &= \varphi(x,y) + \varphi(y,x) \Rightarrow \varphi(x,y) = -\varphi(y,x). \end{aligned}$$

[2]

Théorème 28 *(Théorme de Jordan-von Neumann) Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace normé généralisé. Alors il existe un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \longrightarrow \mathbb{C}$, tel que $\sqrt{\langle x, x\rangle} = \|x\|$ si et seulement si $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$, $\forall x,y \in X$.*

- L'ensemble $Q(E)$ des formes quadratiques sur E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On associe à toute frome bilinéaire φ la forme quadratique q de φ_q définie dans la relation 2.5, il existe une application linéaire $\varphi \mapsto q$ de l'espace vectoriel $B(E \times E)$ des formes bilinéaires dans l'espace vectoriel $Q(E)$ de noyau égal au sous espace des fromes bilinéaires alternées. Le lemme 26 assure la surjectivité de cette application,.Ainsi, d'après le premier théorème des isomorphismes $Q(E)$ s'identifie au sous espace des formes bilinéaires symétriques, ce qui donne enfin la décomposition en somme directe

  $$B(E \times E) = B(E \times E)_{sym} \oplus B(E \times E)_{alt}$$

  où, $B(E \times E)_{sym}$et $B(E \times E)_{alt}$ désignent respectivement les sous espaces des formes bilinéaires symétriques et des formes bilinéaires alternées.
- La représentation de q par l'expression algébrique est équivalente à la représentation matricielle

  $$q(x) = x^T A x$$

  où $A = (\varphi(v_i, v_j))_{n \times n}$ la matrice associée à q. Si on change la base on obtient une nouvelle représentation $q(x) = x^T B x$, mais toujours on a $B = P^T A P$, où P est la matrice de passage à la nouvelle base.
- Si f et g deux formes linéaires sur E, alors

  $$\forall x \in E,\ q(x) = f(x) g(x)$$

  est une forme quadratique sur E. En effet, une forme linéaire est une somme des monômes de degré 1 en les coordonnées de x. Ainsi $f(x) g(x)$ est égale à la somme des monômes de degré 2 en les coordonnées de x.
  Question : Peut-on toujours décomposer une forme quadratique en produit de deux formes linéaires ? la réponse est négative, il suffit de prendre la forme q définie sur $\mathbb{R}^2$ par

  $$q(X) = x^2 + y^2$$

En général, sur un corps $\mathbb{K}$, toute forme quadratique sous la forme $q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2$ où un coefficient n'admet pas une racine carrée dans $\mathbb{K}$ ne peut pas être factorisée sur $\mathbb{K}$. Donc quelles sont les conditions pour qu'une forme quadratique puisse se factorisée sur un corps.

Soit φ une forme bilinéaire symétrique et f et g deux formes linéaires telles que

$$\varphi(x, y) = f(x) g(y)$$

Comme la forme est symétrique on a aussi

$$\varphi(x,y) = g(y)\, f(x)\,.$$

Ainsi φ, f et g ont le même noyau. Si ce noyau est l'espace entier, alors la forme est nulle et rien à démontrer. Supposons que la forme est non nulle, dans ce cas, le noyau est un hyperplan (Voir la définition 1, Chapitre 6), ce qui fait les équations qui représentent l'hyperplan sont équivalentes. Ainsi les formes f et g sont proportionnelles. Ainsi nous avons la proposition suivante

Proposition 29 *Une forme quadratique q peut être décomposée en produit de deux formes linéaires si, et seulement si, les deux formes sont proportionnelles. Ainsi $q(x) = \alpha(l(x))^2$ où $\alpha \in \mathbb{K}$, $l \in E^*$ et $\ker q = \ker l$.*

Exemples de quelques formes quadratiques

Les exemples suivants sont des formes quadratiques réelles. Nous donnons juste quelques Indications en laissant la vérification pour les étudiants dans la séance des travaux dirigés.

1. $q : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$, définie par
$$q(A) = trace\left(A^T A\right)$$
est une forme quadratique sur $M_n(\mathbb{K})$. En effet, essayons de trouver l'expression algébrique de Q dans la base canonique de $M_n(\mathbb{K})$.
2. $q : M_2(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$, définie par
$$q(A) = \det A$$
est une forme quadratique. En effet, montrons que c'est un polynôme homogène de degré 2 en les coefficients de A.

Vecteurs isotropes pour une forme quadratique

Définition 30 *On appelle vecteur isotrope pour une forme quadratique q tout vecteur non nul x satisfaisant $q(x) = 0$. L'ensemble des vecteurs isotropes s'appelle le cône isotrope.*

Remarque 31

1. *L'ensemble des vecteurs isotropes n'est pas forcement un espace vectoriel, en général c'est la réunion des sous espaces vectoriels, comme il contient le noyau de q. Voir les exercices, 45, 48, 49, à la fin du chapitre où l'ensemble parfois est un sous espace vectoriel et l'autrefois est juste la réunion des sous espaces vectoriels.*
2. *Attention!! le noyau peut-être trivial, mais il éxiste des vecteurs isotropes*

L'orthogonalité pour une forme quadratique

Définition 32 *L'orthogonalité pour une forme quadratique c'est l'orthogonalité pour sa forme polaire.*

Ainsi, les résultats mentionnés dans le paragraphe en relation pour les formes bilinéaires symétriques sont les mêmes pour ce paragraphe. Voir les exercices, 45, 48, 49. Notons que les exercices mentionnés deviennent plus faciles à résoudre après la lecture du chapitre prochain, mais les étudiants peuvent quand même les résoudre en utilisant les outils élémentaires de la factorisation d'un polynôme de degré 2 en facteurs.

Forme quadratique définie (positive, négative), non définie, produit scalaire

Définition 33 *Soit q une forme quadratique sur E.*

i) *q est dite définie sur E si pour tout $x \in E$, $q(x) = 0 \Rightarrow x = 0$. Le cas contarire, la forme est dite non définie.*

ii) *q est dite définie positive (positive) sur E si pour tout $x \in E$, $q(x) > 0$ $(q(x) \geq 0)$.*

iii) *q est dite édfinie négative (négative) sur E si pour tout $x \in E$, $q(x) < 0$ $(q(x) \leq 0)$.*

iv) *La forme polaire soit définie positive, négative, non définie etc, selon sa forme quadratique. En particulier, si la forme polaire est définie positive, alors elle s'appelle produit scalaire.*

Remarque 34 1. *Il existe des vecteurs isotropes pour $q \Leftrightarrow q$ est non définie.*

2. *Le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^n$ c'est la forme bilinéaire symétrique φ écrite dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, définie par la matrice I_n, ce qui donne*

$$\forall x = (x_1, ..., x_n), \, y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n, \, \varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

noté souvent $\langle x; y \rangle$.

Espace quadratique

Définition 35 *On appelle espace quadratique un espace vectoriel E muni d'une forme quadratique q, noté souvent (E, q). L'espace prend de noms particuliers selon les propriétés supplémentaires de la forme quadratique. L'espace quadratique est dit Euclidien ou Hermitien s'il muni d'un produit scalaire.*

Dans le chapitre qui vient nous allons voir que tout produit scalaire est équivalent (congruent) au produit scalaire standard, c'est pour cela, on note pour l'espace d'un produit scalaire par $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Série des exercices

Exercice 36 *Soit φ la forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^3$ de matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

1. *Quel est le noyau et le rang de φ ?*
2. *Trouvez une base de l'orthogonal pour φ de*

$$\begin{array}{rcl} F & = & vect\left\{v_1 = (1,0,1), v_2 = (0,1,-1)\right\}, \\ G & = & vect\left\{u_1 = (1,0,1), v_2 = (1,0,0)\right\}, \\ W & = & vect\left\{w_1 = (0,1,0), v_2 = (1,0,1)\right\}, \end{array}$$

et comparer avec les résultats du cours sur la dimension de l'orthogonal.

Exercice 37 *Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré 2 à coeffcients réels.*

1. *Calculer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ de la forme bilinéaire symétrique définie par*

$$\varphi(f,g) = \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt$$

2. *Quel est son noyau ?*
3. *Mêmes questions pour la forme bilinéaire symétrique*

$$\varphi(f,g) = f(0)\, g(0) + f(1)\, g(1).$$

Exercice 38 *Soit $M_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices d'ordre n.*

1. *Montrez que l'application φ définie sur $M_n(\mathbb{R})$ par*

$$\varphi(AB) = trace(AB)$$

est une forme bilinéaire symétrique.

2. *On note $S_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ le sous espace des matrices symétriques. Montrez que la restriction de φ à $S_n(\mathbb{R}) \times S_n(\mathbb{R})$ est définie positive.*
3. *Quel est l'orthogonal de $S_n(\mathbb{R})$ pour φ ?*

Exercice 39 *Déterminer les formes quadratiques des formes bilinéaires symétriques dans les exercices précédents.*

Exercice 40 *Soit q une forme quadratique sur E, que l'on suppose définie.*

1. *Montrer que q est soit définie négative, soit définie positive (Indication : On suppose qu'il existe deux vecteurs x et y tels que $q(x) > 0$ et $q(y) < 0$ et on pose $f(t) = q(x + yt)$ ensuite on étudie les signes de $f(t)$).*
2. *Maintenant on l'on suppose non dégénérée mais non définie. Montrer que q n'a pas de signe constant (Indication : Utiliser l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ [3]*

Exercice 42 *On note Tr pour la trace. Soit q_1 et q_2 définies sur $M_n(\mathbb{R})$ par $q_1(A) = (Tr(A))^2$ et $q_2(A) = Tr\left(A^T A\right)$. Montrer que q_1 et q_2 sont des formes quadratiques. Sont-elles positives ? définies positives ?*

Exercice 43 *Soient $E = \ell(\mathbb{R}^2)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et q définie sur E par*

$$\forall u \in E,\, q(u) = \lambda Tr\left(u^2\right) + \mu \det u$$

1. *Vérifier que q est une forme quadratique sur E.*
2. *Déterminer en fonction de λ et μ le rang de q.*
3. *Déterminer en fonction de λ et μ les vecteurs isotropes de q.*

Exercice 44 *Soient $f_1,\ f_2,\dots,\ f_n$ n fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour $i,j = \overline{1,n}$, on pose*

$$a_{i,j} = \int_0^1 f_i(t)\, f_j(t)\, dt,\ \forall X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ q(X) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

1. *Montrer que q est une forme quadratique positive.*

---

[3]

Lemme 41 *Soit q une forme quadratique positive sur E et φ sa forme polaire. Alors,*

$$\forall x, y \in E, |\varphi(x,y)| \leq \sqrt{q(x)}\sqrt{q(y)}.$$

L'inégalité s'appelle l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ.

2. *Montrer que* q *est définie positive si et seulement si la famille* $(f_1, ..., f_n)$ *est libre.*
3. *Écrire la matrice de* q *dans le cas particulier :* $f_i(t) = t^{i-1}$ *pour* $i = \overline{1, n}$.

Exercice 45 *Soit* $E = \mathbb{R}^3$ *et* q *l'application de* E *dans* $\mathbb{R}$ *définie par :*

$$\forall X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, q(X) = (x + y)^2 + 2(y - z)^2$$

1. *Montrer que q est une forme quadratique et déterminer la matrice associée par rapport à la base canonique .*
2. *Déterminer l'orthogonal de* E *et en déduire le rang de* q.
3. *Trouver le cone des isotropes* $\Im$. *Montrer que c'est un sous-espace vectoriel de* E.
4. *Montrer qu'il existe un seul sous-espace vectoriel* F *totalement isotrope, i.e.* $\{0\} \neq F \subset F^{\perp}$ [4].
5. *Construire deux sous-espaces vectoriels de* E*, isotropes*[5]*, non totalement isotropes et de dimensions distinctes.*

Exercice 48 *Soit* $E = \mathbb{R}^3$ *et* q *l'application de* E *dans* $\mathbb{R}$ *définie par :*

$$\forall X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, q(X) = xy + yz$$

1. *Montrer que q est une forme quadratique et déterminer la matrice associée par rapport à la base canonique.*
2. *Déterminer l'orthogonal de* E *et en déduire le rang de* q.
3. *Trouver l'ensemble des vecteurs isotropes. Montrer que ce n'est pas un sous-espace vectoriel de E.*
4. *Pour tout entier* p,$0 \leq p \leq 3$, *étudier l'existence d'un sous-espace vectoriel totalement isotrope de dimension* p. *En déduire tous les sous-espaces vectoriels totalement isotropes.*
5. *Construire deux sous-espaces vectoriels de* E*, isotropes, non totalement isotropes et de dimensions distinctes.*

Exercice 49 *Soit* q *la forme quadratique sur* $\mathbb{R}^3$ *définie par*

$$q(x, y, z) = x^2 + 3y^2 - 8z^2 - 4xy + 2xz - 10yz$$

---

[4]

Théorème 46 *Un sous-espace* F *est totalement isotrope si et seulement si* F *est un sous ensemble du cone isotrope* $\Im$

[5]

Définition 47 *on dit que le sous espace* G *est isotrope pour une forme quadartique* q *si et seulement si*$G \cap G^{\perp} \neq \{0\}$*, où* $G^{\perp}$ *est l'orthogonal de* G *pour* q.

1. *Déterminer le noyau de* q.
2. *Montrer que l'ensemble des vecteurs* $x \in \mathbb{R}^3$ *tels que* $q(x) = 0$ *est la réunion de deux plans vectoriels dont on donnera des équations.*
3. *Calculer l'orthogonal du vecteur* $(1, 1, 1)$ *pour* q.

Chapitre 3

Réduction des formes quadratiques

Introduction

La réduction d'une forme quadratique q s'agit de l'élimination des termes des produits mixtes dans l'expression algébrique de q pour obtenir une somme des carrées avec des coefficients seulement, c'est-à-dire on cherche une base où la matrice associée de q dans cette base est diagonale.

La réduction repose sur deux approches, l'une est l'orthogonalité, précisément, on procède par la méthode de Gram-Schmidt pour obtenir une base orthogonale (orthonormée) pour la forme quadratique partir d'une base donnée, ensuite on écrit la forme q dans cette base. L'autre on procède par la complétion des carrés dans l'expression algébrique de q. Cette méthode est due à Gauss, comme certains l'attribuent à Lagrange.

Le but de la réduction en plus de faciliter le calcul matriciel, est de trover la signature de q pour la calssifier.

Dans tout le chapitre E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et q une forme quadratique sur E et φ sa forme polaire

Définition 50 *La forme quadratique q est dite réduite à la forme diagonale s'il existe une base dans laquelle $q(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2$ où les x_i sont les coordonnées de X dans cette base.*

Réduction par l'orthogonalité

Définition 51 *Soient $\{v_1, ..., v_n\}$ une base de E. La base est dite orthogonale pour q si $\varphi(v_i, v_j) = 0$, $\forall i \neq j$, la base est dite orthonormée si de plus $q(v_i) = 1$.*

Lemme 52 *Une famille orthogonale ne contenant pas de vecteur isotrope est libre ; en particulier toute famille orthonormée est libre.*

Preuve. Soit $\{v_1, ..., v_n\}$ un ensemble orthogonal pour q, Soient α_1, ..., $\alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$. Alors

$$0 = \varphi\left(v_{j,} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(v_j, v_i) = \alpha_i \varphi(v_i, v_i)$$

Comme $\varphi(v_i, v_i) \neq 0$, alors $\alpha_i = 0$. ■

Proposition 53 *Les conditions suivantes sont équivalents*

i) *$\{v_1, ..., v_n\}$ une base orthogonale (orthonormée) pour q.*

ii) *La matrice associée à q dans la base $\{v_1, ..., v_n\}$ est diagonale.*

iii) *$\forall x \in E$, $q(x) = \sum_{i=1}^{n} q(v_i) x_i^2$ (resp. $q(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$), où $x = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$*

Preuve. On a la matrice associée à q dans la base $\{v_1, ..., v_n\}$ est $(\varphi(v_i, v_j))_{n \times n}$, d'où $\varphi(v_i, v_j) = \begin{cases} 0 & \text{pour } i \neq j \\ q(v_i) & \text{pour } i = j \end{cases}$ ■

Ainsi de la proposition et de la définition 50, la forme q est réduite à la forme diagonale. Le théorème qui suit nous montre qu'on peut toujours réduire une forme quadratique quelconque à la forme diagonale.

Théorème 54 *(Processus de Gram-Schmidt) Il existe des bases de E orthogonales pour ■.*

Preuve. Soit $\{v_1, ..., v_n\}$ une base de E. On pose

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 \\ u_2 &= a_{21} u_1 + v_2 \\ &\vdots \\ u_i &= a_{i1} u_1 + a_{i2} u_2 + \cdots a_{i(i-1)} u_{i-1} + v_i,\ i = \overline{2, n} \end{aligned}$$

Par une vérification directe, nous avons l'ensemble $\{u_1, ..., u_n\}$ est une base de E. Maintenant, nous allons chercher les coefficients a_{ij} pour que la base soit orthogonale.

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi(u_2, u_1) = a_{21}\varphi(u_1, u_1) + \varphi(v_2, u_1) \Rightarrow a_{21} = \frac{-\varphi(v_2, u_1)}{q(u_1)} \\ 0 &= \varphi(u_3, u_1) = a_{31}\varphi(u_1, u_1) + \varphi(v_3, u_1) \Rightarrow a_{31} = \frac{-\varphi(v_3, u_1)}{q(u_1)} \\ 0 &= \varphi(u_3, u_2) = a_{32}\varphi(u_2, u_2) + \varphi(v_3, u_2) \Rightarrow a_{32} = \frac{-\varphi(v_3, u_2)}{q(u_2)} \end{aligned}$$

Nous continuons le processus, nous obtenons

$$a_{ij} = \frac{-\varphi(v_i, u_j)}{q(u_j)} \text{ pour } i = \overline{2, n},\ j = \overline{1, n-1}$$

■

Remarque 55 *Si la forme quadratique est définie positive (i.e.* $\forall X \in E,\ q(X) > 0$*), alors il existe une base orthonormée.*

Preuve. Il suffit de continuer le processus de Gram-Schmidt en posant

$$\epsilon_i = \frac{u_i}{\sqrt{q(u_i)}} \text{ pour } i = \overline{1, n}$$

Ainsi $\{\epsilon_1, ..., \epsilon_n\}$ est une base orthonormée (laissons la vérification aux étudiants). ■

Exemple 56 *En procédant par la méthode de Gram-Schmidt, transformer les vecteurs* $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (-1, 0, 1)$, $v_3 = (0, 1, 2)$ *aux vecteurs deux à deux orthogonaux pour la forme quadratique*

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ q(X) = xy + xz$$

et réduire la forme q *à la forme diagonale.*

Soient u_1, u_2, u_{n3} *définis comme dans la preuve du théoréme 54, alors*

$$\forall X = (x_1, x_2, x_3), Y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3, \varphi(X, Y) = \frac{1}{2}x_1y_2 + \frac{1}{2}x_1y_3 + \frac{1}{2}x_2y_1 + \frac{1}{2}x_3y_1$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 = (1, 1, 0), \\ u_2 &= v_2 - \frac{\varphi(v_2, u_1)}{q(u_1)}u_1 = (-1, 0, 1) - \frac{0}{1}u_1 = (-1, 0, 1) \\ u_3 &= v_3 - \frac{\varphi(v_3, u_1)}{q(u_1)}u_1 - \frac{\varphi(v_3, u_2)}{q(u_2)}u_2 \\ &= (0, 1, 2) - \frac{3}{2}(1, 1, 0) - \frac{3}{2}(-1, 0, 1) = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Les vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^3$*, donc pour*

$$X = z_1 u_1 + z_2 u_2 + z_3 u_3,$$

nous avons

$$q(X) = q(u_1) z_1^2 + q(u_2) z_2^2 + q(u_3) z_3^2 = z_1^2 - z_2^2$$

Comme la forme est non définie (car $q(u_3) = 0$*), alors nous avons une base orthogonale seulement.*

Réduction par complétion des carrés (Méthode de Gauss)

Pour faciliter la compréhension des étudiants nous commençons par une forme quadratique sur un espace de dimension 2.

Soit

$$\forall X = (x, y) \in E, q(X) = ax^2 + bxy + cy^2$$

- Supposons que l'un des coefficients a ou c est non nul, disons a. Alors,
$$q(X) = a\left(x + \frac{b}{2a}y\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)y^2$$
- Si $a = c = 0$, alors $b \neq 0$ sinon $q = 0$. On pose xy sous la différence de deux carrés (la règle du parallélogramme) :
$$xy = \frac{1}{4}(x+y)^2 - \frac{1}{4}(x-y)^2$$
Ainsi nous avons
$$q(X) = \frac{b}{4}(x+y)^2 - \frac{b}{4}(x-y)^2$$

Ainsi il existe α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{K}$ et deux formes linéaires l_1, $l_2 \in E^*$, tels que

$$q(X) = \alpha_1 (l_1(X))^2 + \alpha_2 (l_2(X))^2$$

On dit que q est décomposée en somme des carrés de deux formes linéaires. Si nous voulons chercher la nouvelle base, il suffit d'écrire les anciennes coordonnées x et y en fonction des nouvelles coordonnées l_1 et l_2 du vecteur X pour obtenir la matrice de passage P de l'ancienne base à la nouvelle base en prenant les colonnes de P comme vecteurs de la nouvelle base.

Dans l'exemple précédent, Premier cas, nous avons

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2b}{4ac-b^2} \\ 0 & \frac{4a}{4ac-b^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}$$

Ainsi nous avons la nouvelle base $\left\{v_1 (1,0), v_2 = \left(-\frac{2b}{4ac-b^2}, \frac{4a}{4ac-b^2}\right)\right\}$. Laissons le deuxième cas pour les étudiants.

Maintenant nous pouvons généraliser la méthode pour la dimension n. Soit $q(X) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$. Il existe un coefficient d'un carré non nul (sinon nous appliquons la règle du parallélogramme sur un coefficient d'un terme mixte pour obtenir un carré. Donc nous pouvons toujours supposer qu'il existe d'un coefficient d'un carré non nul, disant a_{11}. Alors pour $n = 1$ la propriété est vraie car

$$q(X) = a_{11} x^2$$

Nous avons déjà démontré la propriété pour $n = 2$. Suppossons qu'elle est vraie pour toute forme quadratique sur un espace vectoriel de dimension $< n$

$$q(X) = \frac{1}{a_{11}} \left(x_1 + \frac{a_{12}}{2a_{11}} x_2 + \cdots \frac{a_{1n}}{2a_{11}} x_n \right)^2 + \sum_{i,j=2}^{n} b_{ij} x_i x_j,$$

d'où il existe une forme linéaire l_1 et q' tels que

$$l_1(X) = x_1 + \frac{a_{12}}{2a_{11}} x_2 + \cdots \frac{a_{1n}}{2a_{11}} x_n, q'(X) = \sum_{i,j=2}^{n} b_{ij} x_i x_j$$

Remarquons que q' est une forme quadratique sur un espace de dimension $n-1$, donc l'hypothèse de récurrence nous donne

$$q'(X) = \sum_{i=2}^{n} \alpha (l_i(X))^2$$

Par conséquent

$$q(X) = \alpha_1 (l_1(X))^2 + \cdots \alpha_n (l_n(X))^2$$

Signature et classification d'une forme quadratique

De cette section nous introduisons la notion de la signature et présentons sa relation avec le rang. Nous présentons le théorème d'inertie de Sylvester (qui est la classification des formes quadratiques sur $\mathbb{R}$).

Signature d'une forme quadratique

Définition 57 *la signature d'une forme quadratique q sur un espace vectoriel de dimension n est le couple (p, s) où p est le nombre de coefficients positifs dans la forme diagonale de q et s le nombre de coefficients négatifs. Les formes quadratiques ayant la même signature sont dites équivalentes.*

Ainsi nous pouvons classer les forme quadratiques comme suit :

1. La forme est définie positive(positive) $\Rightarrow p = n$ $(p \leq n$ et $s = 0)$.
2. La forme est définie négative (négative) $\Rightarrow s = n$ $(s \leq n$ et $p = 0)$
3. La forme est non définie $\Rightarrow p < n$ où $s < n$
4. On a $p+s = rang\,(q)$, ainsi la forme est non dégénérée $\Rightarrow p+s = n$
5. De 1 et de la remarque 55, il existe une base orthonormée pour $q \Leftrightarrow p = n$.

En effet, $p = n \Leftrightarrow$ tous les coefficient dans la forme diagonale sont > 0. Il suffet de diviser sur chaque coefficient pour obtenir la forme $q\,(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} l_i^2$ où les l_i sont les coordonnées de X dans la base finale.

Classification sur le corps des complexes $\mathbb{C}$

Théorème 58 *Toute formes quadratique sur $\mathbb{C}$ est représentée par la matrice $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.*

Preuve. En effet, Soit (p, s) la signature de q, alors appliquons la réduction par l'une des méthodes précédentes, nous avons

$$q\,(X) = a_1 z_1^2 + \cdots a_r z_r^2$$

où $r = p + s$ le rang de q et a_1, ..., a_p les coefficients positifs et a_{p+1}, ..., a_r les coefficients négatifs.

Comme les $a_i \in \mathbb{C}$, alors les $\sqrt{a_i} \in \mathbb{C}$. Possons

$$t_i = \sqrt{a_i} z_i$$

nous obtenons

$$q\,(X) = t_1^2 + \cdots t_r^2$$

Soient $A_r = diag\,(a_1, ..., a_r)$ et P la matrice de passage de $\{u_1, ..., u_n\}$ la base orthogonale pour q à la nouvelle base orthogonale obtenue par les délatations $z_i \mapsto \sqrt{a_i} z_i$.

$$P^T \begin{pmatrix} A_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

■

Classification sur le corps des réels $\mathbb{R}$

Théorème 59 *(Théorème d'inertie de sylvester)Toute formes quadratique sur* $\mathbb{R}$ *de signature* (p, s) *est représentée par la matrice* $\begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_s & \\ & & 0 \end{pmatrix}$.

Preuve. En effet, de la preuve précédente, pour les coefficients négatifs on prend les racines carrées de leurs opposés. ■

Remarque 60 *De tout ce qui précède nous avons les remarques suivantes :*

1. *Le théorème de Sylvester montre que la signature d'une forme quadratique ne dépend pas de la base choisie. Donc la signature est un invariant de* q. *Ainsi les formes équivalentes sur* $\mathbb{R}$ *sont les formes qui ont la même signature, tandis que les formes équivalentes sur* $\mathbb{C}$ *sont celles qui ont le même rang.*
2. *À l'aide d'une forme quadratique nous pouvons toujours définir le produit scalaire standard sur l'espace entier ou sur un sous espace de dimension* r.
3. *Tout produit scalaire est équivalent au produit scalaire standard.*

Diagonalisation des matrices symétriques dans une base orthonormée des vecteurs propres

Cette section explique clairement aux étudiants la relation entre la réduction des formes quadratiques et la diagonalisation des matrices symétriques déjà étudiée dans le premier semestre, ce qui leurs permet de posséder les différentes techniques de la diagonalisation et choisir la méthode efficace pour tout cas.

De la proposition 53 et du théorème 54, nous avons le résultat suivant :

Théorème 61 *Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée des vecteurs propres.*

Pratiquement comment procède t-on ?

1. De la proposition 53 et du théorème 54 nous savons que la matrice est diagonalisable sur son corps de base. Donc d'après le théo-

rème de la diagonalisation des endomorphismes (matrices carrées), nous somme sûre que nous avons une base de E formée des vecteurs propres.

2. Cherchons les valeurs propres λ_1, ..., λ_n et les vecteurs propres de la matrice en question.

3. À l'aide du processus de Gram-Schmidt nous transformons cette base à une base orthonormée $\{\epsilon_1, ..., \epsilon_n\}$ pour le produit scalaire standard (Cette transformation préserve les espaces propres, car les nouveaux vecteurs propres $\epsilon_1, ..., \epsilon_n$ sont juste des combinaisons linéaires des anciens).

4. La matrice dans cette base est diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres propres associées.

5. Comme la matrice est symétrique, alors elle est d'une coté associe d'une forme quadratique et d'autre coté est associe à un endomorphisme. D'où, si on note cette matrice par A et la matrice de passage à la base orthonormée des vecteurs propres par P, alors on a
$$P^T AP = diag\,(\lambda_1, ..., \lambda_n) = p^{-1}AP,$$
ce qui donne
$$q\,(x) = \lambda_1 t_1^2 + \lambda_2 t_2^2 + \cdots + \lambda_n t_n^2,$$
où
$$x = t_1\epsilon_1 + t_2\epsilon_2 + \cdots t_n\epsilon_n \in E \text{ et } P^{-1} = P^T.$$

Ainsi nous avons un résultat et une définition :

Théorème 62 *Les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle A sont toutes réelles. elles sont totalement positives (positive) si A est définie positive, i.e. $\forall x \in E$, $x^T Ax > 0$ (positive, i.e. $x^T Ax \geq 0$).*

Définition 63 *Une matrice inversible P est dite orthogonale si ses colonnes forment une base orthonormée. L'endomorphisme associé à une matrice orthogonale est dit orthogonal.*

Nous laissons aux étudiants de montrer le lemme suivant :

Lemme 64 *Une matrice P est orthogonale$\Leftrightarrow$ $P^{-1} = P^T \Rightarrow \det P = \pm 1$.*

Série des exercices

Exercice 65 *Procéder par la méthode de Gauss (la complétion d'un carré) pour transformer à la forme diagonale les formes quadratiques suivantes et déterminer leurs signatures, leurs rangs, la nature des formes (définies, positives, négatives, non définies) et les nouvelles bases.*

1.
$$\forall X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, q(X) = x_1^2 + x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 - x_3^2$$

2.
$$\forall X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, q(X) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$

3.
$$\forall X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, q(X) = x_1x_2 + x_3x_4$$

4.
$$\forall X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, q(X) = 2z^2 + 2xy - xz - 4yz - 6zt.$$

5.
$$\forall X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, q(x, y, z) = x^2 + 7y^2 + 6xy - 2xz + 8yz$$

Exercice 66 *Soit* $a \in \mathbb{R}$

$$\forall X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, q_a(X) = a\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_3x_1$$

1. *Classifier la forme quadratique* q *selon les valeurs de* a.
2. *Montrer qu'il existe une même base de* $\mathbb{R}^3$ *qui est orthogonale pour tous les* q_a.
3. *Soit* D *la droite vectorielle engendrée par le vecteur* $(2, 2, 1)$. *Trouver une base de l'orthogonal* $D^\perp$ *et de* D *pour* q_0. *Est-ce que* D *et* $D^\perp$ *sont supplémentaires ?*
4. *Montrer que la forme quadratique* q_a *est définie positive si et seulement si* $a > 2$.

Exercice 67 *Discuter, suivant la valeur du nombre réel* a, *le rang et la signature de la forme quadratique* q.

$$\forall X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, q_a(X) = x_1^2 + (1 + a)x_2^2 + \left(1 + a + a^2\right)x_3^2 + 2x_1x_2 - 2ax_2x_3$$

Exercice 68 *Dans une base orthonormée des vecteurs propres diagonaliser chaque forme quadratique dans cette série.*

Chapitre 4

Quelques notions algébriques et géométriques de l'espace préhilbertien

Introduction

Nous avons déjà introduit la notion d'un espace quadratique, dans ce chapitre nous allons introduire l'espace préhilbertien et les notions de la norme, la distance, l'angle entre deux vecteurs, l'application adjointe, l'isométrie, l'application orthogonale et la projection orthogonale. Un espace préhilbertien est défini comme un espace vectoriel réel ou complexe muni d'un produit scalaire.Cette notion généralise celles d'espace Euclidien ou Hermitien dans le cas d'une dimension quelconque. L'espace préhilbertien est très utile pour la géométrie, la topologie et aussi la théorie des opérateurs linéaires.

Quelques notions de l'espace Euclidien

Définition 69 *L'espace Euclidien est un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire* $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Définition 70 *La **norme Euclidienne** est une application d'un espace Euclidien E notée $\|\cdot\|$ dans $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ qui associe à tout $x \in E$ la valeur $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Ainsi l'espace vectoriel E est un espace normé noté $(E, \|\cdot\|)$.*

Il est facile de voir que la définition précédente est une généralisation de la valeur absolue des nombres réels aux vecteurs.

Le théorème suivant introduit quelques propriétés qu'on peut l'interpréter géométriquement, ou même topologique. La définition du produit scalaire permet aux étudiants de démontrer facilement :

Théorème 71 *Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace Euclidien, alors,*

1. $\forall x \in E$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *(notion de séparation).*
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ *(bsolue homogénéité).*
3. $\forall x,\ y \in E$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(sous-additivité, appelée également inégalité triangulaire).*
4. $\forall x,\ y \in E$, $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \|y\|$ *(l'inégalité de Cauchy-Schwarz).*

Enfin, pour la propriété 4, distinguons deux cas, pour $x = 0$ ou $y = 0$, nous avons $0 = 0$. Supposons que $x \neq 0$ et $y \neq 0$, alors il existe $\alpha = \frac{\|y\|}{\|x\|}$, ainsi nous avons

$$\|y\| = \alpha \|x\|,$$

ce qui donne,

$$\begin{aligned} 0 &< \langle \alpha x \pm y, \alpha x \pm y\rangle = \alpha^2 \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle \pm 2\alpha \langle x, y\rangle \\ &= \alpha^2 \|x\|^2 + \|y\|^2 \pm 2\alpha \langle x, y\rangle = 2\alpha \|x\| \|y\| \pm 2\alpha \langle x, y\rangle, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$|\langle x, y\rangle| < \|x\| \|y\|$$

Ainsi avec le premier cas, nous avons l'inégalité $\leq$.

Définition 72 *La **distance Euclidienne** est une application du produit cartésien $E \times E$ d'un espace Euclidien E notée d dans $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ qui associe à tout $(x, y) \in E \times E$ la valeur $d(x, y) = \|y - x\|$. Ainsi lespace vectoriel E est un espace métrique noté (E, d).*

De la définition précédente, la distance dans un espace Euclidien en plus de la notion géométrique, elle peut induire une structure topologique sur cet espace dont les ouverts sont les boules ouvertes $B(0, r) = \{x \in E, d(0, x) < r\}$. Baser sur le théorème 71, il est facile à démentrer les propriétés suivantes :

Théorème 73 *Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace Euclidien, alors,*

1. $\forall x,\ y \in E,\ d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ *(notion de séparation).*
2. $\forall x,\ y \in E,\ d(x,y) = d(y,x)$ *(symétrie) .*
3. $\forall x,\ y \in E,\ \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(l'inégalité triangulaire)*

Définition 74 *On appelle* ***angle*** *entre deux vecteurs x et y le nombre réel θ satisfaisant la relation*

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \, \|y\| \cos \theta$$

De la définition précédente, on a **le théorème de Pythagore** qui afirme que le carré de la longueur de l'hypoténuse, qui est le côté opposé à l'angle droit, est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés. Le théorème peut être interprété par la suivante

$$\forall x, y \in E, \langle x, y \rangle = 0 \Leftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Enfin

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle$$

En plus de la géométrie, le théorème a son application en arithmétique, les entiers qui satisfont le théorème s'appellent **Triplet pythagoricien**, i.e**.** (a,b,c) est triplet pythagorcien si $a^2 + b^2 = c^2$, comme $(3,4,5)$, $(5,12,13)$, $(8,15,17)$,...

Définition 75 *Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$, $(F, \langle \cdot, \cdot \rangle_F)$ deux espaces Euclidiens munis de leurs produit scalaires et $f \in \ell(E,F)$ .On appelle* ***application adjointe*** *l'application linéaire $f^* \in \ell(F,E)$ satisfaisant la condition*

$$\forall x \in E, \forall y \in F, \langle f(x), y \rangle_F = \langle x, f^*(y) \rangle_E$$

Proposition 76 *Dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ munis des produits scalaires standards, La matrice associée à $f^* \in \ell(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ est égale à la transposée de la matrice associée à f.*

Preuve. Soit $A = (a_{ij})_{m \times n}$ la matrice associée à $f \in \ell(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, alors

$$\forall x = (x_1, ...x_n), f(x) = Ax = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j, ..., \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j \right)$$

$$\begin{aligned} \forall y(y_1, ...y_m), \langle f(x), y \rangle_{\mathbb{R}^m} &= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) y_i \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ji} y_i \right) x_j = \langle x, f^*(y) \rangle_{\mathbb{R}^n} \end{aligned}$$

ce qui implique que la matrice associée à f^* est $(a_{ji})_{n\times m} = A^\top$. ■

Il est conseillé aux étudiants de redémontrer la proposition pour les petites valeurs de n et m.

Définition 77 *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. Un endomorphime $f \in \ell(E)$ s'appelle une isométrie si*

$$\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$$

Définition 78 *Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace Euclidien. Un endomorphime $f \in \ell(E)$ s'appelle une application orthogonale si*

$$\forall x, y \in E, \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$$

De la définition précédente, on a le théorème suivant

Théorème 79 *Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace Euclidien et $f \in \ell(E)$, alors f est orthogonal$\Leftrightarrow f^* = f^{-1}$.*

Preuve.

$$\begin{array}{rcl} f \text{ est orthogonal} & \Leftrightarrow & \forall x, y \in E, \langle x, y\rangle = \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, f^* f(y)\rangle \\ & \Leftrightarrow & \langle x, y - f^* f(y)\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle x, (I - f^* \circ f) y\rangle = 0 \\ & \Leftrightarrow & I - f^* \circ f = 0 \Leftrightarrow f^* = f^{-1} \end{array}$$

■

Signalons que la définition 63 et la définition 79 sont équivalentes.

L'espace Hermitien

Définition 80 *Soit E un $\mathbb{C}-$espace vectoriel de dimension finie. On appelle forme hermitienne l'application $h : E \times E \to \mathbb{C}$ satisfaisant les conditions suivantes :*

1.

$$\begin{array}{rcl} \forall x, x', y, y' & \in & E, h(x + x', y) = h(x, y) + h(x', y) \\ & & \textit{et} \\ h(x, y + y') & = & h(x, y) + h(x, y') \end{array}$$

2.

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{C}, h(\lambda x, y) = \lambda h(x, y) = h\left(x, \overline{\lambda} y\right)$$

3.

$$\forall x, y \in E, h(x, y) = \overline{h(y, x)}$$

Si h satisfait les deux premières conditions seulement, alors elle s'appelle forme sesquilinéaire. La forme hermitienne est dite produit scalaire hermitien si sa forme quadratique $q(x) = h(x, x) > 0$ pour tout $x \neq 0$ [1]*. L'espace (E, h) s'appelle espace hermitien.*

Remarque 81

1. *Toutes les notions, les théorèmes, les résultats et les propriétés dans l'espace Euclidien sont valables dans l'espace hermitien en prenant compte les calculs ($h(x, \lambda y) = \overline{\lambda} h(x, y)$ et $h(x, y) = \overline{h(y, x)}$)*
2. *Le prduit scalaire standard de $\mathbb{C}^n$ est donné ainsi par*

$$\forall x = (x_1, ...x_n), y = (y_1, ...y_n) \in \mathbb{C}^n, \ \langle x, y \rangle_{\mathbb{C}^n} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$

3. *L'application (la matrice) orthogonale dans l'espace hermitien s'appelle unitaire. La transposée de la conjuguée complexe d'une matrice A s'appelle l'adjointe de A, notée A^* (i.e. $A^* = \left(\overline{A}\right)^\top$).*
4. *Une matrice carrée complexe A est dite auto-adjointe ou hermitienne si $A = A^*$.*
5. *Le théoème spectral dans le cas complexe devient comme suit :*

   Théorème 82 *Toute matrice hermitienne est diagonalisable dans une base orthonormée des vecteurs propres.*

[1] Remarquons que $q(x) \in \mathbb{R}$, car $q(x) = h(x, x) = \overline{h(x, x)}$.

Quelques sujets d'examens de l'algèbre 4

Examen d'algèbre 4, Mai 2017

Université L'Arbi Ben Mhidi, Oum-El-Bouaghi
Faculté SENV, Département de M.I.
Cotrôle d'algèbre 4
Mai 2017

Instructions. Nom, prénom et classe doivent être figurés sur la copie. Écrire plus lisiblement ave un stylo bleu ou noir. Toute réponse **non justifiée** sera considérée **nulle**. Toute **méthode hors question** sera considérée **fausse**. Toute copie mal présentée ne sera pas corrigée.

1. **Exercice.**(a : 8 points, b : 2 points, c : 2 points)
   (a) En utilisant les valeurs propres d'une matrice diagonaliser dans une base orthonormée la forme quadratique suivante :
   $$q(X) = 3x_1^2 - 2x_1x_3 + 4x_2^2 + 3x_3^2.$$
   (b) Déduire la signature et le rang de q. La forme est -elle dégénérée ? La forme est-elle définie (semi-definie) positive, négative, non définie ?
   (c) Déterminer les vecteurs isotropes en déduire le noyau de q..

2 **Exercice.**(a : 2 point, b : 2 points) Dans un espace Euclidien, montrer les propositions suivantes :
   (a) Les vecteurs propres associés aux valeurs propres distinctes sont deux à deux orthogonaux.
   (b) Les vecteurs orthogonaux sont libres.

3 **Exercice.**(a : 2 points, b : 2 points)
   (a) Déterminer l'application adjointe f^* de $f(x,y) = x+y$ pour le produit scalaire standard de $\mathbb{R}^n$.
   (b) En utilisant les concepts des espaces Euclidiens, montrer :
   $$\frac{n^2(n+1)^2}{4} \leq n\left(1+4+...+n^2\right)$$

Corrigé type de l'examen de l'algèbre 4, Mai 2017

Exercice 1 :

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, polynôme caractéristique :

$$X^3 - 10X^2 + 32X - 32 = (X-4)^2 (X-2)$$

.

Les ecteurs propres :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 2, \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 4.$$

Ainsi on la base orthonormée :

$$\left\{ \varepsilon_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \right\}.$$

On pose $P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, on a $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 4 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$, ce qui donne

$$q(X) = 2x^2 + 4y^2 + 4z^2, \text{ où } X = x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2 + z\varepsilon_3.$$

b) De ce qui précède, on en deduit la signature $(P, N) = (3, 0)$, ce qui donne le rang de q est $r = P + N = 3 + 0 = 3 = P = \dim \mathbb{R}^3$. Ainsi la forme est definie positive.

c) Les vecteurs isotropes sont les vecteurs X qui vérifient $q(X) = 0$, ce qui donne $X = 0$. Comme $\ker q$ est une partie de l'ensemble des vecteurs isotropes, on conclue que $\ker q = \{0\}$. Ceci est confirmé par les résultats dans b.

Exercice 2 :

a) Rappelons d'abord que dans la base canonique d'un espace Euclidien, l'adjointe d'une matrice (une application linéaire) est égale a sa transposée, d'autre part, une matrice et sa transposée ont les même valeurs propres. Soient u et v deux vecteurs propres d'une matrice A associés aux valeurs propres distinctes α et β resp. Alors

$$\alpha \langle u, v \rangle = \langle \alpha u, v \rangle = \langle Au, v \rangle = \langle u, A^* v \rangle = \langle u, A^t v \rangle = \langle u, \beta v \rangle = \beta \langle u, v \rangle,$$

ainsi,

$$\begin{aligned}(\alpha-\beta)\langle u,v\rangle &= 0\\ \alpha-\beta &\neq 0 \Rightarrow \langle u,v\rangle = 0.\end{aligned}$$

b) Soient u et v deux vecteurs orthogonaux non nuls et $\alpha \in \mathbb{R}$, tels que $u = \alpha v$. Alors

$$\begin{aligned}0 &= \langle u,v\rangle = \langle \alpha v,v\rangle = \alpha\langle v,v\rangle\\ \langle v,v\rangle &\neq 0 \Rightarrow \alpha = 0,\end{aligned}$$

ce qui fait u et v sont libres.

<u>Exercice 3 :</u>

a) $f^* : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, tel que $\forall x_1, x_2, x \in \mathbb{R}$, $\langle f(x_1,x_2), x\rangle = \langle (x_1,x_2), f^*(x)\rangle$. D'où, il existe a, $b \in \mathbb{R}$, tels que

$$(x_1+x_2)\,x = \langle (x_1,x_2),(ax,bx)\rangle = ax_1x + bx_2x.$$

Ainsi, dans les bases canonique de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ nous obetnons

$$\begin{aligned}\langle f(1,0),1\rangle &= \langle (1,0), f^*(1)\rangle \Rightarrow 1 = a\\ \langle f(0,1),1\rangle &= \langle (0,1), f^*(1)\rangle \Rightarrow 1 = b\end{aligned}$$

ce qui donne $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^*(x) = (x,x)$.

b) **O**on prend l'inégalité de Cauchy-schwarz dans $\mathbb{R}^n$, pour $X = (x_1, ..., x_n)$, $Y = (y_1, ..., y_n)$, on a

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

et on prend $X = (1,1,...,1)$, $Y = (1,2,3,..,n)$, on obtient

$$\frac{n(n+1)}{2} = 1+2+...n \leq \sqrt{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} i^2}.$$

On prend les carrés des deux membres, on obtient le résultat désiré.

Examen de rattrappage d'algèbre 4, Juin 2017

Université L'Arbi Ben Mhidi, Oum-El-Bouaghi
Faculté SENV, Département de M.I.

Cotrôle de rattrapage d'algèbre 4
Juin 2017

Instructions. Nom, prénom et classe doivent être figurés sur la copie. Écrire plus lisiblement ave un stylo bleu ou noir. Toute réponse **non justifiée** sera considérée **nulle**. Toute **méthode hors question** sera considérée **fausse**. Toute copie mal présentée ne sera pas corrigée.

1. **Exercice.**(a : 2 points, b : 2 points, c : 2 points, d : 4 points)
   (a) Déterminer la forme bilinéaire φ associée à la forme quadratique suivante :
   $$q(X) = \frac{3}{2}x_1^2 - x_1x_3 + 2x_2^2 + \frac{3}{2}x_3^2.$$
   (b) Déterminer l'orthogonal de $E = vect\,\{v = (1, -1, 0)\}$ pour la forme φ.
   (c) Montrer que E et $E^{\perp}$ forment une somme directe de $\mathbb{R}^3$.
   (d) Déduire une base de $\mathbb{R}^3$ orthonormée pour φ .

2 **Exercice.**(a : 2, 5 point, b : 2, 5 points) Dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^n$, montrer les propositions suivantes :
   (a) Lapplication $\|.\| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $\|(x_1, ..., x_n)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ est bien une norme.
   (b) Lapplication $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $d\,(x, y) = \|x - y\|$ est bien une distance.

3 **Exercice.**(a : 2 points, b : 3 points)
   (a) Déterminer l'application adjointe f^* de $f\,(x) = (x, -x)$ pour le produit scalaire standard de $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2$.
   (b) Déterminer la base duale de la base canonique de $\mathbb{R}_2\,[X]$.

Corrigé type de l'examen du rattrapage de l'algèbre 4, Juin 2017

Exercice 1 :

a) (2 points) on peut obtenir φ de la forme polaire de q ou de sa matrice associée.

$$\varphi(x,y) = \frac{3}{2}x_1y_1 - \frac{1}{2}x_1y_3 + 2x_2y_2 - \frac{1}{2}x_3y_1 + \frac{3}{2}x_3y_3$$

b) (2 points)

$$E^{\perp} = \left\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3, \varphi\left((x_1,x_2,x_3),(1,-1,0)\right) = 0\right\}$$

ce qui donne

$$\frac{3}{2}x_1 - 2x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 3x_1 - 4x_2$$

Ainsi,

$$E^{\perp} = vect\left\{u = (1,0,3), w = (0,1,-4)\right\}$$

c) (2 points) Il suffit de montrer que $\{v,u,w\}$ est libre, donc c'est une base de $\mathbb{R}^3 = base$ de $E \cup base$ de $E^{\perp}$.

d) (4 points). On a $v \perp u$ et $v \perp w$ pour φ, tandisque $\varphi(u,w) = -16 \neq 0$. Donc on utilise la méthode de Gram-Schmidt pour obtenir une base orthogonale. On pose

$$u' = u = (1,0,3), w' = \frac{-\varphi(u,w)}{q(u)}u + w = \frac{16}{12}u + w = \left(\frac{4}{3},1,0\right)$$

Ainsi, on a $\{v,u',w'\}$ une base orthogonale pour φ. Maintenant pour obtnir $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3\}$ une base orthonormée, on pose

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{v}{\sqrt{q(v)}} = \left(\frac{\sqrt{14}}{7}, \frac{-\sqrt{14}}{7}, 0\right), \\
\varepsilon_2 &= \frac{u}{\sqrt{q(u)}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{6}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \\
\varepsilon_3 &= \frac{w'}{\sqrt{q(w')}} = \left(\frac{2\sqrt{42}}{21}, \frac{\sqrt{42}}{14}, 0\right)
\end{aligned}$$

Exercice 2 : Voir le cours : l'espace Euclidien.

Exercice 3 :

a) (2 points). On a $f(x) = (x,-x)$ ce qui implique que $f^* : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f^*(x,y) = ax + by$, tel que

$$\begin{aligned}
\langle f(1),(x,y)\rangle &= \langle 1, ax+by\rangle \\
\langle (1,-1),(x,y)\rangle &= ax + by \Rightarrow x - y = ax + by \Rightarrow a = 1,\ b = -1
\end{aligned}$$

Ainsi, on a $f^*(x,y) = x - y$.

b) (3 points). La base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est $\{1, x, x^2\}$, d'où $\left\{1^*, x^*, (x^2)^*\right\}$ est la base duale de $(\mathbb{R}_2[X])^*$. i.e.

$$\begin{aligned}
1^*(1) &= 1{,}1^*(X) = 0 = 1^*\left(X^2\right) \\
X^*(X) &= 1,\ X^*(1) = 0 = X^*\left(X^2\right) \\
\left(x^2\right)^*\left(X^2\right) &= 1,\ \left(x^2\right)^*(1) = 0 = \left(x^2\right)^*(X)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\forall p(X) &\in \mathbb{R}_2[X], \\
1^*(p(X)) &= p(0), \\
x^*(p(X)) &= p'(0), \\
\left(x^2\right)^*(p(X)) &= \frac{1}{2}p''(0),
\end{aligned}$$

où p' et p'' sont les dérivés de p.

Examen d'algèbre 4, Mai 2018

Université L'Arbi Ben Mhidi, Oum-El-Bouaghi
Faculté SENV, Département de M.I.
Cotrôle d'algèbre 4
29 Mai 2018

Instructions. Nom, prénom et classe doivent être figurés sur la copie. Écrire plus lisiblement ave un stylo bleu ou noir seulement. Toute réponse non justifiée sera considérée nulle. Toute copie mal présentée ne sera pas corrigée.

Exercice 83 (2 *points à chaque question*) *Soit*

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -a \end{pmatrix}$$

1. *Déterminer la forme bilinéaire* φ_M *de* M.
2. *Selon les valeurs du réel* a, *déterminer l'orthogonal pour* φ_M *de* $F = vect\{(1,-1,2)\}$.
3. *Pour quelles valeurs de* a, $F \oplus F^{\perp} = \mathbb{R}^3$
4. *Calculer le déterminant de* M, *en déduire l'orthogonal de* $\mathbb{R}^3$ *pour* φ_M.
5. *Par la méthode de Gauss, réduire la forme quadratique* q *de la forme* φ_M.
6. *En déduire La signature de* q.
7. *Dans quel cas la forme* q *n'est pas définie.*
8. *Déterminer les formes linéaires* $l_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *dans la forme diagonale de* q, *forment -elles une base ?déterminer la base antéduale.*

Exercice 84 (4 *points*) *Dans la base canonique de* $\mathbb{R}^2$, *déterminer l'adjoint pour la forme quadratique* $q(X) = x^2 - 2xy$ *de l'endomorphisme*

$$f(x,y) = (x+y, x-y)$$

Corrigé type de l'examen de l'algèbre 4, Mai 2018

Solution de l'exercice 1

1. La forme bilinéaire φ_M de M.
   Soit
$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3, \\ \varphi_M(x, y) &= x^t M y = a x_1 y_1 - 2x_1 y_3 + 2x_2 y_2 - a x_3 y_3 \end{aligned}$$
2. L'orthogonal pour φ_M de $F = vect\{(1, -1, 2)\}$
$$F^{\perp} = \left\{X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \forall y \in F, \varphi_M(X, y) = 0\right\}$$
   Posons $v = (1, -1, 2)$, alors $\forall y \in F \exists \alpha \in \mathbb{R}$, $y = \alpha v$, ce qui donne
$$\varphi_M(X, y) = \varphi_M(X, \alpha v) = \alpha \varphi_M(X, v)$$
   Ainsi nous avons l'équivalence
$$\begin{aligned} \varphi_M(X, y) &= 0 \Leftrightarrow \varphi_M(X, v) = 0 \\ &\Leftrightarrow (a-2)x - 2y - (2a+1)z = 0 \\ &\Leftrightarrow X = x\left(1, \frac{a-2}{2}, 0\right) + z\left(0, \frac{2a+1}{2}, 1\right), \end{aligned}$$
   d'où
$$F^{\perp} = vect\left\{\left(1, \frac{a-2}{2}, 0\right), \left(0, \frac{2a+1}{2}, 1\right)\right\}.$$
3. Les valeurs de a, pour lesquels $F \oplus F^{\perp} = \mathbb{R}^3$
   Nous avons $\dim F + \dim F^{\perp} = 3$, donc il suffit de chercher les valeurs de a pour lesquels $v \notin F^{\perp}$, i.e.
$$\varphi_M(v, v) \neq 0 \Rightarrow a \neq \frac{-2}{3}$$
4.
$$\det M = -2a^2 - 2 = -2\left(a^2 + 1\right) \neq 0 \forall a \in \mathbb{R}$$
   Comme l'orthogonal de $\mathbb{R}^3$ est égal au noyau de φ_M qui est à son tour égal au noyau de M, nous en déduisons que $(\mathbb{R}^3)^{\perp} = \{0\}$.
5.
$$q(X) = ax^2 - 2xz + 2y^2 - az^2$$
   Pour réduire la forme q nous distinguons deux cas :
   1^{er} cas : si $a = 0$, alors
$$q(X) = 2y^2 - 2(x+z)(x-z) = -2x^2 + 2y^2 + 2z^2,\ X = (x+z, y, x-z)$$
   $2^{ème}$ cas : Pour $a \neq 0$, nous avons
$$q(X) = a\left(x - \frac{1}{a}z\right)^2 + 2y^2 - \left(\frac{a^2+1}{a}\right)z^2,\ X = \left(x - \frac{1}{a}z, y, z\right)$$

6. La classification de q :

   i) Notons pour p le nombre des coefficients positifs et pour N le nombre des coefficients négatifs et rappelons que la forme n'est pas définie si $p \neq n$ ou $N \neq n$.

   i) Pour $a = 0$, c'est claire $s = (p, N) = (2, 1)$, on en déduit que q n'est pas définie.

   ii) Pour $a > 0$, on a $-\left(\frac{a^2+1}{a}\right) < 0$, ainsi, $s = (p, N) = (2, 1)$, on en déduit que q n'est pas définie.

   iii) Pour $a < 0$, $-\left(\frac{a^2+1}{a}\right) > 0$, ainsi $s = (p, N) = (2, 1)$, on en déduit que q n'est pas définie

7. On conclu que la forme est non définie pour toutes les valeurs de a.

8. Les formes linéaires dans la forme diagonale de q :

   i) Pour $a = 0$, on a

   $$l_1(x, y, z) = x + z, l_2(x, y, z) = y, l_3(x, y, z) = x - z$$

   ainsi nous avons la matrice

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

   Par suite la base antéduale est

   $$\left\{ \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right), (0, 1, 0), \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right) \right\}$$

   ii) Pour $a \neq 0$,

   $$l_1(x, y, z) = x - \frac{1}{a}z, l_2(x, y, z) = y, l_3(x, y, z) = z$$

   ainsi nous avons la matrice

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{a} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Par suite la base antéduale est

   $$\left\{ (1, 0, 0), (0, 1, 0), \left(\frac{1}{a}, 0, 1\right) \right\}$$

Solution de l'exercice 2 L'adjointe pour la forme quadratique q est égale à l'adjointe pour sa forme bilinéaire

$$\forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, \varphi(x, y) = x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1$$

Par définition,

$$\varphi(f(x), y) = \varphi(x, f^*(y)) \tag{4.1}$$

où

$$f(x) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2), f^*(y) = (a_{11} y_1 + a_{12} y_2, a_{21} y_1 + a_{22} y_2) \tag{4.2}$$

De la relation (1) et (2), nous obtenons

$$\begin{aligned} & (x_1 + x_2) y_1 - (x_1 + x_2) y_2 - (x_1 - x_2) y_1 && (4.3) \\ = \; & x_1 (a_{11} y_1 + a_{12} y_2) - x_1 (a_{21} y_1 + a_{22} y_2) - x_2 (a_{11} y_1 + a_{12} y_2) && (4.4) \end{aligned}$$

Dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, l'équation (1) donne le système suivant

$$\varphi(f(e_i), e_j) = \varphi(e_i, f^*(e_j)), \; i = 1, 2$$

Remplaçons les coordonnées des vecteurs x et y dans l'équation (3) par celles des vecteurs e_i de la base canonique, nous obtenons

$$\begin{cases} 2 = a_{11} - a_{21} \\ -1 = a_{12} - a_{22} \\ 2 = -a_{11} \\ -1 = -a_{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11} = -2 \\ a_{12} = 1 \\ a_{21} = -4 \\ a_{22} = 2 \end{cases}$$

ce qui donne

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f^*(x, y) = (-2x + y, -4x + 2y)$$

Examen de rattrapag d'algèbre 4, Juin 2018

Université L'Arbi Ben Mhidi, Oum-El-Bouaghi
Faculté SENV, Département de M.I.
Cotrôle de rattrapage d'algèbre 4
Juin 2018

Instructions. Nom, prénom et classe doivent être figurés sur la copie. Écrire plus lisiblement ave un stylo bleu ou noir seulement. Toute réponse non justifiée sera considérée nulle. Toute copie mal présentée ne sera pas corrigée.

Exercice 85 *Soit*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *Déterminer la forme bilinéaire φ_M de M.* (1 *point*)
2. *Selon les valeurs du réel a, déterminer l'orthogonal pour φ_M de $F = vect\{(1,-1,0)\}$* (2 *points*).
3. *Pour quelles valeurs de a, $F \oplus F^{\perp} = \mathbb{R}^3$* (2 *points*)
4. *Calculer le déterminant de M, en déduire l'orthogonal de $\mathbb{R}^3$ pour φ_M.* (1 *point*)
5. *Dans une base orthonormée des vecteurs propres, réduire la forme quadratique q de φ_M* (6 *points*)
6. *En déduire La signature de q* (2 *points*).
7. *Dans quel cas la forme q n'est pas définie* (1 *point*).
8. *Déterminer les formes linéaires $l_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dans la forme diagonale de q, forment -elles une base ? déterminer la base antéduale* (3 *points*).

Exercice 86 (4 *points*) *Utiliser les outils de l'espace Euclidien pour montrer l'inégalité suivante*

$$\forall n \in \mathbb{N}, n(n+1) \leq 2\left(n\sum_{i=1}^{n} i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Corrigé type de l'examen de rattrapage de l'algèbre 4, Juin 2018

Solution de l'exercice 1

1. La forme bilinéaire φ_M de M

$$\begin{aligned} \forall x &= (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3, \\ \varphi_M(x, y) &= x_1 y_1 + a x_1 y_2 + a x_2 y_1 - x_2 y_2 + 2 x_3 y_3 \end{aligned}$$

2. L'othogonal de $F = vect\{(1, -1, 0)\}$

$$F^{\perp} = \left\{X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \forall y \in F, \varphi_M(X, y) = 0\right\}$$

Posons $v = (1, -1, 0)$, alors $\forall y \in F$, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $y = \lambda v$, ce qui donne

$$\varphi_M(X, y) = \varphi_M(X, \lambda v) = \lambda \varphi_M(X, v)$$

Ainsi nous avons l'équivalence

$$\begin{aligned} \varphi_M(X, y) &= 0 \Leftrightarrow \varphi_M(X, v) = 0 \\ &\Leftrightarrow (1 - a) x + (1 + a) y = 0 \text{ et } z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Distinguons les cas suivants :

i) Pour $a = 1$ ou $a = -1$, nous avons

$$(1 + a) y = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ ou } (1 - a) x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Ainsi

$$\begin{aligned} F^{\perp} &= \{(x, 0, z), x, z \in \mathbb{R}\} \text{ le plan } xOz \\ &\text{ou} \\ F^{\perp} &= \{(0, y, z), x, z \in \mathbb{R}\} \text{ le plan } yOz \end{aligned}$$

ii) Pour $a \neq \pm 1$,

$$\begin{aligned} F^{\perp} &= \left\{x\left(1, \frac{1-a}{1+a}, 0\right) + z(0, 0, 1), x, z \in \mathbb{R}\right\} \text{ le plan } uOz, \\ \text{où } u &= \left(1, \frac{1-a}{1+a}, 0\right) \end{aligned}$$

3. Nous avons $F \subset xOy$ et $\dim F + \dim F^{\perp} = 1 + 2 = 3$, ainsi

i) Pour $a = 1$ ou $a = -1$, on a $F \cap F^{\perp} = \{0\}$, alors $F \oplus F^{\perp} = \mathbb{R}^3$.

ii) Pour $a \neq \pm 1$, pour que $F \cap F^{\perp} \neq \{0\}$, il faut que

$$v \in F^{\perp} \Leftrightarrow \varphi_M(v; v) = 0 \Rightarrow a = 0$$

Donc

$$a \neq 0 \Leftrightarrow F \cap F^{\perp} = \{0\} \Rightarrow F \oplus F^{\perp} = \mathbb{R}^3$$

4.
$$\det M = -2 - 2a^2 = -2\left(a^2+1\right) \neq 0, \ \forall a \in \mathbb{R}$$
ce qui implique que M est inversible, ainsi
$$\left(\mathbb{R}^3\right)^{\perp} = \ker \varphi_M = \ker M = \{0\}$$

5. Les vecteurs propres de M et les valeurs propres associées

i) Pour $a \neq 0$

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{pmatrix} -\frac{1}{a}\left(\sqrt{a^2+1}-1\right) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} &\leftrightarrow -\sqrt{a^2+1}, \\
\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} &\leftrightarrow 2, \\
\left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{a}\left(\sqrt{a^2+1}+1\right) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} &\leftrightarrow \sqrt{a^2+1}
\end{aligned}$$

Nous avons les vecteurs propres sont deux à deux orthogonaux car toutes les valeurs propres sont distinctes. Ainsi il suffit de les normaliser. Alors

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{a}{\sqrt{2a^2+2-2\sqrt{a^2+1}}}\begin{pmatrix} -\frac{1}{a}\left(\sqrt{a^2+1}-1\right) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\varepsilon_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
\varepsilon_3 &= \frac{a}{\sqrt{2a^2+2+2\sqrt{a^2+1}}}\begin{pmatrix} \frac{1}{a}\left(\sqrt{a^2+1}+1\right) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
P^{-1}MP &= diag\left(-\sqrt{a^2+1}, 2, \sqrt{a^2+1}\right) = P^{\top}MP, \\
\text{où } P &= \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{a^2+1}-1}{\sqrt{2a^2+2-2\sqrt{a^2+1}}} & 0 & \frac{\left(\sqrt{a^2+1}+1\right)}{\sqrt{2a^2+2+2\sqrt{a^2+1}}} \\ \frac{a}{\sqrt{2a^2+2-2\sqrt{a^2+1}}} & 0 & \frac{a}{\sqrt{2a^2+2+2\sqrt{a^2+1}}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Par conséquant, la forme diagonale de la forme quadratique est la suivante

$$\begin{aligned} q\left(X\right) &= -\sqrt{a^2+1}\; l_1^2 + 2\; l_2^2 + \sqrt{a^2+1}\; l_3^2, \\ \text{où } X &= l_1\varepsilon_1 + l_2\varepsilon_2 + l_3\varepsilon_3 \end{aligned}$$

ii) Pour $a = 0$, $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, la matrice est diagonale, ainsi la base orthonormée est la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$ et la forme diagonale de q est la suivante

$$q\left(X\right) = x^2 - y^2 + 2z^2, \text{ où } X = xe_1 + ye_2 + ze_3$$

6. La signature de q dans les deux cas est $(p, N) = (2, 1)$.
7. La forme quadratique n'est pas définie dans les deux cas car $p < 3$ et $N < 3$
8. D'après le resultat dans la question 6, les formes linéaires dans le cas où $a \neq 0$ sont données par

$$P\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P^{\top}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} l_1\left(x,y,z\right) &= \left(\frac{-\sqrt{2}\sqrt{a^2+1}-1}{2\sqrt{a^2-\sqrt{a^2+1}+1}}\right)x + \left(\frac{\sqrt{2}a}{2\sqrt{a^2-\sqrt{a^2+1}+1}}\right)y \\ l_2\left(x,y,z\right) &= z \\ l_3\left(x;y;z\right) &= \left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{a^2+1}+1}{2\sqrt{\sqrt{a^2+1}+a^2+1}}\right)x + \left(\frac{\sqrt{2}a}{2\sqrt{\sqrt{a^2+1}+a^2+1}}\right)y \end{aligned}$$

Alors l_1, l_2, l_3 sont les lignes de la matrice $P^{\top} = P^{-1}$, donc elle forment une base de $\left(\mathbb{R}^3\right)^*$, et la base antéduale est formée des colonnes de la matrice P, c'est donc $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$.

Dans le cas où $a = 0$, les formes linéaires sont juste les projections sur les axes ox, oy, oz, i.e.

$$l_1\left(x,y,z\right) = x, l_2\left(x,y,z\right) = y, l_3\left(x;y;z\right) = z,$$

et la base antéduale de la base $\{l_1, l_2, l_3\}$ est la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$.

Solution de l'exercice 2

Nous prenons

$$x = (1, 1, ..., 1)\,,\; y = (1, 2, ..., n) \in \mathbb{R}^n$$

Maintenant nous appliquons l'inégalité de Cauchy-schwarz dans l'espace Euclidien $(\mathbb{R}^n \langle \cdot, \cdot \rangle)$, nous obtenons

$$\langle x, y \rangle = 1 + 2 + ... + n \leq \|x\| \|y\| = \sqrt{n}\sqrt{1 + 2^2 + .. + n^2}$$

D'autre part

$$1 + 2 + ... + n = n\frac{n+1}{2}, \sqrt{n}\sqrt{1 + 2^2 + .. + n^2} = \left(n\sum_{i=1}^{n} i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

ce qui donne le resultat en question.

Bibliographie

[1] J. P. Escofier, Toute l'algèbre de la licence, 4th Edition, Dunod, 2000.

[2] Seymour Lipschutz,Algèbre Linéaire, Cours Et Problèmes 600 Exercices Résolus, Temple University Editeur : Mcgraw-Hill, Collection : Série Schaum, 1987.

[3] GILBERT STRANG, Introduction to Linear Algebra, Fifth Edition, Wellesley-Cambridge Press and SIAM, (2016)

[4] Mark Steinberger, A connection between number theory and linear algebra, http ://www.albany.edu/~mark/numlin.pdf, January 31,(2012), 1-15.

[5] Mark Steinberger, Algebra, PWS, (1994), 558 pages.