Algèbre 4 LMD

Série d'exercices N°2

Exercice 1. Soit $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$q(x, y, z) = x^2 - 2yz - xz$$

1. Pourquoi q est-elle une forme quadratique?
2. Trouver la matrice A de q.
3. Déterminer la forme bilinéaire symétrique φ associée à q. (la forme polaire)
4. Réduire la forme q en utilisant la méthode de Gauss.
5. En déduire le rang et la signature de q.
6. Déterminer une base $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ orthogonale pour q, en utilisant la réduction de Gauss.
7. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on considère le plan Π_λ d'équation $3x + 2y + \lambda z = 0$.
   Déterminer les valeurs de λ telles que Π_λ contienne au moins un vecteur isotrope non nul.

Exercice 2. On considère la forme quadratique $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie dans la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ par

$$q(x, y, z) = xy + yz + zx$$

1. Trouver la matrice A de q.
2. Réduire la forme q en utilisant la méthode de Gauss ; on précisera la nouvelle base $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$.
3. En déduire la signature de q.
4. Cette forme admet-elle des vecteurs isotropes ?
5. Réduire la forme q en utilisant une diagonalisation.

Algèbre 4 LMD

T.D N° 03

Exo1 : Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$ définie pour tout $u=(x,y,z,t)$ de $\mathbb{R}^4$ par :

$$q(u) = 9x^2 + 5y^2 + 8yz - 4yt + 5z^2 + 4zt + 8t^2$$

1) Donner une décomposition « en carrés » de q ; en déduire son rang et sa signature. La forme q est-elle dégénérée

2) Déterminer les vecteurs isotropes de q.

3) Déterminer le noyau de q.

Exo2 : Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$ définie pour tout $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ de $\mathbb{R}^4$ par :

$$q(x) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$$

1. Déterminer le rang et la signature de q.
2. Construire une base orthogonale relativement à q. Soit B' cette base, écrire la matrice associée à q dans cette base.

Exercice 3. On considère la forme hermitienne φ sur $\mathbb{C}^2$ représentée dans la base canonique $B=(e_1,e_2)$ par a matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -4 \end{pmatrix}$

o1.([redacted]) Déterminer la forme hermitienne sur $\mathbb{C}^2$ représentée par cette matrice.

o2. ([redacted]) Déterminer une base orthogonale de $\mathbb{C}^2$.

o3. ([redacted]) En déduire la matrice et la signature de cette forme par rapport à cette base.

Algèbre 4 LMD

Série d'exercices N°4

Exercice 1.

1. Montrer qu'une forme sesquilinéaire φ vérifie la condition suivante $\forall x, \forall y : \varphi(y,x) = -\overline{\varphi(x,y)}$ si, et seulement si, $i\varphi$ est hermitienne.
2. Montrer que l'ensemble $I = \{x \in E \ / \ q(x) = 0\}$ des vecteurs isotropes vérifie $E^{\perp} \subset I$.

Donner un exemple qui prouve, qu'il peut exister des vecteurs isotropes en dehors de $E^{\perp}$.

3. Déterminer l'ensemble des vecteurs isotropes des formes quadratiques non dégénérés suivantes.

$\mathbb{k} = \mathbb{R}$: $q = x^2 + y^2$, $q = x^2 - y^2$, $q = x^2 + y^2 - z^2$

Exercice 2. On considère la forme hermitienne φ sur $\mathbb{C}^2$ représentée dans la base canonique $B = (e_1, e_2)$ par la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Déterminer la forme hermitienne sur $\mathbb{C}^2$ représentée par cette matrice.
2. Déterminer une base orthogonale de $\mathbb{C}^2$, en utilisant une diagonalisation.
3. En déduire la matrice et la signature de cette forme par rapport à cette base.

Exercice 3. On considère la forme hermitienne φ sur $\mathbb{C}^3$ représentée dans la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ par la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & -i & i \\ i & 1 & 0 \\ -i & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Pourquoi A est hermitienne ?
2. Déterminer la forme hermitienne φ sur $\mathbb{C}^3$ représentée par A.
3. Déterminer la forme qudratique hermitienne q associée à φ.
4. Déterminer une base orthonormale $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$, en utilisant une diagonalisation.
5. Déterminer la forme hermitienne et la forme qudratique dans la nouvelle base.
6. En déduire le rang et la signature.