Chapitre 1 : Rappels mathématiques sur les nombres complexe

1.0

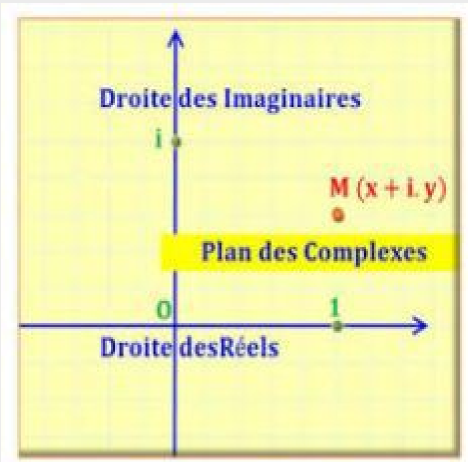
Janvier 2024

Table des matières

I Rappels mathématiques sur les nombres complexe

Les nombres complexes est un outil mathématique qui nous permettra de traiter et d'étudier des circuits électriques aussi complexes que possible d'une façon purement algébrique.

Après un rappel des lois mathématiques sur les nombres complexes. Dans ce chapitre, on va aborder les principaux dipôles électrique ainsi les lois fondamentales qui les régissent.



1. 1.1 Nombres complexes (NC)

L'équation $x^2+1=0$ n'a pas de solution dans l'espace des réels ***R***. Elle doit faire appel aux racines carrées d'un nombre négatif, c'est ce qui conduit à l'invention des nombres complexes. Dans **₵**, ensemble des nombres complexes, elle en a deux solutions : *i* et – *i* avec $i^2=-1$ *(cf. p.9)* *(cf. p.9)* .

La notation *i* fut introduite par Euler, le grand mathématicien suisse. Dans ce document, on notera à la place de *i*. En électricité, *i* est une notation utilisée pour l'intensité du courant [1].

2. 1.2 Représentation algébrique d'un NC

Soit un nombre complexe $z=a+jb$, avec a et b réels.

L'écriture *a + jb* est appelée la forme algébrique de z, avec :

a = Re (z) : qui représente la partie réelle de ***z***

et *b = Im(z)* , est la partie imaginaire de *z*.

On peut prendre ces deux valeurs (*a* et *b*) comme coordonnées dans le plan cartésien

(voir figure 1.1).

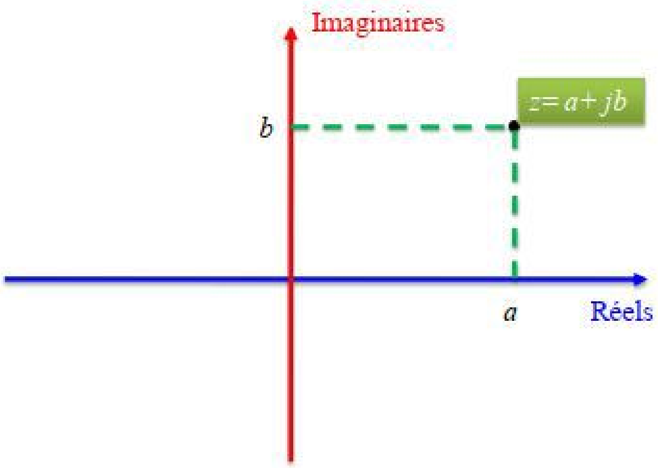


Figure 1.1 Représentation cartésienne d'un nombre complexe (z).

3. 1.3 Représentation géométrique d'un NC

Dans un plan muni d'un repère orthonormal *(, ,),* on associe à tout nombre complexe = + , le point *(,)* et réciproquement à tout point dans le plan, on peut lui associer un nombre complexe.

P (a, b) est l'image de *z = a + jb* et *z* est l'affixe du vecteur $\vec{OP}=a\vec{u}+b\vec{v}$.

4. 1.4 Représentation trigonométrique d'un NC

Soit *P* l'image de *z = a + jb* dans le plan rapporté au repère *(O; u, v).*

- ***Module*** de est le réel positif : $r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$
- ***Argument*** de *z (z ≠ 0)* est le nombre *θ* défini à *2kπ (k ∈ Z)* avec :

  $\sin(\theta)=\frac{b}{r}$

  $\cos(\theta)=\frac{a}{r}$

  $\theta=\arctan({}^{b}/_{a})$

  Géométriquement *θ* est, à *2kπ* près la mesure de l'angle *(u, OP)* . La forme trigonométrique de *z* est alors :

  $z=\rho(\cos(\theta)+\sin(\theta))$

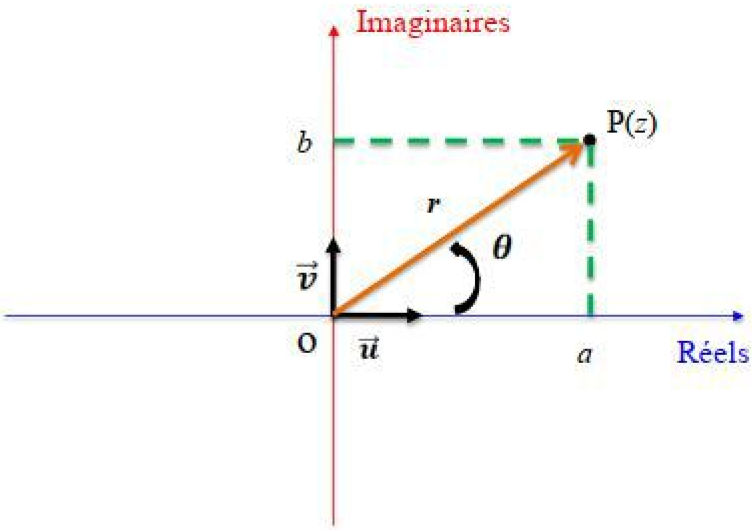


Figure 1.2 Représentation trigonométrique d'un NC (Z).

4.1. 1.4.1 Représentation polaire d'un NC

Soit un nombre complexe *(≠ 0)* , avec *,* le module et l'argument respectivement. La représentation polaire est donnée sous la forme suivante :

$z=[r,\theta]$ *(cf. p.9)* *(cf. p.9)*

4.2. 1.4.2 Représentation exponentielle d'un NC

La formule d'Euler relie l'exponentielle complexe avec le cosinus et le sinus dans le plan complexe :

$\forall\theta\in\mathbb{R}: e^{j\theta}=\cos(\theta)+\sin(\theta)$

Théorème

Soit θ un nombre réel, la formule d'Euler est exprimée :

$$\cos(\theta)=\frac{e^{j\theta}}{2}+\frac{e^{-j\theta}}{2}$$
$$\sin(\theta)=\frac{e^{j\theta}}{2j}-\frac{e^{-j\theta}}{2j}$$

Démonstration

Nous avons $e^{j\theta}=\cos(\theta)+j.\sin(\theta)$ et $e^{-j\theta}=\cos(-\theta)+j.\sin(-\theta)=\cos(\theta)-j.\sin(\theta)$

On a donc :

$$e^{j\theta}=\cos(\theta)+j.\sin(\theta)$$
$$e^{-j\theta}=\cos(\theta)-j.\sin(\theta)$$

En additionnant, puis en soustrayant les deux égalités membres à membres, on obtient les formules d'Euler.

Un nombre complexe peut alors s'écrire sous la forme exponentielle, représentée sur la figure 1.3 :

$z=e^{j\theta}$

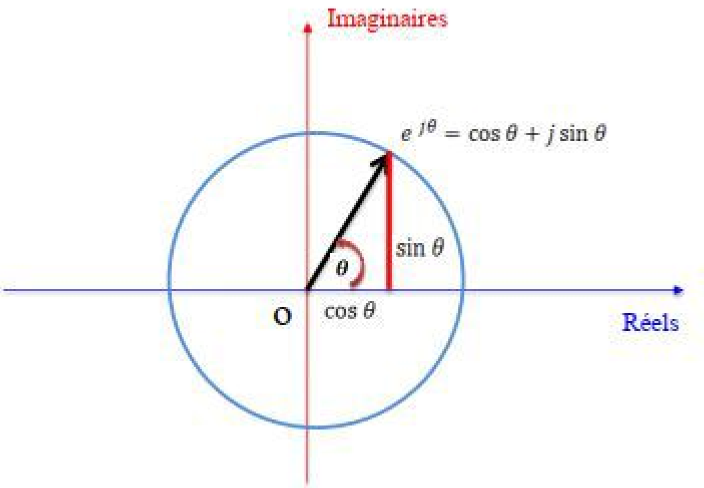


Figure 1.3 Forme exponentielle d'un NC

5. 1.5 Formule de Moivre

La puissance n-ième d'un nombre complexe z , est donnée la formule de Moivre :

$$(\cos(\theta)+j.\sin(\theta))^n=\cos(n\theta)+j.\sin(n\theta)$$

Démonstration

Pour un nombre complexe de module r = 1, on peut écrire z sous la forme :

$$z=e^{j\theta}$$

Pour un entier naturel n :

$Z^n=(\cos(\theta)+j.\sin(\theta))^n=(e^{j\theta})^n=e^{jn\theta}=\cos(n\theta)+j.\sin(n\theta)$ ainsi $(\cos(\theta)+j.\sin(\theta))^n=\cos(n\theta)+j.\sin(n\theta)$

6. 1.6 Opérations sur les NC

6.1. 1.6.1Complexe conjugué

Soit un nombre complexe $z=a+jb$ .Le complexe conjugué de est noté . C'est le même nombre mais avec une partie imaginaire opposée

$\bar{z}=a-jb$ *(cf. p.9)* *(cf. p.9)*

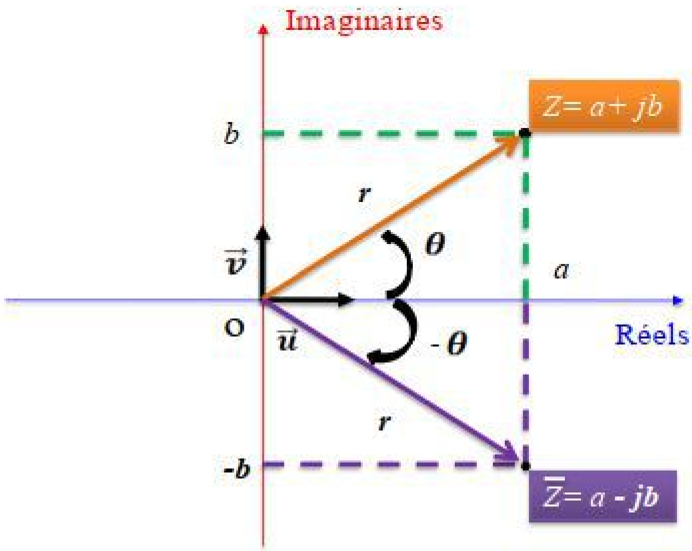


Figure 1.4 Complexe conjugué.

6.2. 1.6.2 Addition

L'addition de deux nombres complexes sous forme algébrique $z=a+jb$ et $\grave{z}=\grave{a}+j\grave{b}$

Consiste à additionner la partie réelle avec la partie réelle, et les parties imaginaires entre elles

$$z+\grave{z}=(a+\grave{a})+j(b+\grave{b})$$

On applique le raisonnement, la soustraction de nombres complexe est donnée par :

$$z-\grave{z}=(a-\grave{a})+j(b-\grave{b})$$

6.3. 1.6.3 Produit

Le produit de ces deux nombres est :

$$z*\grave{z}=(a*\grave{a})-(b*\grave{b})+j(a*\grave{b}-b*\grave{a})$$

Pour le produit, Il est souvent plus intéressant d'utiliser la forme polaire.

$$z=[r_1,\theta_1]$$
$$\grave{z}=[r_2,\theta_2]$$

Le produit de ces deux nombres sous la forme polaire est alors :

$$z*\grave{z}=[(r_1*r_2),(\theta_1*\theta_2)]$$

6.4. 1.6.4 Division

Pour la division, Il est souvent plus intéressant d'utiliser la forme polaire.

$$\frac{z}{\grave{z}}=\frac{[r_1,\theta_1]}{[r_2,\theta_2]}=[\frac{r_1}{r_2},(\theta_1-\theta_2)]$$

7. 1.7 Application des NC à l'électricité

Soit un courant alternatif sinusoïdal $i\ t$ dont l'expression en fonction du temps est donnée par :

$$i(t)=I\sqrt{2}(\sin(\omega t+\varphi))$$

A cette grandeur sinusoïdale, nous associons un vecteur de Fresnel. Nous pouvons alors associer à une représentation complexe

$$\underline{I}=[I,\varphi]=I.(\cos(\varphi)+j\sin(\varphi))$$

De même pour la tension appliquée, on peut écrire

$$\underline{U}=[U,\varphi]=U.(\cos(\varphi)+j\sin(\varphi))$$

Notons que, la représentation complexe est très efficace pour le calcul des paramètres des circuits électriques [2].

Ressources annexes

>

$$i^2 = -1$$

>

$$z = [r, \theta]$$

>

$$\bar{z} = a - jb$$