CHAPITRE III

TRANSFORMEE DE LAPLACE

Introduction

La transformée de Laplace est une opération intégrale qui permet de transformer une fonction d'une variable réelle en une fonction d'une variable complexe. Par cette transformation, une équation différentielle linéaire peut être représentée par une équation algébrique. Elle permet aussi de représenter des fonctions particulières (distribution de Heaviside, distribution de Dirac, etc.) de manière très élégante. Ce sont ces possibilités qui rendent la transformation de Laplace intéressante et populaire auprès des ingénieurs. Cette transformation a donné lieu à la technique du calcul opérationnel ou calcul symbolique qui facilite la résolution des équations différentielles linéaires qui représenteront les systèmes que nous allons étudier.

1. Transformée de Laplace

1.1. Définition

Soit *f*(t) une fonction a valeur réelle ou complexe de la variable réelle *t* définie de [0 à ∞ [et soit $p = \alpha + j\beta,$ une variable complexe; l'expression :

$$\mathcal{L}\big(f(t)\big) = F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt \qquad (3.1)$$

Où le symbole $\mathcal{L}(f(t))$ veut dire la transformée de Laplace. Dans ce cas, elle s'appelle la transformation de Laplace unilatérale.

La transformée de Laplace permet donc de transformée le problème du temps au domaine de la fréquence. Lorsqu'on obtient la réponse voulue dans le domaine de la fréquence, on transforme le problème à nouveau dans le domaine du temps, à l'aide de la transformée inverse de Laplace. Dans le domaine de Laplace, les dérivées et intégrales se combinent à l'aide de simples opérations algébriques ; pas besoin d'équations différentielles.

On divise la transformée de Laplace en deux types :

- **Transformée fonctionnelle** : c'est la transformée de Laplace d'une fonction spécifique, comme $sinwt, t, e^{-at}$, etc.

- **Transformée opérationnelle** : c'est une propriété mathématique de la transformée de Laplace, comme le calcul de la dérivée de *f*(*t*).

1.2. Ordre exponentiel

On dira qu'une fonction *f*(*t*) est d'ordre exponentiel à l'infini si et seulement si, il existe un couple de nombres réels α et M tel que :

$$|f(t)| = Me^{\alpha t}, \forall t \geq 0 \tag{3.2}$$

1.3. Existence de la Transformation de Laplace

Soit *f*(*t*) une fonction continue par morceau sur l'intervalle fermé [0, *a*] (pour tout *a*>0) et ayant un ordre exponentiel à l'infini tel que $|f(t)| = Me^{\alpha t}, \forall t \geq 0$; alors, la transformation de Laplace $\mathcal{L}(f(t))$ existe et est définie pour $p > \alpha$.

1.4. Unicité de la Transformation de Laplace

Soient *f*(*t*), et *g*(*t*), deux fonctions continues par morceaux avec un ordre exponentiel à l'infini. Supposons que:

$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{g(t)\}$

Alors *f* (*t*) = *g*(*t*) pour $t \in [0, D]$, pour tout *D* > 0, sauf peut être en un nombre fini de points.

Exemple 1:

Si *f* (*t*) = 1, alors : $\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(1) = \int_0^{\infty} e^{-pt}dt = \frac{1}{p}$

dans cet exemple, l'intégrale converge si et seulement si la partie réelle de *p* > 0

Exemple 2 :

Si $f(t) = e^{at}$ alors : $\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(e^{at}) = \int_0^{\infty} e^{at}e^{-pt}dt = \frac{1}{p-a}$,

Il y'a convergence si $R_e\{(p\text{-a})\} > 0$ ou $R_e\{p\} > R_e\ \{a\}$. Tel que R_e : représente la partie réelle.

1.4.1. Transformée Bilatérale

On définit aussi une transformation de Laplace sur le domaine *R* des nombres réels:

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-pt}f(t)dt \tag{3.3}$$

Cette transformation n'est pas beaucoup utilisée dans le domaine de l'engineering car on considère les signaux qui respectent la causalité et donc qui existent à partir d'un instant t_0.

1.5. Transformation de Laplace Inverse

On peut revenir de la transformée de Laplace à la fonction du temps *f*(*t*) par la transformation inverse suivante:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-pt}F(p)dp \quad (3.4)$$

où le chemin d'intégration peut être choisi quelconque dans le plan complexe à condition de rester dans le domaine de convergence de $F(p)$.

2. Propriétés de la Transformée de Laplace

2.1. Addition

La transformée de Laplace d'une somme de fonctions $f_1(t)$ et $f_2(t)$ est égale à la somme de leurs Transformées de Laplace.

$$\mathcal{L}(f_1 + f_2) = \mathcal{L}(f_1) + \mathcal{L}(f_2) \quad (3.5)$$

2.2. Multiplication par une constante

$$\mathcal{L}(cf) = c.\mathcal{L}(f) \quad (3.6)$$

2.3. Linéarité

Les propriétés d'addition et de multiplication par une constante lorsqu'elles sont combinées conduisent au fait que la transformée de Laplace est une transformation linéaire :

$$\mathcal{L}\left(\sum_{k=1}^{n} c_k f_k\,(t)\right) = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathcal{L}(f_k\,(t)) \quad (3.7)$$

Exemple : Déterminer la transformée de Laplace de la fonction $f(t) = coswt$. Celle-ci est obtenue en utilisant l'expression exponentielle.

$$f(t) = coswt = \frac{e^{jwt}+e^{-jwt}}{2}$$

En appliquant la transformée de Laplace et la propriété de linéarité, on a :

$$\mathcal{L}\big(f(t)\big) = F(p) = \mathcal{L}\left(\frac{e^{jwt}+e^{-jwt}}{2}\right) = \frac{1}{2}\mathcal{L}\big(e^{jwt}\big) + \frac{1}{2}\mathcal{L}\big(e^{-jwt}\big) = \frac{p}{p^2+w^2}$$

2.4. Dérivées

La dérivée première est obtenue par : $\mathcal{L}(f'(t)) = \mathcal{L}(pf(t) - f(0)) = pF(p) - f(0)$

La dérivée seconde : $\mathcal{L}\big(f''(t)\big) = \mathcal{L}(p^2 f(t) - pf(0) - f'(0)) = p^2F(p) - pf(0) - f'(0)$

La dérivée troisième :

$$\mathcal{L}(f^3(t)) = \mathcal{L}\left(p^3 f(t) - p^2 f(0) - pf'(0) - f''(0)\right) = p^3F(p) - p^2 f(0) - pf'(0) - f''(0)$$

Généralisation aux dérivées d'ordre n :

Supposons que $f(t)$, et ses dérivés $f^k(t)$, pour $k = 1,2,..,n$ sont continues par morceaux et ont un ordre exponentiel à l'infini. Alors on a:

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) = \mathcal{L}(p^n f(t) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f(0) - \cdots - f^{n-1}(0)) \quad (3.9)$$

Si on considère les valeurs initiales toutes nulles, on :

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) = p^n\mathcal{L}(f) = p^nF(p)$$

2.5. Théorème de la valeur initiale

On peut déterminer la valeur de la fonction *f*(*t*) à l'origine si on connaît la limite à l'infini de sa transformée de Laplace.

$$\boldsymbol{f(0^+) = \lim_{s\to\infty} pF(p)}$$

(3.10)

2.6. Théorème de la valeur finale

On peut déterminer la valeur de la fonction *f*(*t*) à l'infini si on connaît la limite pour s→0 de sa transformée de Laplace.

$$\boldsymbol{f(\infty) = \lim_{s\to 0} pF(p)}$$

(3.11)

2.7. Retard ou délai ou règle de translation en *t*

Si $\mathcal{L}\big(f(t)\big) = F(p)$ alors $\mathcal{L}\big(f(t-T)\big) = e^{-pT}F(p)$. e^{-pT} est appelé facteur de retard.

2.8. Règle de translation complexe en *p*

$$\mathcal{L}\big(e^{-aT}f(t)\big) = F(p+a)$$

Exemple : $\mathcal{L}(e^{-aT}coswt) = \frac{p+a}{(p+a)^2+w^2}$

2.9. Produit de deux fonctions

$$\mathcal{L}\big(f_1(t).f_2(t)\big) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-jw}^{c+jw} F_1(w).F_2(w)dw$$

2.10. Produit de convolution

$$\mathcal{L}^{-1}\big(F_1(p).F_2(p)\big) = \int_{0^+}^{t} f_1(\tau).f_2(t-\tau)d\tau = \int_{0^+}^{t} f_2(\tau).f_1(t-\tau)d\tau \qquad (3.12)$$

2.11. Soit *f*(*t*) une fonction continue par morceaux sur [0, *A*] (pour tout *A*>0) et a un ordre exponentiel à l'infini. Alors, on a: $\mathcal{L}\big(t^n f(t)\big) = (-1)^n F^{(n)}(p)$

Où $F^{(n)}$ est la dérivée d'ordre *n* de la fonction F.

2.12. Soit *f*(*t*) une fonction continue par morceaux sur [0, *A*] (pour tout *A*>0) et a un ordre exponentiel à l'infini. Supposons que la limite $lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)}{t}$, est finie. Alors, on a :

$$\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_p^{\infty} \mathcal{L}\big(f(\tau)\big)d\tau \qquad (3.13)$$

2.13. Règle de similitude (Changement d'échelle)

Soit *g* (*t*) = *f*(*at*) (a>0), alors $\mathcal{L}(f(at)) = \frac{1}{a}F(\frac{p}{a})$

3. Fonctions particulières

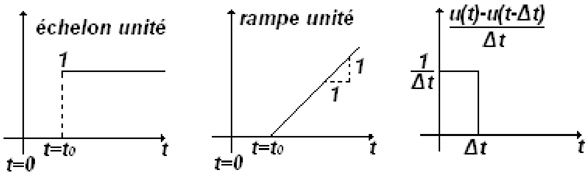
Dans l'étude des systèmes et des équations différentielles qui servent à les décrire, on utilise une famille particulière de fonctions, les ***fonctions singulières*** qui sont des fonctions de fonctions ***ou Distributions***. Pour bien comprendre ces fonctions singulières, il faut les étudier dans le cadre de la théorie des distributions qui est une théorie qui généralise la théorie des fonctions.

Les Distributions qu'on utilise plus fréquemment sont la distribution échelon unité (distribution de Heaviside). La distribution impulsion unité (Distribution de Dirac) et la distribution pente unité.

3.1. Fonction échelon unité (Distribution d'Heaviside) $\boldsymbol{\mu(t)}$

On appelle **fonction échelon unité associée** à t_0, la fonction du temps notée $u(t - t_0)$ et définie par

$$\mu(t-t_0) = \begin{cases} 1, & si\ t > t_0 \\ 0, & si\ t < t_0 \end{cases}$$



La transformée de Laplace de l'échelon unité: $\mathcal{L}\big(\mu(t-t_0)\big) = \int_{t_0}^{\infty} e^{-pt}dt = \frac{e^{-pt_0}}{p}\ \forall p > 0$

Pour le cas particulier ou $t_0 = 0$, on écrit : $\mathcal{L}\big(\mu(t)\big) = \frac{1}{p}$.

3.2. Fonction impulsion unité (Distribution de Dirac)

On peut définir l'impulsion unité $\delta(t)$ comme une fonction nulle partout sur $\mathbb{R}$ sauf en un seul point t_0 ou elle prend une valeur infinie.

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = t_0 \\ 0, & ailleurs \end{cases}$$

La Distribution de Dirac peut être approchée par le signal représenté dans la figure 3.1 , si on fait tendre ε vers 0, $\delta 1$ ne tend pas vers une limite au sens des fonctions, mais au sens des distributions car $\delta 1(t)$ n'est pas dérivable aux deux points de discontinuités. Cette limite est $\delta(t)$, qui est appelée la distribution de Dirac.

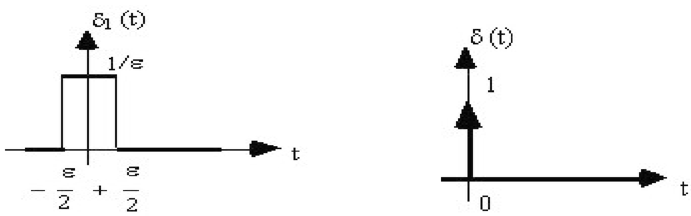


Figure 3.1. La Distribution de Dirac.

La distribution de Dirac peut être obtenue comme la dérivée de la distribution de Heaviside. La transformée de Laplace de la Distribution de Dirac est égale à l'unité: $\mathcal{L}\big(\delta(t)\big) = F(p) = 1$. On l'obtient par les opérations suivantes :

$\mathcal{L}(\delta(t)) = F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt}.\frac{1}{\varepsilon}dt = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} e^{-pt}dt = \left[\frac{e^{-pt}}{-p}\right]_0^{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}[\frac{e^{-p\varepsilon}}{-p}+\frac{1}{p}] = \lim_{\varepsilon\to 0}[\frac{1-e^{-p\varepsilon}}{p\varepsilon}] = 1$

(On utilise les développements limités ou la règle de l'Hospital). On observe que la surface est égale à 1 quel que soit ε donc : $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$

Cette fonction (distribution) à aussi la particularité suivante : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0)$.

3.3. Fonction puissance

Soit : $t^n U(t) = \begin{cases} t^n, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ $n \in \aleph$; Calculons donc $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}t^n dt = I_n$

Posons le changement de variables : $u = t^n, du = n.t^{n-1}dt$ et $dv = e^{-pt}dt, v = \frac{e^{-pt}}{-p}$; d'ou :

$I_n = \left[t^n\frac{e^{-pt}}{-p}\right] + \frac{n}{p}\int_0^{+\infty} e^{-pt}t^{n-1}dt$ (le premier crochet est nul)

D'où : $I_n = \frac{n}{p}I_{n-1}$ et donc : $I_0 = \frac{1}{p}$; $I_1 = \frac{1}{p^2}$; $I_2 = \frac{2}{p^3}$; ... ; $I_n = \frac{n!}{p^{n+1}}$

D'où :$F(p) = \mathcal{L}(t^n u(t)) = \frac{n!}{p^{n+1}}$ $(n \in \aleph)$

4. Méthode de Laplace (Calcul opérationnel)

L'utilisation de la méthode de Laplace pour résoudre les équations différentielles s'appelle le calcul opérationnel ou calcul symbolique. Il permet de connaître la solution complète d'un système linéaire soumis à une large variété de signaux quelconques transitoire ou périodique. Le traitement se fait généralement en quatre étapes comme on le verra dans l'exemple suivant :

1)- On établit l'équation différentielle à résoudre.

2)-On applique les propriétés de dérivation et autres de la transformée de Laplace à l'équation différentielle considérée. Par cette transformation, on passe du domaine du temps dans le domaine (complexe) de Laplace.

3)-On détermine la solution *Y*(*p*) dans le plan de Laplace que l'on développe en termes simples.

4)- Il reste à déterminer la solution *y*(*p*). Pour cela, on effectue la transformation inverse de Y(*p*) en utilisant la table des transformations.

4.1. L'expansion de *y*(*p*) en fonctions simples

Pour pouvoir inverser la transformée de Laplace, qui est exprimée comme : *Y*(*p*) = *N*(*p*)/*D*(*p*), on décompose l'équation obtenue en un produit de facteurs. Suivant la forme de décomposition obtenue, on distingue trois cas.

4.1.1. Les pôles de *Y*(*p*) sont tous simples

Supposant que *D*(*p*) possède des pôles p_0, p_1, p_2,...,p_n on peut écrire *Y*(*p*) sous la forme :

$$Y(p) = \frac{A}{p-p_0} + \frac{B}{p-p_1} + \cdots + \frac{R}{p-p_n} \qquad (3.14)$$

- On connaît la réponse temporelle pour chaque terme de la somme, il suffit de déterminer les coefficients A_1, A_2, A_n. Pour cela, on peut procéder par la méthode d'identification ou mieux encore en faisant appel à des techniques de décomposition des résidus. Par la technique des résidus, on procède de la manière suivante : pour déterminer A on multiplie les deux membres de l'équation par p - p_0 puis on fait tendre p vers p_0. On procède de la même manière pour les autres coefficients. Voici, un exemple d'illustration de cette technique.

Soit p_1, p_2 des pôles de $Y(p)$

$$Y(p) = \frac{1}{(p-p_1)(p-p_2)} = \frac{A}{p-p_1} + \frac{B}{p-p_2}$$

Le coefficient que l'on veut déterminer A, on multiplie Y(p) par (p - p_1) comme suit :

$$Y(p)(p-p_1) = \frac{A(p-p_1)}{p-p_1} + \frac{B(p-p_1)}{p-p_2}$$

On fait tendre s vers s_1 comme suit :$A = \lim_{p\to p_1} H(p)(p-p_1) = A.1 + B.0 = \frac{1}{p_1-p_2}$

De même pour B ; on trouve: $B = \lim_{p\to p_2} H(p)(p-p_2) = A.0 + B.1 = \frac{1}{p_2-p_1}$

Enfin sachant que A/($p - p_0$) est la transformée de $Ae^{p_0 t}$, on obtient la solution :

$$y(t) = \frac{1}{(p_1-p_2)}[e^{p_1 t} - e^{p_2 t}]$$

4.1.2. S'il existe un pôle multiple

Si une fonction à variable complexe à un pole simple, $H(p) = \frac{A}{p-a}$ on obtient A par :

$$A = \lim_{p\to a} H(p)(p-a)$$

si $H(p)$ a un pôle multiple d'ordre n: $H(p) = \frac{A}{(p-a)^2}$; on détermine A à l'aide de l'expression :

$$A = \lim_{p\to a}[\frac{1}{(n-1)}\frac{d^{n-1}}{dp^{n-1}}((p-a)^n H(p))]$$

<u>**Exemple**</u> : Soit $H(p) = \frac{1}{(p-p_1)^2(p-p_2)} = \frac{A}{(p-p_1)^2} + \frac{B}{p-p_2}$

$$A = \lim_{p\to p_1}[\frac{d}{dp}((p-p_1)^2\frac{1}{(p-p_1)^2(p-p_2)})] = -\frac{1}{(p_1-p_2)^2}$$

$$B = \lim_{z\to z_2}[\frac{1}{(z-z_2)^2}\frac{(z-z_2)}{(z-z_2)}] = \frac{1}{(z-z_2)^2}$$

De façon générale, si :

$Y(p) = \frac{N(p)}{(p+p_0)^q D_1(p)}$, alors, en décomposant, on a :

$$Y(p) = \frac{B_0}{(p-p_0)^q} + \frac{B_1}{(p-p_0)^{q-1}} + \cdots + \frac{B_{q-1}}{p-p_0} + \frac{N_1(p)}{D_1(p)}$$

4.1.3. Les pôles sont complexes conjugués

$Y(p) = \frac{N(p)}{(p+p_0)(p-p_0)}$ $avec\ p_0 = a + jb\ \ et\ \ p_0^* = a - jb$

On aura alors $Y(p) = \frac{A_0}{p+p_0} + \frac{A_1}{p-p_0}$ $\ avec\ \ A_0 = Ae^{j\varphi}\ et\ \ A_1 = Ae^{-j\varphi}$

Les coefficients correspondants de la décomposition en fractions simples seront aussi complexes conjugués (A et A[x]). La solution contient des termes oscillatoires :

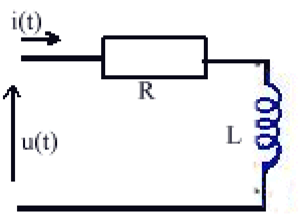
$$A.e^{j\phi}.e^{(a+jb)t} + A.e^{-j\phi}.e^{(a-jb)t} = 2A.e^{at}.\cos(bt+\phi) \qquad et.avec \quad \phi = \arg A$$

On est donc en présence d'une oscillation amortie si a est négatif, d'une oscillation amplifiée (divergente) si a est positif, d'une sinusoïde simple si a=0.

4.2. Applications de la transformée de Laplace

On considère la réponse du système correspondant au circuit ci-dessus, soumis à un signal échelon (supposé unitaire) U(t). La transformée de Laplace du signal échelon est : $\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{p}$

Pour $t > 0$ on a : $u(t) = E$ = constante. On cherche le courant $i\ (t)$ qui circule dans le circuit de la figure ci-dessous :



1- La loi d'Ohm permet d'écrire l'équation différentielle : $u(t)=R.i(t)+L.\frac{di}{dt}$

2-On applique la transformation de Laplace, dans chacun de ces éléments pris séparément, en se rappelant F'(p) = pF(p) ; ce qui donne : $U(p) = R.I(p) + L.p.I(p)$

En remplaçant $U(p)$ par E/p, l'équation différentielle s'exprime dans l'espace de Laplace par :

$U(p) = \frac{E}{p} = [R + L.p]I(p)$

3-On en déduit I(p) qu'on décompose en termes simples, soit :

$$I(p) = \frac{E}{p}\frac{1}{R+L.p} = \frac{E/_L}{p(p+R/L)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+R/L}$$

4-On applique les règles de détermination des coefficients, on obtient : $I(p) = \frac{E}{R}(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+R/L})$

La table des transformées nous donne la solution : $\quad i(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{\frac{-R}{L}t})$

5. Modélisation

L'automatique est la science étudiant les automatismes et traitant de la substitution de mécanismes automatiques à toutes les opérations susceptibles d'être exécutées par l'homme. Cette science était anciennement dénommée *cybernétique*. Parmi les composantes de cette science, nous allons plus particulièrement nous intéresser à *la commande (automatique) des procédés dynamiques continus*.

Dans ce cadre, on distingue *l'automatique linéaire ou non linéaire, continue (commande analogique) ou à temps discret (commande numérique).*

Il faut savoir que la commande (ou *asservissement*) d'un procédé physique nécessite :

- l'identification (modèle de comportement) ou la modélisation (modèle de connaissance) de son comportement dynamique → *mise en équation* ;
- la synthèse d'une loi de commande → *fonction de transfert et transformation de Laplace*;
- l'implantation physique de cette loi de commande → *correction*.

La modélisation d'un système physique fait intervenir un système d'équations différentielles. Sa résolution (plus ou moins difficile) permet la détermination de régimes transitoires du système dynamique. Ces régimes peuvent aussi être déterminés en utilisant le calcul opérationnel fondé sur *la transformation de Laplace*.

Définition de la transformée de Laplace

Soit $f(t)$ une fonction causale[1], alors *la transformée de Laplace* de f est $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt$. On dit que $F(p)$ est *l'image de f(t) dans le domaine symbolique* et que $f(t)$ est *l'image de F(p) dans le domaine temporel*. On appelle *transformation de Laplace* l'application $\mathcal{L}$ telle que $\mathcal{L}(f) = F$.

Propriétés

On suppose que $F(p)$ et $G(p)$ sont les images de $f(t)$ et $g(t)$, deux fonctions causales.

Unicité : Toute fonction temporelle $f(t)$ possède une image unique $F(p)$; et réciproquement.

Linéarité

- L'image de 0 est 0.
- L'image de $k.\ f(t)$ est $k.\ F(p)$.
- L'image de $f(t) + g(t)$ est $F(p) + G(p)$.

Dérivation – Intégration

- L'image de $f'(t)$, *la dérivée de f* est $pF(p) - f(0)$ avec le plus souvent, $f(0) = 0$.

[1] Nulle sur $]-\infty, 0[$

- L'image de $\int_0^t f(u)du$, *la primitive de f* est $\frac{1}{p}F(p)$.

Facteur d'échelle : L'image de $\mathbf{f(a.t)}$ est $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a}}\mathbf{F}(\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{a}})$.

Retard et Amortissement

- L'image de $f(t-\tau)$ est $e^{-\tau p}F(p)$.
- L'image de $e^{wt}f(t)$ est $F(p+w)$.

Théorème des valeurs finales et initiales

- $f(0) = \lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{p\to\infty} pF(p)$
- $\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{p\to 0^+} pF(p)$

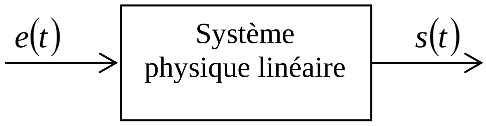
Convolution : L'image du produit de convolution $\boldsymbol{f(t) * g(t)}$ est $\boldsymbol{F(p) \times G(p)}$.

6. Transformées usuelles

Image symbolique	**Image temporelle de fonctions causales**
$\frac{1}{p}$	Échelon
1	Dirac
$\frac{1}{p^2}$	Rampe
$\frac{1}{p+a}$	e^{-at}
$\frac{w}{p^2+w^2}$	$\sin(wt)$
$\frac{w}{p^2-w^2}$	$\sinh(wt)$
$\frac{w}{(p+a)^2+w^2}$	$e^{-at}\sin(wt)$
$\frac{p}{p^2+w^2}$	$\cos(wt)$
$\frac{p}{p^2-w^2}$	$\cosh(wt)$
$\frac{p+a}{(p+a)^2+w^2}$	$e^{-at}\cos(wt)$
$\frac{n!}{p^{n+1}}$	t^n
$\frac{1}{p(1+\tau p)}$	$1-e^{-\frac{t}{\tau}}$
$\frac{1}{(p+a)^2}$	te^{-at}

7. Fonction de transfert

Un *transfert* est la transmittance $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$ d'un système linéaire générant un signal de sortie $s(t)$ à partir d'une entrée $e(t)$.



Sachant que $s(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(p)E(p)\}$, on a $s(t)) = f(t) * e(t)$ où $h(t)$ est *la réponse impulsionnelle* du système physique.

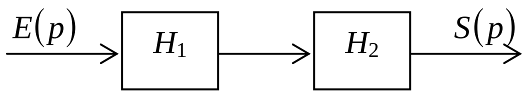
8. Opérations sur les transferts

8.1. Transferts en cascade

Considérons le schéma suivant :

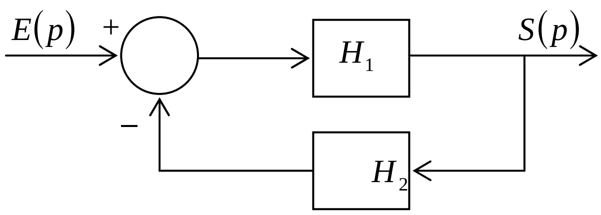
La transmittance se calcule

$H(p) = H_1(p) \times H_2(p)$.



8.2. Transferts en réaction

Considérons le schéma suivant :



La transmittance s'écrit : $H(p) = \frac{H_1(p)}{1+H_1(p)H_2(p)}$.

<u>Réprésentation de la réponse fréquentielle d'un transfert</u>

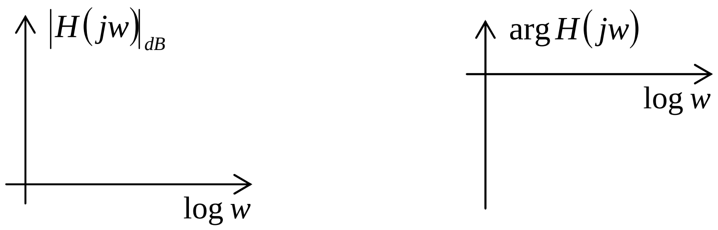
La réponse fréquentielle traduit le comportement en régime sinusoïdale, elle est obtenue en remplaçant p par jw où w est *la pulsation* exprimé en *rad/s* . *La fréquence f* et *la période T* sont reliés à la pulsation par les relations $w = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$.

Une réponse fréquentielle peut être caractérisée par son *module* et par son *argument* :

$H(jw) = \rho(w)e^{j\theta(w)}$. Le gain peut être exprimé en décimalρ ou en décibel $\rho_{dB} = 20log\rho$.

9. Diagramme de Bode

Le diagramme de Bode consiste en un diagramme de gain en *dB* et un diagramme de phase

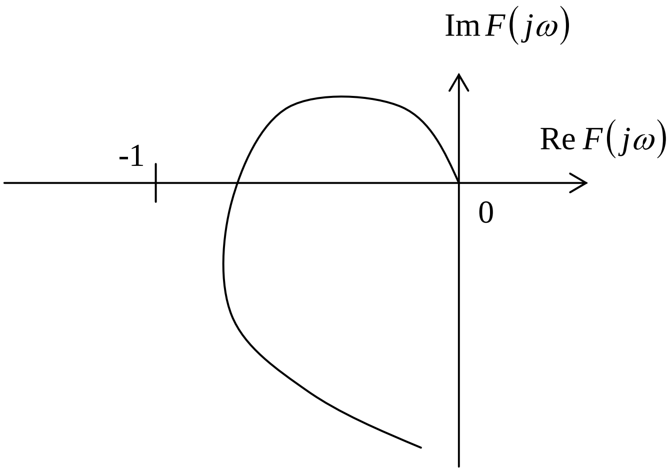


en *rd* ou *d°*. Pour les tracer, on s'aide des *diagrammes asymptotiques de Bode*. Ils sont définis par morceaux en étudiant localement (pour des bandes de fréquence données) le comportement asymptotique de la réponse fréquentielle.

On se ramène, autant que l'on peut, à un produit de transferts du 1er et 2ème ordre, pour lesquels on connaît bien les diagrammes asymptotiques ; et on procède par superposition pour obtenir le diagramme de Bode final.

10. Plan de Nyquist – Abaque de Hall

Représentation fréquentielle de $F(jw)$ sur *le lieu de Nyquist* :



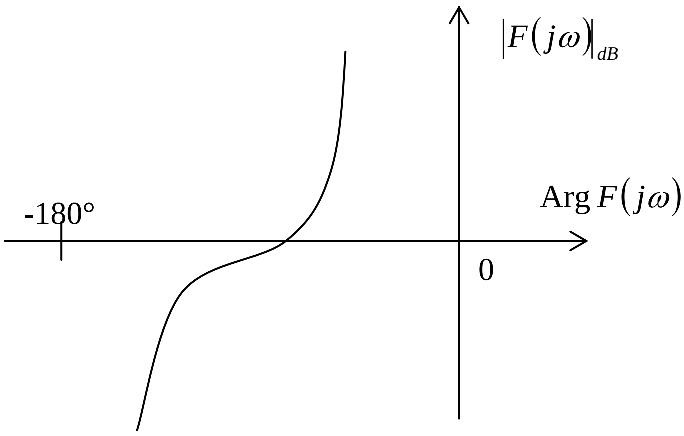
Supposons que $F(jw)$ désigne la *FTBO* d'un procédé. On a alors : $FTBF(jw) = \frac{A(jw)}{1+F(jw)}$. Par conséquent, *le point (-1 , 0) est critique* sur le lieu de Nyquist.

Par ailleurs, la distance au point critique sur le plan donne $|1 + F(jw)|$.

L'abaque de Hall donne les modules et arguments de $\frac{A(jw)}{1+F(jw)}$ pour un $F(jw)$ donné. On peut en déduire par la suite les modules et arguments de la *FTBF* en calculant $B(jw)$, et en appliquant la relation suivante : $FTBF(jw) = \frac{F(jw)}{1+F(jw)} \times B^{-1}(jw)$.

11. Plan de Black (Nichols) – Abaque de Black

Représentation fréquentielle de $F(jw)$ sur *le lieu de Black* :



Le point critique est maintenant (-180° , 0 dB).

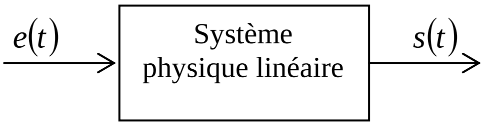
Pour un $F(jw)$ donné, **l'abaque de Black** donne les modules et arguments de $\frac{F(jw)}{1+F(jw)}$.

12. Analyse temporelle et fréquentielle

On note $F(p)$ la <u>transformée de Laplace</u> d'une fonction $f(t)$: $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$

12.1 -Transformée d'une équation différentielle à coefficients constants, fonction de transfert

On considère le système physique suivant



dans lequel $e(t)$ et $s(t)$ sont liés par une équation différentielle linéaire à coefficients constants sans terme constant :

$$a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + \cdots + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_0 s(t) = b_n \frac{d^m e(t)}{dt^m} + \cdots + b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_0 e(t)$$

Le système est alors linéaire.

Si les conditions initiales suivantes sont nulles :

$$n\frac{d^{n-1}s(0)}{dt^n} = \cdots = \frac{ds(0)}{dt} = s(0) = \frac{d^{m-1}e(0)}{dt^m} = \cdots = \frac{de(0)}{dt} = e(0) = 0$$

La transformée de l'équation différentielle sans terme constant s'exprime par :

$$a_n\frac{d^n s(t)}{dt^n} + \cdots + a_1\frac{ds(t)}{dt} + a_0 s(t) = b_n\frac{d^m e(t)}{dt^m} + \cdots + b_1\frac{de(t)}{dt} + b_0 e(t)$$

$\Downarrow$ Laplace et conditions initiales nulles

$$a_n p^n S(p) + a_{n-1}p^{n-1}S(p) + \cdots + a_0 S(p) = b_m p^m E(p) + b_{m-1}p^{m-1}E(p) + \cdots + b_0 E(p)$$

On peut alors définir une fonction de transfert

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_0}$$

c'est à dire

$$S(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_0}E(p) = F(p).E(p)$$

n = ordre du système

$K_p = \lim_{p\to 0} F(p)$: gain statique du système

$F(p)$ peut se mettre sous la forme $F(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \cdots + b_0}{(a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_0).p^{\alpha}}$, α = classe du système (éventuellement α = 0) = nombre d'intégrations dans le système)

12.2. Systèmes du premier ordre

Ce sont les systèmes tels que : $\tau.s'(t) + s(t) = K.e(t)$

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1+\tau p}$$

La fonction de transfert s'écrit

K : Gain statique

τ : constante de temps

Etude temporelle

Réponse à un échelon $e(t)=E_0.u(t)$;

$$E(p)=\frac{E_0}{p}$$

$$S(p)=\frac{K}{1+\tau.p}.\frac{E_0}{p}$$

Avec les théorèmes sur les limites, il vient :

$$s(0+)=\lim_{p\to\infty} p.S(p)=\lim_{p\to\infty}\frac{E_0.k}{1+\tau.p}=0$$

$$s(\infty)=\lim_{p\to 0} p.S(p)=\lim_{p\to 0}\frac{E_0.K}{1+\tau.p}=E_0.K$$

$$\dot{s}(0+)=\lim_{p\to\infty} p.(p.S(p)-s(0+))=\lim_{p\to\infty} p\frac{E_0.K}{1+\tau.p}=\frac{E_0.K}{\tau}$$

Expression de *s*(*t*)

$$s(t)=E_0.K.(1-e^{-t/\tau}u(t)$$

Temps de réponse t_r à 5% tel que $s(t_r)=0,95.s(\infty)$

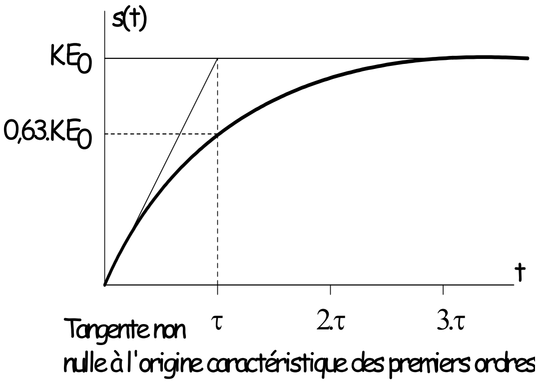
$$s(t_r)=E_0.K(1-e^{-\frac{t_r}{\tau}})=0,95.s(\infty)=0,95.E_0.K$$

$$\Rightarrow 1-e^{-\frac{t_r}{\tau}}=0,95$$ ou

$$t_r=-\tau.\ln(0,05)\approx 2,99573.\tau$$

D'où : $t_r=3\tau$

Tracé de la réponse indicielle



Etude fréquentielle

$$H(j.\omega)=\frac{K}{1+\tau.j.\omega}$$

Gain

$$G(\omega)=|H(j.\omega)|=\frac{K}{\sqrt{1+(\tau.\omega)^2}}$$

Gain en décibels

$$G_{dB}(\omega)=20.Log|H(j.\omega)|=20.LogK-20.Log\sqrt{1+(\tau.\omega)^2}$$

$$G_{dB}(\omega\approx 0)=\approx 20.LogK$$

$$G_{dB}(\omega=1/\tau)=\approx 20.LogK-20.Log\sqrt{2}=Gdb(0)-3dB$$

$$G_{dB}(\omega\to\infty)=20.LogK-20.Log\tau.\omega=20.Log\frac{K}{\tau}-20.Log\omega$$

Déphasage

$$\phi(\omega)=ArgH(j.\omega)=Arg\frac{K}{1+\tau.j.\omega}=Arctan(\tau.\omega)$$

$$\phi(\omega\approx 0)\approx 0$$

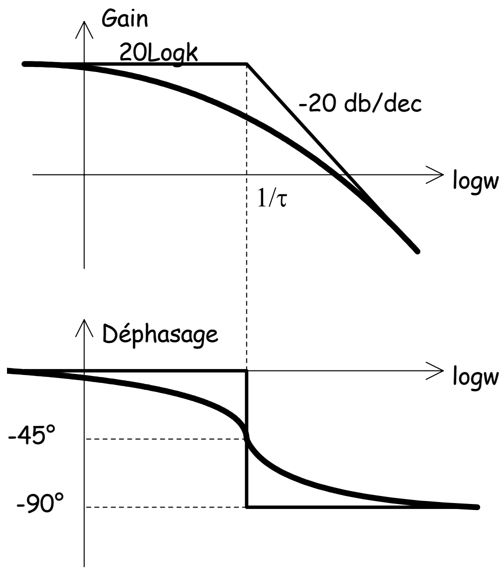
$$\phi(\omega=1/\tau)=-45°$$

$$\phi(\omega\to\infty)\approx -90°$$

Pulsation de coupure telle que $G(\omega_c)=1$ si K>1 :

$$\frac{K}{\sqrt{1+(\tau.\omega_c)^2}}=1 \text{ ou } K^2=1+(\tau.\omega_c)^2 \Rightarrow \omega_c=\sqrt{\frac{K^2-1}{\tau}}$$

Tracé du diagramme de Bode



12.3. Systèmes du second ordre

Ce sont les systèmes tels que : $\frac{s''(t)}{w_0{}^2} + 2z\frac{s'(t)}{w_0} + s(t) = K.e(t)$

- $\omega_0 > 0$, **pulsation propre non amortie** (en $\mathrm{rad.s^{-1}}$) (pulsation du système si z=0). On note quelquefois ω_n, pulsation naturelle.
- *$z \geq 0$*, **coefficient d'amortissement** du système (sans dimension)
- *$K > 0$*, **gain statique** du système ($\frac{\text{unité de s(t)}}{\text{unité de e(t)}}$).

La fonction de transfert s'écrit : $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{\frac{p^2}{w_0} + 2z\frac{p}{w_0} + 1}$

<u>Etude temporelle</u>

<u>Réponse à un échelon</u> $e(t)=E_0.u(t)$ c'est-à-dire $E(p)=\frac{E_0}{p}$

$$S(p)=\frac{K}{\frac{p^2}{\omega_0}+2.z.\frac{p}{\omega_0}+1}.\frac{E_0}{p}$$

<u>Avec les théorèmes sur les limites, il vient</u> :

$$s(0+)=0 \;;\; s(\infty)=K.E_0 \;;\; \frac{ds(0+)}{dt}=0$$

<u>Expression de *s(t)* :</u> Elle dépend de *z* ; $\Delta'=z^2-1$

<u>Si z > 1</u> : deux racines $p_{1,2}=\omega_0(-z\pm\sqrt{\Delta'})=\omega_0(-z\pm\sqrt{z^2-1})$. **La réponse est apériodique (sans dépassement)**

et $S(p)=\frac{K.p_1.p_2}{p.(p-p_1).(p-p_2)}=\frac{K}{p.(\frac{p}{p_1}-1).(\frac{p}{p_2}-1)}.E_0$

C'est-à-dire

$$S(p)=\frac{K}{p(1+T_1.p).(1+T_2.p)}.E_0=\frac{K}{p(T_1.T_2.p^2+(T_1+T_2).p+1)}.E_0$$

Avec $T_{1,2}=-\frac{1}{p_{1,2}}$ et

$$\boxed{s(t)=K.E_0.[1+\frac{1}{T_2-T_1}(T_1.e^{-\frac{t}{T_1}}-T_2.e^{-\frac{t}{T_2}})].u(t)}$$

<u>Si z=1</u> : une racine double $p=\frac{1}{T_0}$. **C'est le régime apériodique le plus rapide**.

et

$$\boxed{s(t)=K.E_0.[1-(1+\frac{t}{T_o}).e^{-\frac{t}{T_0}}].u(t)}$$

<u>Si z<1</u> : deux racines complexes conjuguées. **La réponse est pseudo-oscillante (avec dépassement)**

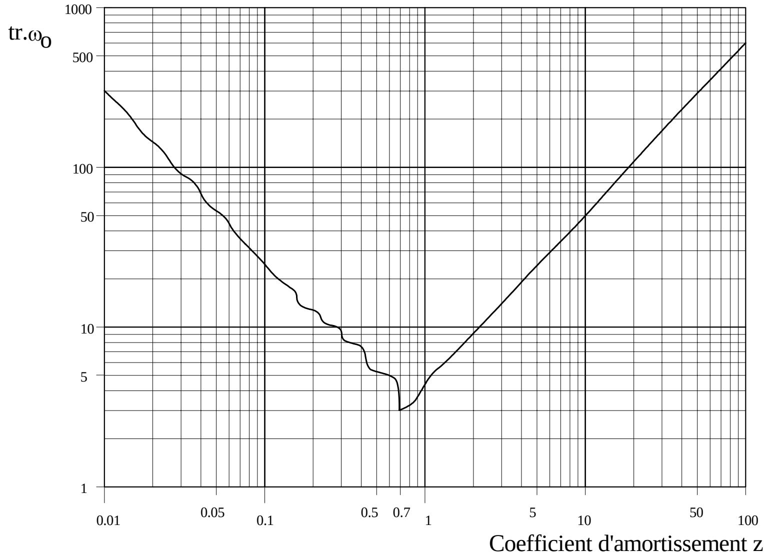
$$\boxed{s(t)=K.E_0.[1-\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}.e^{-z.\omega_0.t}.\mathrm{Sin}(\omega_0.\sqrt{1-z^2}.t-\varphi)].u(t)}$$

avec $\varphi=\mathrm{ArcTan}\frac{\sqrt{1-z^2}}{-z}$

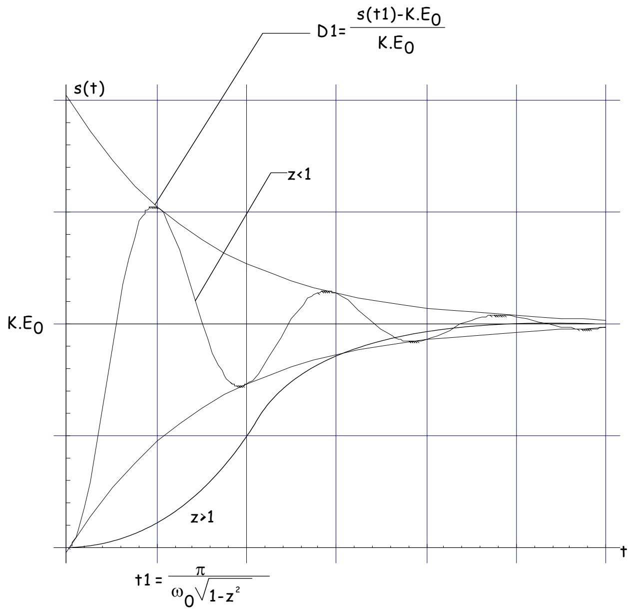
Pseudo-pulsation réelle : $w_p = w_0 . \sqrt{1 - z^2}$

Valeur relative du premier dépassement : $D_1 = e^{-(\frac{\pi . z}{\sqrt{1-z^2}})}$

Temps de réponse t_r à 5% tel que $s(t_r)=0,95.s(\infty)$. Il faut utiliser l'abaque des temps de réponse réduits :



Tracé de la réponse indicielle



Etude fréquentielle

$$H(j.\omega)=\frac{K}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}+2.j.z.\frac{\omega}{\omega_0}}$$

Gain

$$G(u)=|H(u)|=\frac{K}{\sqrt{(1-(\frac{\omega}{\omega_0})^2)^2+4.z^2.(\frac{\omega}{\omega_0})^2}}=\frac{K}{\sqrt{1+2.(2.z^2-1).(\frac{\omega}{\omega_0})^2+(\frac{\omega}{\omega_0})^4}}$$

Gain en décibels

$$GdB(u\omega=20.LogG(\omega)=20.LogK-20.Log\sqrt{(\frac{\omega}{\omega_0})^4+2.(\frac{\omega}{\omega_0})^2.(2.z^2-1)+1}$$

$GdB(\omega\approx 0)\approx 20.LogK$ $\quad GdB(\omega=\omega_0)\approx 20.LogK-20.Log(2.z)$ $\quad GdB(\omega\to\infty)=20.LogK-40.Log(\omega)$

Si $z<\frac{1}{\sqrt{2}}\approx 0,7$, le gain passe par un maximum(résonance) pour : $w_r = w_0.\sqrt{1-2z^2}$.

La valeur du maximum est $G(\omega_r=\omega_0.\sqrt{1-2.z^2})=\frac{K}{2.z.\sqrt{1-z^2}}$

Déphasage

$$\phi(\omega)=Arg(H(\omega))=Arg(\frac{1}{H(\omega)})=Arctan(\frac{2.z.(\frac{\omega}{\omega_0})}{(\frac{\omega}{\omega_0})^2-1})$$

$\phi(\omega\approx 0)\approx 0$ $\quad \phi(\omega=\omega_0)\approx -90$ $\quad \phi(\omega\to\infty)\approx -180°$

Tracé du diagramme de Bode