Table des matières

Chapitre 3

Fonctions réelles à une variable réelle

3.1 Notions

Definition 3.1.1. Une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles est une application $f : U \to \mathbb{R}$, où U est une partie de $\mathbb{R}$. En général, U est un intervalle ou une réunion d ?intervalles. On appelle U le domaine de définition de la fonction f.

Exemple. La fonction inverse :

$$f :]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x}.$$

Le graphe d'une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ est la partie Γ_f de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in U\}.$$

.

3.2 Opérations sur les fonctions

Soient $f : U \to \mathbb{R}$ et $g : U \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur une même partie U de $\mathbb{R}$. On peut alors définir les fonctions suivantes :

1. la somme de f et g est la fonction $f + g : U \to \mathbb{R}$ définie par $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ pour tout $x \in U$;
2. le produit de f et g est la fonction $f \times g : U \to \mathbb{R}$ définie par $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$ pour tout $x \in U$;
3. la multiplication par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ de f est la fonction $\lambda \cdot f : U \to \mathbb{R}$ définie par $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$ pour tout $x \in U$.

Exemple. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :

1. f est croissante sur U si $\forall x, y \in U,\ x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$;
2. f est strictement croissante sur U si $\forall x, y \in U,\ x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$;
3. f est décroissante sur U si $\forall x, y \in U,\ x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$;
4. f est strictement décroissante sur U si $\forall x, y \in U,\ x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$;
5. f est monotone (resp. strictement monotone) sur U si f est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante) sur U.

Exemple. 1. La fonction racine carrée ($[0, +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x}$) est strictement croissante.

2. Les fonctions exponentielle exp : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et logarithme ln : $]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ sont strictement croissantes.
3. La fonction valeur absolue ($\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|$) n ?est ni croissante, ni décroissante. Par contre, la fonction ($[0, +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|$) est strictement croissante.

3.3 Fonctions majorées, minorées, bornées

Definition 3.3.1. Soient $f : U \to \mathbb{R}$ et $g : U \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Alors :

1. $f \geq g$ si $\forall x \in U,\ f(x) \geq g(x)$;
2. $f \geq 0$ si $\forall x \in U,\ f(x) \geq 0$;
3. $f > 0$ si $\forall x \in U,\ f(x) > 0$;
4. f est dite constante sur U si $\exists a \in \mathbb{R}\ \forall x \in U,\ f(x) = a$;
5. f est dite nulle sur U si $\forall x \in U,\ f(x) = 0$.

Definition 3.3.2. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :

1. f est majorée sur U si $\exists M \in \mathbb{R}\ \forall x \in U,\ f(x) \leq M$;
2. f est minorée sur U si $\exists m \in \mathbb{R}\ \forall x \in U,\ f(x) \geq m$;
3. f est bornée sur U si f est à la fois majorée et minorée sur U, c ?est-à-dire si $\exists M \in \mathbb{R}\ \forall x \in U,\ |f(x)| \leq M$.

3.4 Limites

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un point de I ou une extrémité de I.

Definition 3.4.1. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f a pour limite ℓ en x_0 si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

On dit aussi que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers x_0. On note alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ ou bien $\lim_{x_0} f = \ell$.

Remarque 3.4.1. 1. L'inégalité $|x - x_0| < \delta$ équivaut à $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. L'inégalité $|f(x) - \ell| < \epsilon$ équivaut à $f(x) \in]\ell - \epsilon, \ell + \epsilon[$.

2. On peut remplacer certaines inégalités strictes « $<$ » par des inégalités larges « $\leq$ » dans la définition :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x - x_0| \leq \delta \implies |f(x) - \ell| \leq \epsilon.$$

3. Dans la définition de la limite

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \epsilon,$$

le quantificateur $\forall x \in I$ n'est là que pour être sûr que l'on puisse parler de $f(x)$. Il est souvent omis et l'existence de la limite s'écrit alors juste :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

4. N'oubliez pas que l'ordre des quantificateurs est important, on ne peut pas échanger le $\forall \epsilon$ avec le $\exists \delta$: le δ dépend en général du ϵ. Pour marquer cette dépendance on peut écrire : $\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0$.

Exemple. 1. $\lim_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$ pour tout $x_0 \geq 0$,

2. la fonction partie entière E n'a pas de limite aux points $x_0 \in \mathbb{Z}$.

Soit f une fonction définie sur un ensemble de la forme $]a, x_0[\cup]x_0, b[$.

Definition 3.4.2. 1. On dit que f a pour limite $+\infty$ en x_0 si

$$\forall A > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x - x_0| < \delta \implies f(x) > A.$$

On note alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

2. On dit que f a pour limite $-\infty$ en x_0 si

$$\forall A > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x - x_0| < \delta \implies f(x) < -A.$$

   On note alors $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle de la forme $I =]a, +\infty[$.

Definition 3.4.3. 1. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f a pour limite ℓ en $+\infty$ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists B > 0, \forall x \in I, x > B \implies |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

   On note alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim_{+\infty} f = \ell$.

2. On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si

$$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in I, x > B \implies f(x) > A.$$

   On note alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

On définirait de la même manière la limite en $-\infty$ pour des fonctions définies sur les intervalles du type $]-\infty, a[$.

Exemple. On a les limites classiques suivantes pour tout $n \geq 1$:

1. $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$
2. $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x^n}\right) = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{x^n}\right) = 0$.

Exemple. Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ avec $a_n > 0$ et $Q(x) = b_m x^m +$

$b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ avec $b_m > 0$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{si } n > m, \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{si } n = m, \\ 0 & \text{si } n < m. \end{cases}$$

Limite à gauche et à droite Soit f une fonction définie sur un ensemble de la forme $]a, x_0[\cup]x_0, b[$.

Definition 3.4.4.

1. On appelle limite à droite en x_0 de f la limite de la fonction f définie sur $]x_0, b[$ en x_0 et on la note $\lim_{x \to x_0^+} f$.
2. On définit de même la limite à gauche en x_0 de f : la limite de la fonction f définie sur $]a, x_0[$ en x_0 et on la note $\lim_{x \to x_0^-} f$.
3. On note aussi $\lim_{x \to x_0, x > x_0} f(x)$ pour la limite à droite et $\lim_{x \to x_0, x < x_0} f(x)$ pour la limite à gauche.

Dire que $f : I \to \mathbb{R}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ à droite en x_0 signifie donc :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, x_0 < x < x_0 + \delta \implies |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

Si la fonction f a une limite en x_0, alors ses limites à gauche et à droite en x_0 coïncident et valent $\lim_{x_0} f$.

Réciproquement, si f a une limite à gauche et une limite à droite en x_0 et si ces limites valent $f(x_0)$ (si f est bien définie en x_0), alors f admet une limite en x_0.