# Table des matières

# Chapitre 4

# Application aux fonctions élémentaires

## 4.1 Fonction logarithme et fonction exponentielle

### 4.1.1 Fonction logarithme

**Definition 4.1.1.** On appelle logarithme népérien et on note ln l'unique primitive s'annulant en 1 de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

.

**Proposition 4.1.1.** La fonction ln vérifie (pour tout $a, b > 0$) :

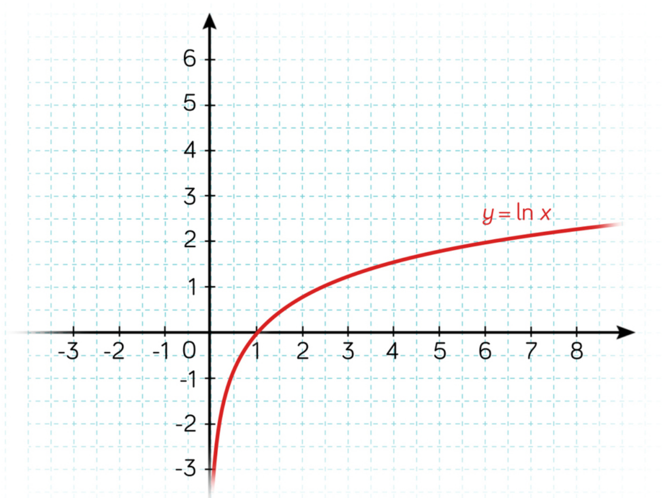
1. $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$,
2. $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$,

3. $\ln(a^n) = n \ln a \quad$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$),

4. ln est une fonction continue, strictement croissante et définit une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$,

5. $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$,

6. la fonction ln est concave et $\ln x \leq x - 1 \quad$ (pour tout $x > 0$).




**Exemple.** La fonction inverse :

$$f : ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x}.$$

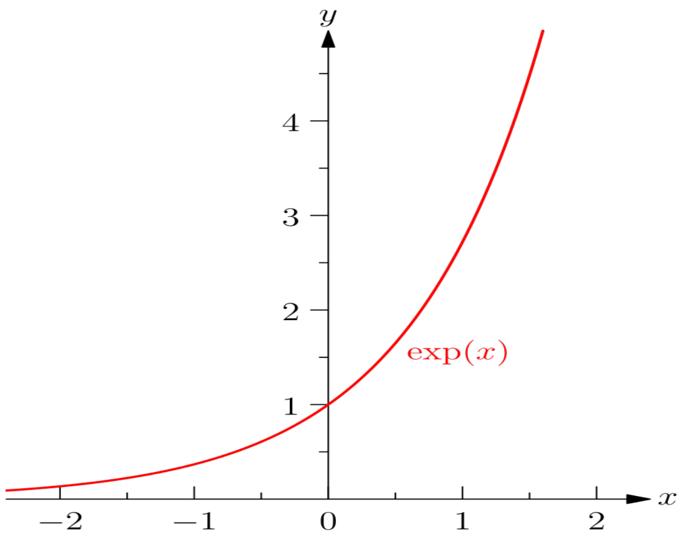
Le graphe d'une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ est la partie $\Gamma_f$ de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in U\}.$$

.

### 4.1.2 Exponentielle

**Definition 4.1.2.** La bijection réciproque de $\ln : ]0,\infty[ \to \mathbb{R}$ s'appelle la fonction exponentielle, notée $\exp : \mathbb{R} \to ]0,\infty[$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note aussi $e^x$ pour $\exp(x)$.



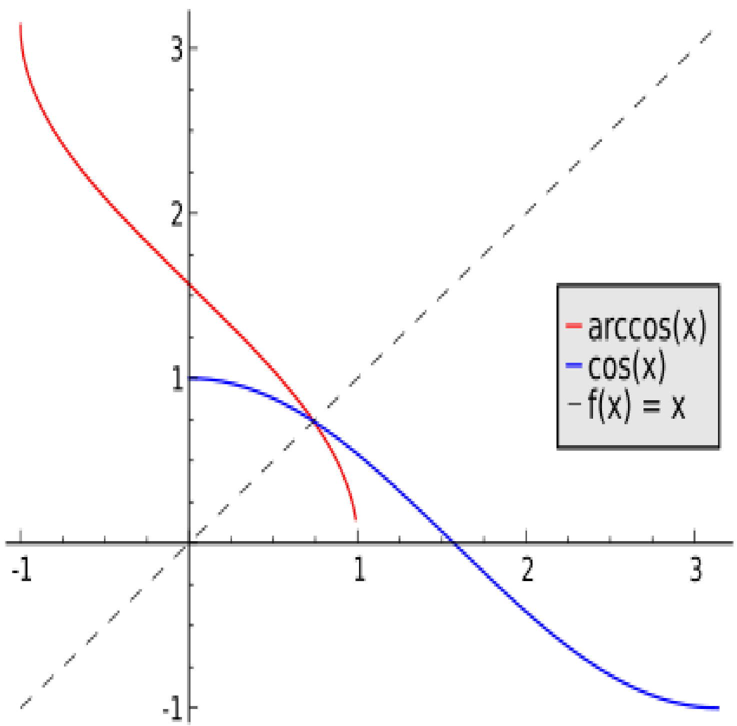

**Proposition 4.1.2.** La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes :

1. $\exp(\ln x) = x$ pour tout $x > 0$ et $\ln(\exp x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,
2. $\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$,
3. $\exp(nx) = (\exp x)^n$,
4. $\exp : \mathbb{R} \to ]0, +\infty[$ est une fonction continue, strictement croissante, vérifiant $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$,
5. La fonction exponentielle est dérivable et $\exp'(x) = \exp(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Elle est convexe et $\exp(x) \geq 1 + x$.

## 4.2 Fonctions circulaires inverses

### 4.2.1 Arccosin

L'arc cosinus d'un nombre réel compris au sens large entre ?1 et atiques, 1 est l'unique mesure d'angle dont le cosinus vaut ce nombre, entre l'angle nul (0° ou 0 rad) et l'angle plat (180° ou $\pi rad$). Il s'agit alors de la réciproque de la fonction trigonométrique cosinus sur l'intervalle $[0; \pi]$ donc, dans un repère cartésien orthonormé du plan, la courbe représentative de l'arc cosinus s'obtient à partir de la courbe de la restriction du cosinus par la symétrie d'axe la droite d'équation $y = x$.




$$\cos|_{[0,\pi]} : [0, \pi] \to [-1, 1]$$

est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction arccosinus :

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi].$$

On a donc, par définition de la bijection réciproque :

$$\cos(\arccos(x)) = x \quad \forall x \in [-1, 1]$$

$$\arccos(\cos(x)) = x \quad \forall x \in [0, \pi]$$

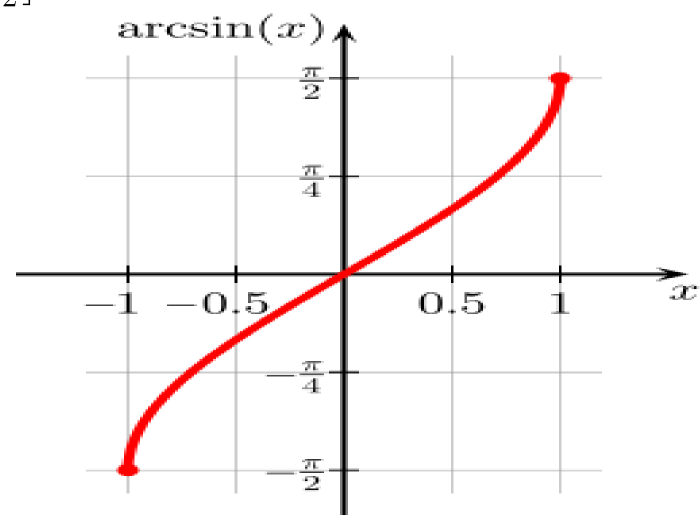
Autrement dit, si $x \in [0, \pi]$, $\cos(x) = y \iff x = \arccos(y)$.

Terminons avec la dérivée de arccos :

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \forall x \in ]-1, 1[.$$

### 4.2.2 Arcsinus

L'arc sinus d'un nombre réel compris (au sens large) entre $-1$ et $1$ est l'unique mesure d'angle en radians dont le sinus vaut ce nombre, et comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. Il s'agit alors de la bijection réciproque de la restriction de la fonction trigonométrique sinus à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Elle fait partie des fonctions circulaires réciproques.




La restriction

$$\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]} : [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$$

est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction arcsinus :

$$\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\sin(\arcsin(x)) = x \quad \forall x \in [-1,1]$$

$$\arcsin(\sin(x)) = x \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$$

Si $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(x) = y \iff x = \arcsin(y)$.

La dérivée de arcsin est :

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in ]-1,1[.$$

### 4.2.3 Arctangente

La restriction

$$\tan|_{]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}[} : ]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[ \to \mathbb{R}$$

est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction arctangente :

$$\arctan : \mathbb{R} \to ]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$$

$$\tan(\arctan(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\arctan(\tan(x)) = x \quad \forall x \in ]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$$

Si $x \in ]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$, $\tan(x) = y \iff x = \arctan(y)$.

La dérivée de arctan est :

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$