

Table des matières

5 Développement limité

5.1	Formules de Taylor	
5.1.1	Formule de Taylor avec reste intégral	
5.1.2	Formule de Taylor avec reste $f^{n+1}(c)$	
5.1.3	Formule de Taylor-Young	
5.2	Développements limités au voisinage d'un point	
5.2.1	Définitions	
5.2.2	développements limités des fonctions usuelles à l'origine	

Chapitre 5

Développement limité

Un développement limité (noté DL) d'une fonction en un point est une approximation polynomiale de cette fonction au voisinage de ce point, c'est-à-dire l'écriture de cette fonction sous la forme de la somme : d'une fonction polynomiale ;

d'un reste négligeable au voisinage du point considéré. En physique, il est fréquent de confondre la fonction avec son développement limité, à condition que l'erreur (c'est-à-dire le reste) ainsi faite soit inférieure à l'erreur autorisée. Si l'on se contente d'un développement d'ordre un, on parle d'approximation linéaire ou d'approximation affine.

En mathématiques, les développements limités permettent de trouver plus simplement des limites de fonctions, de calculer des dérivées, de prouver qu'une fonction est intégrable ou non, ou encore d'étudier des positions de courbes par rapport à des tangentes. Ils permettent également l'obtention d'équivalents.

5.1 Formules de Taylor

5.1.1 Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème 5.1.1. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) et soit $a, x \in I$. Alors

CHAPITRE 5. DÉVELOPPEMENT LIMITÉ

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt.$$

Nous noterons $T_n(x)$ la partie polynomiale de la formule de Taylor (elle dépend de n mais aussi de f et a) :

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Si on écrit $x = a + h$ (et donc $h = x - a$), la formule de Taylor précédente devient (pour tout a et $a + h$ de I) :

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \int_0^h \frac{f^{(n+1)}(a+t)}{n!}(h-t)^n dt.$$

Exemple. La fonction $f(x) = \exp(x)$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $I = \mathbb{R}$ pour tout n . Fixons $a \in \mathbb{R}$. Comme $f'(x) = \exp(x)$, $f''(x) = \exp(x)$, $\dots$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\exp(x) = \exp(a) + \exp(a) \cdot (x-a) + \cdots + \frac{\exp(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{\exp(t)}{n!}(x-t)^n dt.$$

Bien sûr, si l'on se place en $a = 0$, alors on retrouve le début de notre approximation de la fonction exponentielle en $x = 0$:

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

CHAPITRE 5. DÉVELOPPEMENT LIMITÉ

5.1.2 Formule de Taylor avec reste $f^{n+1}(c)$

Théorème 5.1.2. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) et soit $a, x \in I$. Il existe un réel c entre a et x tel que :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Exemple. Soient $a, x \in \mathbb{R}$. Pour tout entier $n \geq 0$, il existe c entre a et x tel que :

$$\exp(x) = \exp(a) + \exp(a) \cdot (x-a) + \cdots + \frac{\exp(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{\exp(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Dans la plupart des cas, on ne connaîtra pas ce c . Mais ce théorème permet d'encadrer le reste. Ceci s'exprime par le corollaire suivant :

5.1.3 Formule de Taylor-Young

Théorème 5.1.3. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ et soit $a \in I$. Alors, pour tout $x \in I$, on a :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon(x),$$

où ε est une fonction définie sur I telle que $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow a$.

Exemple. Soit $f :]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(1+x)$; f est infiniment dérivable. Nous allons calculer les formules de Taylor en 0 pour les premiers ordres.

Tout d'abord $f(0) = 0$. Ensuite $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ donc $f'(0) = 1$. Ensuite $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$

CHAPITRE 5. DÉVELOPPEMENT LIMITÉ

donc $f''(0) = -1$.

Puis $f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$ donc $f^{(3)}(0) = 2$. Par récurrence on montre que $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{(1+x)^n}$ et donc $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$.

Ainsi, pour $n > 0$:

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}x^n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n.$$

Voici donc les premiers polynômes de Taylor :

$$T_0(x) = 0, \quad T_1(x) = x, \quad T_2(x) = x - \frac{x^2}{2}, \quad T_3(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

5.2 Développements limités au voisinage d'un point

5.2.1 Définitions

Soit I un intervalle ouvert et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction quelconque.

Définition 5.2.1. Pour $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$, on dit que f admet un développement limité (DL) au point a et à l'ordre n , s'il existe des réels $c_0, c_1, \dots, c_n$ et une fonction $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$ de sorte que, pour tout $x \in I$:

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \dots + c_n(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon(x).$$

1. L'égalité précédente s'appelle un DL de f au voisinage de a à l'ordre n .
2. Le terme $c_0 + c_1(x-a) + \dots + c_n(x-a)^n$ est appelé la *partie polynomiale du DL*.
3. Le terme $(x-a)^n \varepsilon(x)$ est appelé *le reste du DL*.

La formule de Taylor-Young permet d'obtenir immédiatement des développements limités en posant $c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$:

CHAPITRE 5. DÉVELOPPEMENT LIMITÉ

Exemple. 1. DL de $\tan(x)$ en 0 à l'ordre 5.

Tout d'abord, $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\varepsilon(x)$. D'autre part, $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5\varepsilon(x) = 1 + u$, en posant

$$u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5\varepsilon(x).$$

Nous aurons besoin de u^2 et u^3 :

$$u^2 = \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5\varepsilon(x)\right)^2 = \frac{x^4}{4} + x^5\varepsilon(x),$$

et en fait $u^3 = x^5\varepsilon(x)$. (On note abusivement $\varepsilon(x)$ pour différents restes.)

Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos(x)} &= \frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^3\varepsilon(u) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + x^5\varepsilon(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + x^5\varepsilon(x).\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}\tan(x) &= \sin(x) \times \frac{1}{\cos(x)} = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\varepsilon(x)\right) \times \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + x^5\varepsilon(x)\right) \\ &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + x^5\varepsilon(x).\end{aligned}$$

2. DL de $\frac{1+x}{2+x}$ en 0 à l'ordre 4.

$$\frac{1+x}{2+x} = \frac{1+x}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}(1+x) \left(1 - \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \left(\frac{x}{2}\right)^4 + o(x^4)\right)$$

CHAPITRE 5. DÉVELOPPEMENT LIMITÉ

$$= \frac{1}{2} + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{x^4}{32} + o(x^4).$$

3. DL de $\frac{\sin(x)}{\sinh(x)}$ en 0 à l'ordre 4.

On écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x)}{\sinh(x)} &= \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)}{x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)} = \frac{x \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4)\right)}{x \left(1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4)\right)} \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4)\right) \times \frac{1}{1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4)} \\ &= 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{18} + o(x^4). \end{aligned}$$

5.2.2 développements limités des fonctions usuelles à l'origine

Les développements limités suivants en 0 proviennent de la formule de Mac-Laurin-Young.

Fonction f	Développement limité
e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x)$
$\cosh(x)$	$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x)$
$\sinh(x)$	$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2} \varepsilon(x)$
$\cos(x)$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x)$
$\sin(x)$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2} \varepsilon(x)$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + x^n \varepsilon(x)$
$(1+x)^\alpha$	$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + x^n \varepsilon(x)$
$\frac{1}{1+x}$	$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + x^n \varepsilon(x)$
$\frac{1}{1-x}$	$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + x^n \varepsilon(x)$
$\sqrt{1+x}$	$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} x^n + x^n \varepsilon(x)$

Technique de calcul des développements limités

CHAPITRE 5. DÉVELOPPEMENT LIMITÉ

Nous allons utiliser le développement limité de

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + \cdots + (-1)^n u^n + u^n \varepsilon_3(x).$$

(1) Si $a_0 = 1$, on pose $u = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon_2(x)$ et le quotient s'écrit

$$\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{1+u},$$

ou bien

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{C(x) + x^n \varepsilon_1(x)}{A(x) + x^n \varepsilon_2(x)} = B(x) + x^n \varepsilon_3(x),$$

où B est le quotient de la division de C par A suivant les puissances croissantes à l'ordre n .

(2) Si $a_0 \neq 0$ et $a_0 \neq 1$, alors on se ramène au cas précédent en écrivant

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{a_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{a_1}{a_0}x + \cdots + \frac{a_n}{a_0}x^n + x^n \varepsilon_2(x)}.$$

(3) Si $a_0 = 0$, alors on factorise par x^k (pour un certain k) afin de se ramener aux cas précédents.