Chapitre 4

Ecoulement et viscosité des fluides

4.1 Définitions

Un fluide est défini comme un milieu matériel continu constitué par des petites particules faiblement liées et libres de se déplacer les unes par rapport aux autres, sa propriété principale est être facilement déformable, c'est-à-dire il n'a pas de forme propre, et il prend la forme du récipient qu'il le contient. Il existe deux formes de fluides ; fluide compressible et fluide incompressible.

4.1.1 Fluides compressibles

Ce sont les gaz (l'air, l'oxygène, l'hydrogène, etc.), le volume occupé par ce type de fluide varie en fonction de la pression extérieure et par conséquence sa masse volumique n'est pas constante.

4.1.2 Fluide incompressible

Ce sont les liquides (eau, huile, le mercure, etc.), le liquide occupe un volume fixe et qui ne vari pas avec la pression extérieure, par conséquence sa masse volumique est constante.

4.1.3 Viscosité d'un fluide

La viscosité peut être définie comme la résistance d'un fluide à l'écoulement lorsqu'il est soumis à une force. Elle peut être considérée comme le frottement interne qui résulte du glissement d'une couche de fluide sur une autre couche. Un liquide très visqueux est un liquide qui présente un frottement interne élevé. Selon leurs viscosités, les fluides sont classés dans deux groupes, fluides parfaits et fluides réels.

4.1.4 Fluide parfait

Il s'agit d'un fluide de viscosité nulle. Dans ce type de fluide, on suppose que ses molécules se glissent les unes sur les autres sans frottement. Pratiquement ce type de fluide est inexistant dans la réalité mais il est proposé pour simplifier les calculs.

4.1.5 Fluide réel

Contrairement à un fluide parfait, dans un fluide réel les forces de frottement entre les molécules sont prises en considération et sa viscosité n'est pas nulle.

4.2 Pression d'un fluide

La pression est une grandeur scalaire et l'une des propriétés principales de tous les fluides. Elle représente l'intensité de la composante normale de la force F exercée sur un fluide ou par un fluide sur une unité de surface S.

$$P = \frac{F}{S} \tag{4. 1}$$

ou bien en notation différentielle : $P = \frac{|d\vec{F}_N|}{dS}$ (4. 2)

où $|d\vec{F}_N|$ est la dérivée de l'intensité de la composante normale de la force par rapport à la surface.

4.2.1 Les unités de la pression

L'unité international de la pression est le pascal (Pa) ou $\frac{N}{m^2}$ et sa dimension est $M^{-1}L^{-1}T^{-2}$. Un fluide qui exerce une force de 1 N sur une surface de 1 m^2 va produire une pression de 1 Pa, donc $1\ Pa = 1\frac{N}{m^2}$.

Il existe d'autre unité de la pression à savoir :

Le bar : $1\ bar = 10^5\ Pa$.

L'atmosphère : $1\ atm = 1.013\ bar = 1.013 \times 10^5\ Pa$.

Le millimètre de mercure : $1\ mmHg = 133.3\ Pa$.

Le centimètre d'eau : $1\ cm_{H_2O} = 98\ Pa$.

4.3 Statique des fluides

Statique des fluides ou l'hydrostatique est la branche de mécanique des fluides qui étudie le fluide au repos (sa vitesse est nulle $v = o\ m\ s^{-1}$). Dans ce qui suit on va présenter la loi de Pascal et le théorème d'Archimède.

4.3.1 Loi fondamentale de l'hydrostatique (La loi de Pascal)

Pour un fluide incompressible (sa masse volumique $\rho = cte$) parfait (sa viscosité est nulle) et statique (sa vitesse est nulle), la loi de Pascal indique directement la variation de la pression d'un fluide en fonction de sa hauteur en tout point :

$$P + \rho g h = cte. \tag{4. 3}$$

Cette quantité est la même en tout points du fluide. P, ρ g et h sont respectivement la pression, la masse volumique du fluide, l'accélération de la pesanteur et la hauteur du point.

Par application de la loi de Pascal entre les points A, B et C (voir **Figure 4. 1** ci contre) on obtient :

$$P_A + \rho g h_A = P_B + \rho g h_B = P_C + \rho g h_C \quad (4.\ 4)$$

$$\Delta P = P_B - P_A = \rho g (h_A - h_B) = \rho g h \quad (4.\ 5)$$

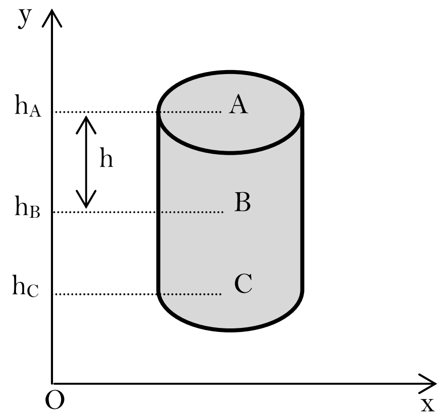


Figure 4.1

Avec h est la distance (positive) entre A et B.

Notons qu'à une profondeur de 10 m dans l'eau, il correspond une variation de pression $\Delta P = 1000 \times 9.81 \times 10 \approx 1\ atm$.

La loi de Pascal considère que les points situés sur une même hauteur h subissent la même pression quel que soit la forme du récipient, $h_A = h_B$ implique que $P_A = P_B$ (loi des vases).

Autrement dit, qu'un liquide homogène remplissant plusieurs récipients, reliés entre eux à leur base et soumis à la même pression atmosphérique, s'équilibre à la même hauteur dans chacun d'eux (voir **Figure 4. 2**), $h_A = h_B = h_C = h_D = h_E \Leftrightarrow P_A = P_B = P_C = P_D = P_E$.

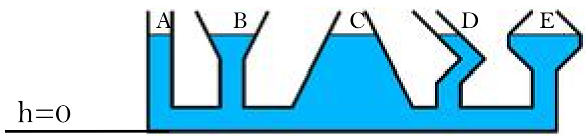


Figure 4. 2

4.3.2 Application de la loi de Pascal : mesure de la pression artérielle (PA)

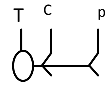
La pression artérielle correspond à la mesure de surpression par rapport à la pression atmosphérique. On considère que la vitesse d'écoulement sanguins est la même dans tout les vaisseaux sanguins et que la viscosité du sang est négligeable (fluide parfait).

Sachant que la pression artérielle (PA) pour un sujet en position couché ou en position debout au niveau du cœur P_{co} est toujours égale à 13.3 kPa. Calculer la pression au niveau de la tête P_T et au niveau des pieds P_p. On donne pour ce sujet, la distance cœur- tête est $h_{cT} = 70\ cm$ et la disatnce cœur-pieds est $h_{cp} = 110\ cm$, et que la masse volumique du sang $\rho_{sang} = 1.04\ g\ cm^{-3}$.

La solution

a. Sujet en position couché

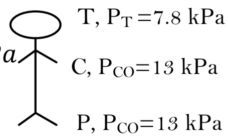
Pour un sujet couché, tout les points sont situés sur la même hauteur, donc d'après la loi de Pascal, les pressions au niveau de la tête, au niveau du cœur et au niveau des pieds sont égales donc $P_{co} = P_T = P_p = 13.3\ kPa$.



b. Sujet en position verticale

1. Calcul de la pression au niveau de la tête (le point T) :

$P_{CO} = P_c = P_T = 13\ kPa$



On applique la loi de Pascal entre les points T et C

$$P_T + \rho_{sang} g h_T = P_{C0} + \rho_{sang} g h_c$$

Alors $P_T = P_{C0} + \rho_{sang} g (h_c - h_T) = 13000 + 1065 \times 10((130 - 180) \times 10^{-2}) = 7.8\ kPa$

2. Calcul de la pression au niveau des pieds (dans le point P) :

On applique la loi de Pascal entre les points P et T (ou bien entre P et C)

$$P_T + \rho_{sang} g h_T = P_P + \rho_{sang} g h_P$$

Alors $P_P = P_T + \rho_{sang} g (h_T - h_p) = 7800 + 1065 \times 10(((50 + 130) - 0) \times 10^{-2}) = 26.9\ kPa$.

4.4 Poussée d'Archimède

Tout solide de masse volumique ρ_s plongé dans un fluide de masse volumique ρ_{fluide} subit de la part de ce fluide une force verticale, dirigée vers le haut dont l'intensité est égale au poids du volume de fluide déplacé (**Figure 4.3**). Cette force qui est appelée poussée d'Archimède P_{Ar} est égale et opposée au poids du fluide déplacé.

$$P_{Ar} = P_{fluide\ déplacé} = m_{fluide\ déplacé} \times g = \rho_{fluide} \times V_{fluide\ déplacé} \times g \qquad (4.\ 6)$$

Notons que le volume du fluide déplacé est égal au volume du corps solide immergé

$$\left(V_{Fluide\ déplacé} = V_{Solide\ immergé}\right) \qquad (4.\ 7)$$

Pratiquement on peuT aussi déterminer la poussée d'Archimède P_{Ar} en mesurant la différence entre le poids réel $P_{Ré}$ et le poids apparent du corps P_{Ap}. Notons que le poids apparent et le poids réel sont respectivement le poids du corps dans le liquide et dans l'aire. Les poids sont mesurés à l'aide d'un dynamomètre.

$$P_{Ar} = P_{Ré} - P_{Ap} \qquad (4.\ 8)$$

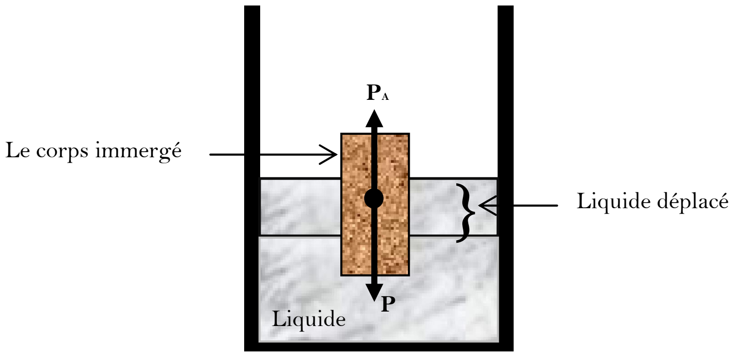


Figure 4. 3

➢ *Application:*

Soit un réservoir ouvert (voir la **Figure 4. 4**), équipés de deux tubes et rempli avec de l'eau et de l'huile considérés comme deux fluides non miscibles.

1. Déduire les pressions P_B et P_C respectivement aux points B et C.

2. Calculer la hauteur Z_D. On donne : $H_1 = 6\ m\ et\ H_2 = 5\ m$, la masse volumique de huile $\rho_1 = 0.85 g/cm^3$ et de l'eau $\rho_2 = 1\ g/cm^3$, et g=10 m/s²

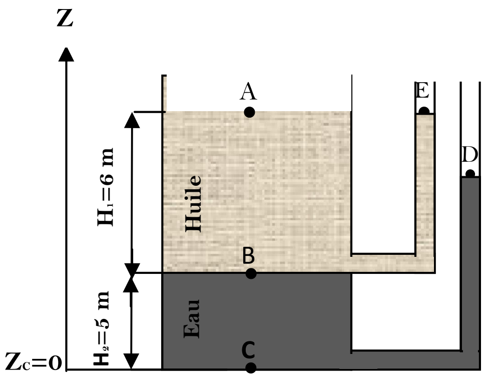


Figure 4. 4

Solution

1. a Calcul de la pression P_B

Appliquant la loi de Pascal entre les points A et B :

$P_B + \rho_1 g\ Z_B = P_A + \rho_1 g\ Z_A$ donc $P_B = P_A + \rho_1 g\ H_1$

$P_A = 1\ atm = 10^5\ Pa$

$P_B = 10^5 + 850 \times 10 \times 6 = 1.51 \times 10^5\ Pa = 1.51\ bar$.

1. b Calcul de la pression P_B

Appliquant la loi de Pascal entre les points B et C :

$$P_B + \rho_2 g\ Z_B = P_C + \rho_2 g\ Z_c$$

donc $P_C = P_B + \rho_2 g\ H_2$

$$P_C = 1.51 \times 10^5\ + 1000 \times 10 \times 5 = 2.1 \times 10^5\ Pa = 2.1 bar$$

2. Calcul de l'hauteur du point D, Z_D

Appliquant la loi de Pascal entre C et D :

$$P_C + \rho_2 g\ Z_c = P_D + \rho_2 g\ Z_D$$

$$P_C = P_D + \rho_2 g\ Z_D$$

$$Z_D = \frac{P_C - P_D}{\rho_2 g}$$

AN. :

$$P_D = 1\ atm = 10^5\ Pa$$

$$Z_D = \frac{2.1 \times 10^5 - 10^5}{1000 \times 10} = 11m$$

4.5 Dynamique des fluides parfaits

C'est la branche de la mécanique des fluides qui étudie le fluide en mouvement $(v \neq 0\ )$

4.5.1 Equation de continuité

Soit un fluide incompressible et parfait s'écoulant dans une canalisation de section variable (**Figure 4. 5**).

a. Le débit volumique Q_v : le débit volumique est le volume du fluide qui travers une section S donnée par unité de temps.

$$Q_V = \frac{dV}{dt} \qquad (4.\ 9)$$

avec $dV = Sdl$ alors

$$Q_V = S\frac{dl}{dt} = Sv \qquad (4.\ 10)$$

Où S est la surface de la section en m^2, dl est l'unité de déplacement du fluide durant l'unité de temps dt, et v est la vitesse du fluide en m s^{-1}.

b. Le débit massique Q_m : le débit massique est la quantité de matière en Kg du fluide qui travers une section S donnée par unité de temps.

$$Q_m = \rho\ v\ S = \rho\ Q_V \qquad (4.\ 11)$$

Avec ρ est la masse volumique du fluide.

En régime stationnaire; s'il n'y a pas de perte de fluide et si rien ne modifie la quantité de fluide entre les sections S_1 et S_2, le débit volumique et par conséquence le débit massique sont conservés entre ces deux endroits, c'est-à-dire :

$$Q_V(S_1) = Q_V(S_2) \tag{4. 12}$$

Donc l'équation de continuité s'écrit comme suit:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \tag{4. 13}$$

Pour une canalisation de forme cylindrique, plutôt de section circulaire, le rapport des vitesses est proportionnel à l'inverse du carré du rapport des diamètres, car la surface de la section $s_1 = \pi R_1^2$ et $s_2 = \pi R_2^2$.

$$\left(\frac{v_1}{v_2}\right) = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \tag{4. 14}$$

4.5.2 Equation de Bernoulli

Un fluide parfait et incompressible s'écoule dans une conduite de section variable (**Figure 4. 5**) possède trois formes d'énergie E_1, E_2 et E_3 liées respectivement à la pression P, à l'altitude h et à la vitesse v.

a. L'énergie liée à la pression P est $E_1 = PV$, c'est une énergie potentielle.

b. L'énergie liée à l'altitude h est $E_2 = mgh$, c'est une énergie potentielle.

c. l'énergie liée à la vitesse v est $E_3 = \frac{1}{2} mv^2$, c'est une énergie cinétique.

L'énergie totale de cet écoulement est la somme de ces trois énergies :

$$E_{Tot} = E_1 + E_2 + E_3 = PV + mgh + \frac{1}{2} mv^2 \tag{4. 15}$$

La masse du fluide $m = \rho V$, par sa substitution dans l'équation de l'énergie totale on obtient :

$$E_{Tot} = PV + \rho Vgh + \frac{1}{2} \rho V v^2 \tag{4. 16}$$

Pour une unité de volume, l'énergie $E = \frac{E_{Tot}}{V}$

$$E = P + \rho gh + \frac{1}{2} \rho v^2 \tag{4. 17}$$

Pour un fluide parfait s'écoulant en régime stationnaire (le débit est constant et indépendant du temps), Bernoulli indique que l'énergie totale est conservée le longue de la conduite, c'est-à-dire :

$$E = P + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v^2 = cte \qquad (4.\ 18)$$

Autrement dit, en appliquant la loi de Bernoulli entre les deux points A et B on peut écrire l'égalité suivante :

$$P_A + \rho\, g\, h_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = P_B + \rho\, g\, h_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 \qquad (4.\ 19)$$

Rappelons que P_A et P_B, v_A et v_A, h_A et h_B sont respectivement les pressions hydrostatiques, les vitesses d'écoulement et les altitudes des points A et B. ρ est la masse volumique du fluide et g est l'accélération de la pesanteur.

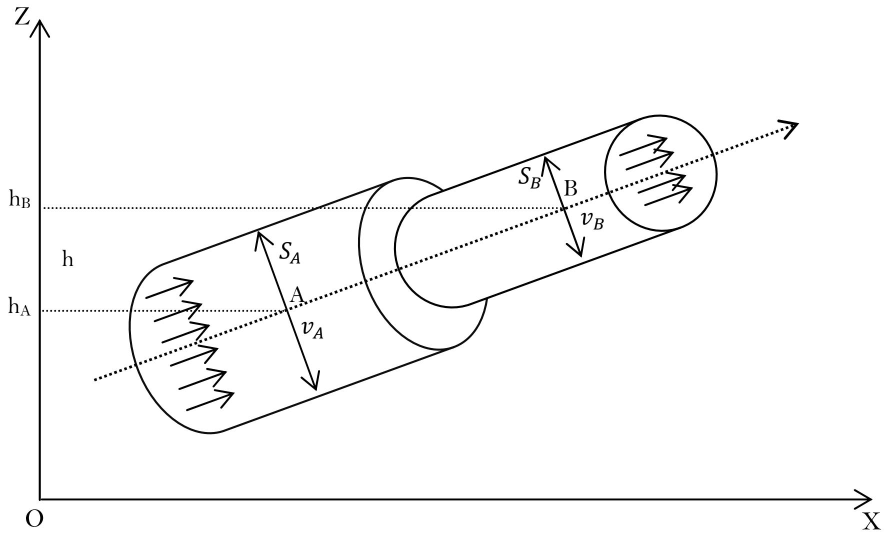


Figure 4. 5

4.6 Dynamique des fluides réels (visqueux)

Contrairement à un fluide parfait pour lequel les frottements durant son écoulement sont négligeables (conservation de l'énergie totale), un fluide réel (ou visqueux) en écoulement est le siège de frottement. La présence de ces frottements lors de l'écoulement dans une canalisation rectiligne entraîne une différence de pression entre les extrémités de ce canal c'est-à-dire on observe une perte de charge. Cette perte d'énergie est due au frottement entre deux couches de fluide voisines ou entre le fluide et la paroi d'une conduite.

Lors de son écoulement, un fluide réel peut présenter deux régimes d'écoulement à savoir : l'écoulement laminaire ou l'écoulement turbulent.

4.6.1 Ecoulement laminaire

L'écoulement est dit laminaire (du mot lame) s'il se fait sous forme de lames parallèles glissant les unes sur les autres et leurs vecteurs vitesses de déplacement restent parallèles par rapport à la direction de l'écoulement définissant un profile parabolique (**Figure 4. 6 (a** et **b**)).

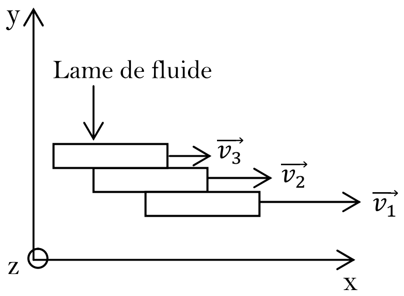


Figure 4.6(a)

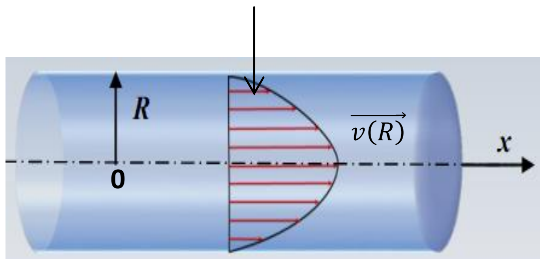


Figure 4.6(b)

4.6.2 Ecoulement turbulent

Il est caractérisé par des tourbillons et son profil de vitesse n'est plus parabolique (**Figure 4. 7**). Les pertes de charge sont dues principalement aux frottements visqueux entre les particules fluides situées près des parois de la conduite. Dans ce type d'écoulement les vecteurs vitesses des particules de fluides ont des orientations aléatoires par rapport à la direction de l'écoulement.

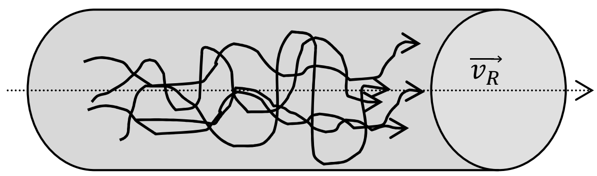


Figure 4.7

Il existe un troisième régime, c'est le régime transitoire (ou intermédiaire) qui représente le régime de transition entre l'écoulement laminaire et turbulent.

4.6.3 Le nombre de Reynolds

La transition d'un écoulement laminaire au régime turbulent est prévoit en calculant le nombre de Reynolds Re qui est donné par la formule suivante :

$$R_e = \rho \frac{v\, D}{\eta} \tag{4. 20}$$

Ou bien en fonction de la viscosité cinématique $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ comme suit :

$$R_e = \frac{v\,D}{\nu} \quad (4.\ 21)$$

Où : ρ est la masse volumique du fluide en kg m^{-3}.

v est la vitesse d'écoulement en m s^{-1}.

D est le diamètre du canal en m.

η est la viscosité dynamique du fluide en kg m^{-1} s^{-1}.

ν est la viscosité cinématique $\nu = \frac{\eta}{\rho}$

Le nombre de Reynolds est une grandeur adimensionnelle.

Notons que le passage d'un type d'écoulement à un autre se fait progressivement. O.Reynolds en 1883 a observé expérimentalement que pour une conduite de forme cylindrique la transition entre les régimes d'écoulement se fait comme suit :

a. Si le nombre de Reynolds $R_e < 2000$, l'écoulement est laminaire.

b. Si le nombre de Reynolds $2000 < R_e < 3000$, l'écoulement est intermédiaire.

c. Si le nombre de Reynolds $R_e > 3000$, l'écoulement est turbulent.

Dans les conditions normales ou la vitesse du sang $v = 30\,m\,s^{-1}$, le diamètre de l'aorte $D = 2\,cm$, la viscosité $\eta_{sang} = 4\ \times 10^3$ kg m^{-1} s^{-1} et la masse volumique $\rho_{sang} = 1.04\,g\,cm^{-3}$, on trouve le nombre de Reynolds $R_e = 1560\ < 2000$, ce qui indique que le régime d'écoulement du sang est laminaire.

4.6.4 Loi de Poiseuille

L'écoulement d'un fluide visqueux est toujours accompagné par une perte d'énergie générée par les forces de frottement entre les éléments qui le constitue. Dans ce cas la loi de Bernoulli trouve ses limites et elle ne peut être utilisée pour étudier cet écoulement. La loi de Poiseuille, également appelée loi de Hagen-Poiseuille, est proposée pour calculer la perte de charge Q_v d'une conduite cylindrique et rectiligne.

$$Q_v = \frac{\pi\,R^4}{8\eta}\,\frac{\Delta P}{L} \quad (4.\ 22)$$

$\Delta P = P_2 - P_1$, représente la différence de pression entre les deux extrémités du tube de rayon R et de longueur L. η est la viscosité dynamique du fluide.

La perte de charge Q est exprimée en m^3 s^{-1} et sa dimension est L^3 T^{-1}.

4.6.5 Résistance à l'écoulement

La résistance à l'écoulement R_e est définie par la relation suivante :

$$R_e = \frac{8\,\eta\, L}{\pi\, R^4} \qquad (4.\ 23)$$

Ou bien

$$R_e = \frac{\Delta P}{Q_v} \qquad (4.\ 24)$$

On distingue deux cas :

a. Système de conduites en séries : dans ce cas la résistance à l'écoulement R_e est la somme des résistances à l'écoulement de chaque partie de rayon R_i (voir **Figure 4. 8 (a)**).

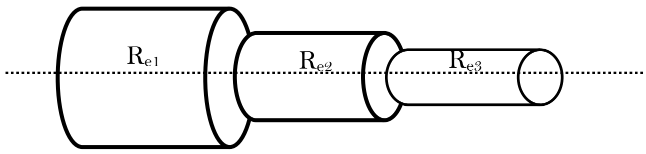


Figure 4. 8 (a)

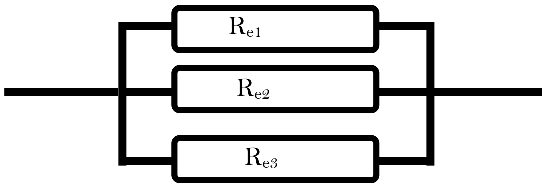


Figure 4. 8 (b)

$$R_e = \sum_{i=1}^{n} R_{ei} = R_{e1} + R_{e2} + R_{e3} + \cdots + R_{en} \qquad (4.\ 25)$$

b. Système de conduites en parallèles : dans ce cas l'inverse de la résistance à l'écoulement R_e est la somme des inverses des résistances à l'écoulement de chaque partie de rayon R_i (voir **Figure 4. 8 (b)**).

$$\frac{1}{R_e} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_{ei}} = \frac{1}{R_{e1}} + \frac{1}{R_{e2}} + \frac{1}{R_{e3}} + \cdots + \frac{1}{R_{en}} \qquad (4.\ 26)$$

4.7 Méthodes de mesure de la viscosité

Il existe plusieurs méthodes pour mesurer la viscosité d'un fluide, nous citons le viscosimètre d'Ubbelohde ou d'Ostwald, le viscosimètre rotatif ou viscosimètre de Couette et le viscosimètre à chute de bille.

Dans ce qui suit on va présenter une description du viscosimètre à chute de bille, méthode utilisée dans notre TP pour mesurer la viscosité des liquides.

4.8 Viscosimètre à chute de bille

Le principe du viscosimètre à chute de bille est basé sur la mesure de la vitesse limite de chute v d'une bille de rayon r et de masse volumique ρ_{bille} dans un liquide de masse volumique $\rho_{liquide}$, suffisamment visqueux pour que cette vitesse soit faible et soit dans le domaine d'application de la loi de Stokes.

La bille est lâchée avec une vitesse initiale nulle ($V_{initiale}$=0 m/s) dans un liquide visqueux de viscosité dynamique η. Au début, la bille est animée d'un mouvement uniformément accéléré, et au bout de quelques centimètres, la résistance est égale et opposée au poids, le mouvement devient rectiligne et uniforme (la vitesse de la bille devient constante).

Les trois forces appliquées à la bille, lors de la chute, sont les suivantes (voir **Figure 4. 9**) :

1. La poussé d'Archimède : $\left|\overrightarrow{F_a}\right| = \frac{4}{3}\pi r^3 g \rho_{liquide}$ (4. 27)

2. La force de viscosité (force de Stokes) : $\left|\overrightarrow{F_f}\right| = 6\pi\eta r v$ (4. 28)

3. Le poids : $\left|\vec{P}\right| = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{bille}\, g$ (4. 29)

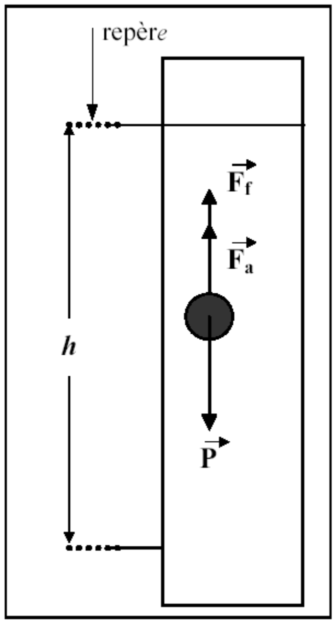


Figure 4. 9

Avec :

$\rho_{liquide}$ et ρ_{bille} sont les masses volumiques, respectivement du liquide et de la bille en kg m^{-3}.

η : est le coefficient de viscosité dynamique du liquide en Pa s.

h: est l'hauteur de chute en m.

v : est la vitesse de la bille en ms^{-1}.

r : est le rayon de la bille en m.

g: est l'accélération de la pesanteur en m s^{-2}.

Appliquant le principe fondamental de la dynamique à la bille :

$$\sum \overrightarrow{F_{Ext}} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \quad (4.\ 30)$$

Alors : $\overrightarrow{F_a} + \overrightarrow{F_f} + \vec{P} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$ (4. 31)

Par projection : $\left(\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{bille}\, g\right) - \left(\frac{4}{3}\pi r^3 g \rho_{liquide}\right) - (6\pi\eta r v) = m\frac{dV}{dt}$ (4. 32)

Au bout de quelque centimètre, le mouvement de la bille devient rectiligne uniforme, ce qui implique que :

$$\frac{dV}{dt} = 0 \quad (4.\ 33)$$

Et l'équation (4. 32) permis d'exprimer la viscosité dynamique par la formule:

$$\eta = \frac{2r^2 g}{9v}\left(\rho_{bille} - \rho_{liquide}\right) \quad (4.\ 34)$$

Pratiquement, pour mesurer le coefficient de viscosité dynamique η, il faut d'abord mesurer le temps *t* de chute de la bille sur une distance h (voir **Figure 4. 9**) puis calculer sa vitesse $v = \frac{\mathrm{h}}{\mathrm{t}}$ et injecter la valeur obtenue de v dans la relation (4. 34).

Connaissant la viscosité dynamique η on déduit la viscosité cinématique ν et le nombre de Reynolds R_e :

La viscosité cinématique : $\vartheta = \frac{\mu}{\rho_{liquide}}$ (4. 35)

Le nombre de Reynolds : $R_e = \frac{vd}{\nu} = \frac{vd\rho}{\mu}$ (4. 36)

v : est la vitesse de la bille et d son diamètre