

## **Chapitre 1. Introduction aux systèmes asservis et régulés**

### **1.1 Introduction et historique**

La Régulation est une partie de la science technique appelée Automatique. On considère généralement que l'automatique (et donc la régulation) a débuté dans les années 1930, avec les premiers asservissements de position et surtout une première définition de la stabilité ; naturellement, des systèmes à fonctionnement autonome existaient auparavant (les automates), mais ils n'étaient pas théorisés. Après ces premiers pas, tout s'accéléra, avec le développement des premières méthodes de synthèse de correcteurs au cours de la décennie 1940-1950, puis dès 1960, avec l'explosion de l'informatique.

Aujourd'hui l'automatique est partout :

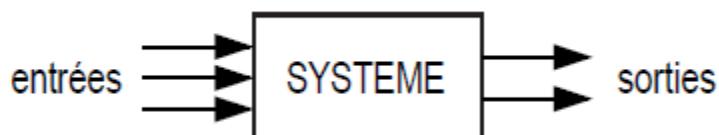
- dans la vie quotidienne : chauffage, appareils photographiques, lecteurs CD, lecteurs DVD, machines à laver, domotique,...
- dans l'industrie : chimie, industrie manufacturière, métallurgie, industrie plastique, production d'énergie, environnement, automobile, ....
- dans l'agriculture : alimentation du bétail, régulation de température d'élevages industriels, régulation d'hygrométrie pour des cultures sous serres,
- dans l'aéronautique : aviation civile et militaire, missiles, satellites, navette spatiale....
- dans la médecine : examens lourds, thérapie embarquée, chirurgie assistée,...

### **1.2 Notion de Système**

Un système est un dispositif isolé, soumis aux lois de la physique, de la chimie, de la biologie, de l'économie, etc....

#### **Définition 1.1 (Système).**

Un système est un ensemble d'éléments interconnectés pour accomplir une tâche prédéfinie. Il est affecté par une (ou plusieurs) variable(s) : les entrées du système. Le résultat de l'action des entrées est la réponse du système caractérisée par l'évolution d'une ou plusieurs variables : les sorties. Voir figure 1.1 ci dessous.



**Figure 1.1:** Notion de système

Les systèmes que l'on abordera dans ce cours possèdent les caractéristiques suivantes :

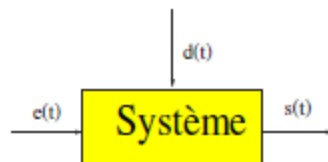
### Représentation :

Un système est généralement représenté par un schéma fonctionnel sous forme de rectangle. Les signaux d'entrée appliqués à ce rectangle sont caractérisés par des flèches entrantes et annotées. L'action de ces entrées produit de cette manière (causale) des effets, mesurés par des signaux de sortie, représentés par des flèches sortantes et annotées. Ce mode de représentation est détaillé à la section 1.6.

SISO/MIMO : les entrées que l'on décide d'appliquer au système (et les sorties de ce système) peuvent être multiples : on parlera de système MIMO (Multi-Input Multi-Output, multi-entrées multi-sorties), ou uniques : on parlera de système SISO (Single-Input Single Output, mono-entrée mono-sortie). L'objectif de ce cours se limitera aux systèmes SISO.

Nature des Entrées : les entrées affectant un système peuvent être de différentes natures (voir figure 1.2) :

- la commande  $e(t)$  : elle a pour but d'exercer une action entraînant le fonctionnement souhaité du système ;
- la perturbation  $d(t)$  : il s'agit d'une entrée particulière (car elle est indépendante de notre décision) qui trouble le fonctionnement désiré du système.



**Figure 1.2:** Types d'entrées d'un système

### Modèle :

Un système est caractérisé par des relations entrées/sorties exprimées sous la forme de lois mathématiques.

### Système Linéaire :

Les lois mathématiques entre l'entrée et la sortie sont des équations différentielles linéaires. Un système linéaire possède les propriétés de superposition et de proportionnalité. Le principe de superposition permet (entre autres) de décomposer l'étude de systèmes complexes en sous-systèmes plus simples à étudier.

### Causalité :

L'action (l'entrée) précède la réponse (la sortie).

## Invariant dans le temps :

Le fonctionnement du système est le même quelque soit le moment l'instant où on l'utilise → les coefficients des équations différentielles sont constants et réels.

### 1.2.1 Système physique

D'après la définition, un système est excité -attaqué- par une entrée et délivre =répond par= une sortie. Dans un premier temps, on va faire figurer le processus physique à l'intérieur d'un bloc auquel on va appliquer les entrées et sorties.

#### Exemple : Moteur

Considérons un moteur (voir figure 1.3) à courant continu comme un système physique dont l'entrée de commande sera la tension  $U$  et la sortie, la vitesse (angulaire) de rotation de l'arbre moteur  $\Omega$ .

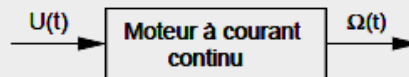


figure 1.3: Un système : un moteur à courant continu

La relation mathématique entre  $\Omega(t)$  et  $U(t)$  caractérisera le moteur en tant que système.

#### Exemple : chauffage

Considérons maintenant le chauffage d'une pièce, comme schématisé par la figure.

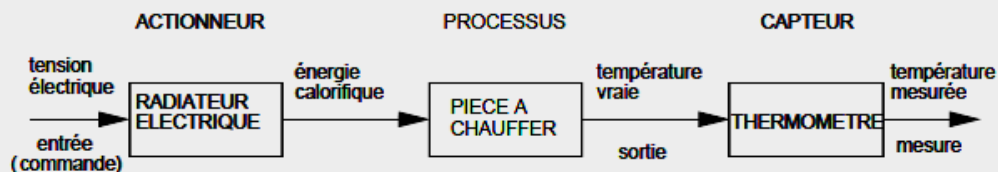


figure 1.4: Système de chauffage d'une pièce

Ce système est constitué du processus physique, ici la pièce à chauffer.

Il est aussi constitué d'un **capteur** qui prélève sur le système la grandeur de sortie (ici la température) pour en donner la mesure (affichage). De plus, il transforme (convertit) souvent cette mesure en un signal de même nature que l'entrée (encore appelée, consigne ou référence). Le système contient aussi un **actionneur** qui agit sur l'entrée. C'est l'organe d'action qui apporte l'énergie au système pour produire l'effet souhaité. Le modèle du système comprend l'agglomération de l'actionneur, du processus et du capteur.

### 1.2.2 Objectifs de la régulation

Le rôle de l'automaticien (chargé d'obtenir un système régulé) sera multiple :

- **Instrumenter le système** : choisir les capteurs et actionneurs en fonction des besoins physiques, de coût et de performances demandées au système.
- Déterminer les relations entrées-sorties du système, des capteurs et des actionneurs. On parlera dès lors de :

- Modéliser quand on s'attachera à déterminer la structure mathématique de ces relations.
- Identifier quand on s'intéressera à calculer les coefficients du modèle.
- Synthétiser une loi de commande (un correcteur) afin d'obtenir un système performant : précis, rapide et stable, tout en s'affranchissant des influences néfastes des perturbations.

Le système ainsi corrigé (asservi, régulé) devra assurer deux objectifs :

- **La poursuite** : suivre une entrée de consigne (référence). On désire asservir la sortie à l'entrée (la sortie doit –ressembler- le plus possible à l'entrée) et ainsi assurer des performances (stabilité, rapidité, précision).
- **La régulation** : annuler (ou diminuer) les effets de la (ou des) perturbation(s).

## 1.3 Notion de Boucle Ouverte/Fermée

### 1.3.1 Système en boucle ouverte

Un système en boucle ouverte est un système qui ne comporte pas de contre-réaction « feedback » entre la sortie et l'entrée. Classiquement, il est composé du processus physique, d'un capteur pour en mesurer la sortie et d'un actionneur pour agir sur la grandeur d'entrée du processus.

#### Définition 1.2 (capteur).

Un capteur est un organe qui transforme une grandeur physique quelconque en une autre grandeur physique (généralement électrique) pouvant être transportée et traitée plus facilement. Par exemple, on peut trouver des capteurs de position, de vitesse, de débit, de température, de pression, de niveau, de pH, de densité, de masse, de conductivité, d'oxygène ou de gaz carbonique, de concentration, etc...

#### Définition 1.3 (actionneur).

Un actionneur est un organe qui est capable d'apporter de l'énergie ou de la matière dans une boucle de régulation, en fonction de l'information fournie par le régulateur (ou bien le correcteur). Par exemple, un moteur électrique associé à son amplificateur de puissance représente un actionneur. Les vannes et les pompes sont d'autres actionneurs...

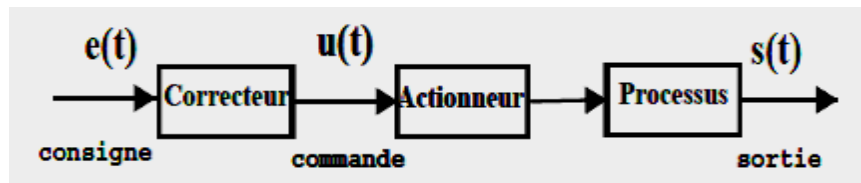
On se placera dans le cas idéal en faisant les approximations suivantes :

- Les actionneurs n'introduisent ni retard, ni distorsion, mais on ne doit pas oublier qu'ils ont une action limitée par des saturations « butées ».
- Le capteur est lui aussi supposé excellent. Sa précision et sa rapidité sont deux critères importants.

On tiendra compte en régulation, des bruits (perturbations de sortie) qu'il est susceptible d'introduire dans la chaîne de régulation.

Cette solution est envisageable dans le cas où le système est parfaitement connu (ce qui est théoriquement impossible) et dans le cas où l'obtention d'une mesure de la sortie n'est pas économiquement possible. L'exemple typique est celui de la machine à laver (le linge ou bien la vaisselle) fonctionnant sur la base de cycles préprogrammés ne possédant pas d'informations quant à la mesure du degré de saleté (du linge ou bien de la vaisselle). Si une quelconque perturbation l'affecte ou si le système n'est pas parfaitement connu (poids ou type du linge, quantité de vaisselle ou qualité de l'eau variable), le résultat escompté peut varier sensiblement...

On peut représenter un système en boucle ouverte par le schéma de principe suivant :



**Figure 1.5:** Système en BO

Dans le cas de l'exemple 1.2.1 du chauffage, un de nos objectifs sera d'assurer une température constante dans la pièce, quels que soient les éventuels changements qui peuvent intervenir : conditions météorologiques, courant d'air...

Avec un tel système, ce challenge n'est pas tenable puisque, si l'on mesure la température de la pièce, on ne se sert pas de cette mesure pour réagir sur l'entrée du système.

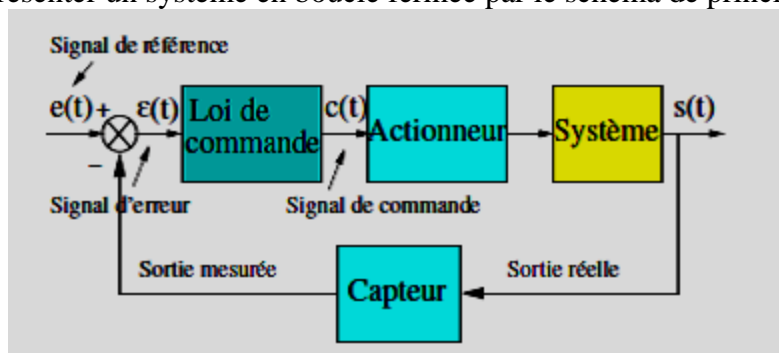
En résumé, la BO (boucle ouverte) possède les inconvénients suivants :

- On ne peut commander/asservir/réguler des systèmes instables (nous reviendrons plus en détail sur la notion de stabilité lors d'un prochain cours),
- Les perturbations ont des effets indésirables non compensés,
- Il est difficile d'obtenir une sortie possédant la valeur souhaitée avec précision et rapidité.

Ces problèmes vont être résolus (ou sensiblement améliorés) par l'introduction d'un « feedback » notion de boucle fermée (BF).

### 1.3.2 Système en boucle fermée

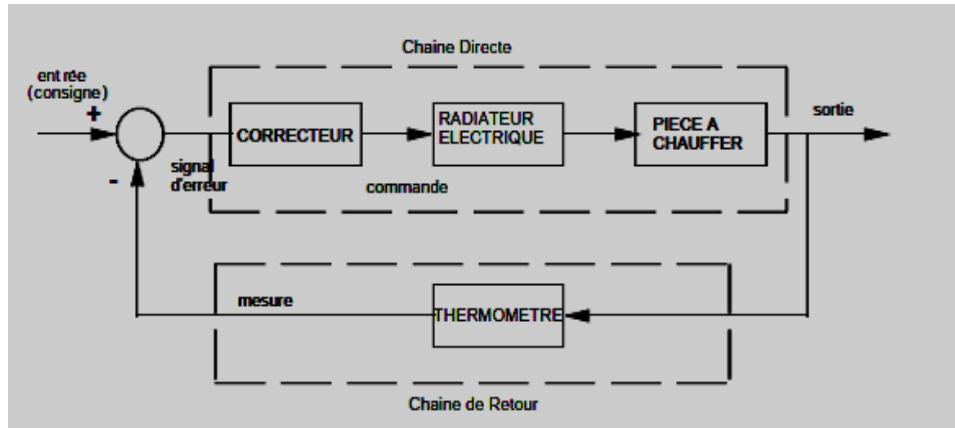
On peut représenter un système en boucle fermée par le schéma de principe suivant :



**Figure 1.6:** Système en BF

Si on compare la mesure de la sortie du système à une grandeur de consigne (ou référence), on sera capable d'agir sur la grandeur d'entrée du système (la commande), pour en corriger le fonctionnement.

Dans le cas du système de chauffage de l'exemple 1.4, on obtient le schéma de principe décrit par la figure 1.7 suivante :



**Figure 1.7:** Système en boucle fermée : chauffage d'une pièce

On notera sur ce schéma la présence d'un organe chargé d'effectuer la comparaison des signaux d'entrée (consigne encore appelée référence) avec la mesure. En réalité (dans la pratique), on ne compare pas directement la consigne à la mesure mais plutôt des tensions représentant ces deux grandeurs.

Avec la boucle fermée on introduit la notion d'asservissement.

#### **Définition 1.4 (système dynamique).**

Un système dynamique est un système dont l'étude ne peut être réalisée qu'en prenant en compte les valeurs passées du phénomène. Les grandeurs de sorties dépendent des valeurs présentes et passées des grandeurs d'entrées.

#### **Exemple : chauffage**

*Reprenons l'exemple du chauffage. Supposons que l'on veuille faire passer la température de la pièce de 20°C à 30°C. L'inertie thermique en fait un système lent. Il apparaît évident que la température de la pièce à un instant donné dépend de la température à l'instant précédent.*

*Le système du chauffage de la pièce est un système dynamique.*

### **1.4 Notion de Modèle**

#### **1.4.1 Modèle Mathématique**

Pour pouvoir utiliser les schémas précédents, il faut pouvoir décrire «efficacement» chaque processus physique situé à l'intérieur des blocs rectangulaires.

Pour pouvoir analyser le comportement de ces processus, il est intéressant de pouvoir disposer d'un modèle mathématique de ces processus.

La phase de modélisation est essentielle dans le processus de mise au point de régulateurs.

Toutefois, le but de ce cours n'est pas d'étudier en détails la modélisation des systèmes dynamiques.

On se contentera donc de savoir modéliser rapidement et simplement (modèles élémentaires).

### **Définition 1.5 (Modèle mathématique).**

On définit le modèle mathématique d'un système dynamique comme un ensemble d'équations qui représentent le comportement dynamique du système avec la précision souhaitée. Il est obtenu en écrivant les lois de la physique qui régissent le comportement du système (lois fondamentales de la dynamique, bilan des forces, de matière, etc...).

Obtention du modèle de comportement :

- Définir le système étudié et ses composants élémentaires
- Formuler le modèle mathématique idéal (modèle de connaissance) et dresser la liste des hypothèses à retenir
- Ecrire les lois de la physique (équations différentielles)
- Définir le modèle dédié à la régulation (fonction de transfert) → modèle de comportement.

### **Remarque 1.2.**

Il ne sert pas à grand chose de vouloir obtenir par les équations un modèle mathématique très compliqué. En effet, mieux vaut émettre plusieurs hypothèses simplificatrices afin de simplifier l'étude du système et la démarche future de mise au point de régulateur.

Toutefois, le modèle mathématique devra être suffisamment précis pour refléter le comportement réel du système. On voit donc apparaître un compromis précision/complexité dans l'étape de modélisation.

De plus, étant donné le caractère non-linéaire des processus réels, on est naturellement amenés à faire des simplifications telles que la linéarisation autour d'un point de fonctionnement (développement en série de Taylor)

## 1.4.2 Transformée de Laplace – Rappels

### 1.4.2.1 Introduction et motivation

L'étude des systèmes dynamiques revient à étudier les relations mathématiques qui les gouvernent (en l'occurrence des équations différentielles). La manipulation d'équations différentielles étant complexe, on utilisera la transformée de Laplace ( $\mathcal{L}$ ).

L'intérêt principal de cette transformée réside dans le fait qu'elle permet de remplacer une équation différentielle (resp. un produit de convolution) dans le domaine temporel par une équation polynômiale (resp. une multiplication) dans le domaine symbolique.

La recherche de la solution de cette équation différentielle se limite alors, à partir des racines du polynôme, à la recherche dans une table des transformées.

La partie suivante est un rappel sur la transformée de Laplace et quelques unes de ses propriétés les plus utilisées.

Pour l'automaticien, la transformée de Laplace ne sera qu'un outil, qu'il conviendra toutefois de maîtriser ; par conséquent, il ne s'agit pas de vouloir trouver ici une rigueur mathématique absolue.

**Définition 1.6 (Transformée de Laplace).** Par définition, la transformée de Laplace unilatérale d'une fonction  $f(t)$ , nulle quelque soit  $t < 0$ , est donnée par la relation (1.1).

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt \dots\dots\dots(1.1)$$

où la variable  $p$  est une variable complexe (on pourra aussi trouver la notation anglo-saxonne où la variable  $p$  est remplacée par la variable  $s$ ).

**Exemple :** Calcul de la T.L. d'un échelon unitaire

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \geq 0 \\ 0, & \text{autrement.} \end{cases}$$

En utilisant l'intégrale de définition (1.1), on peut écrire :

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \left[ -\frac{e^{-pt}}{p} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{p}$$

### 1.4.2.2 Principales propriétés

**Linéarité :**

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = aF(p) + bG(p) \dots\dots\dots(1.2)$$

Démonstration : utiliser la définition (1.1)



**Transformée de Laplace de la dérivée d'une fonction :**

$$\mathcal{L} \left[ \frac{df(t)}{dt} \right] = pF(p) - f(0) \dots\dots\dots (1.3)$$

Démonstration : intégrer par partie

**Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre n d'une fonction :**

$$\mathcal{L} \left[ \frac{d^n f(t)}{dt^n} \right] = p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \dots\dots\dots (1.4)$$

Cette propriété se déduit par itération de la propriété (1.3).

**Théorème de la valeur initiale :**

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) \dots\dots\dots (1.5)$$

Démonstration : utiliser la propriété (1.3)

**Théorème de la valeur finale :**

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) \dots\dots\dots (1.6)$$

La démonstration de cette propriété est du même ordre que celle du théorème de la valeur initiale.

**Attention :** ceci est valable uniquement pour les signaux stables ( $\neq$  sinus). En effet, il faut que le signal de sortie possède un régime permanent constant ou borné

**Facteur d'échelle :**

$$\mathcal{L} [f(at)] = \frac{1}{a} F \left( \frac{p}{a} \right) \dots\dots\dots (1.7)$$

Démonstration : utiliser la définition (1.1)

**Multiplication par t :**

$$\mathcal{L} [tf(t)] = -\frac{dF(p)}{dp} \dots\dots\dots (1.8)$$

Démonstration : utiliser la définition (1.1)

**Division par t :**

$$\mathcal{L} \left[ \frac{f(t)}{t} \right] = \int_p^\infty F(p) dp \dots\dots\dots (1.9)$$

Démonstration : utiliser la définition (1.1)

**Théorème du retard :**

$$\mathcal{L}[f(t - T)] = e^{-pT} F(p) \text{ pour tout } T \geq 0 \dots\dots\dots(1.10)$$

Démonstration : utiliser la définition (1.1)

**Multiplication par une fonction exponentielle :**

$$\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(p + a) \dots\dots\dots(1.11)$$

La simple écriture de l'intégrale de définition permet de se convaincre de cette propriété.

**Fonctions périodiques :**

Soit  $g(t)$  une fonction périodique de période  $T$ , et  $f(t)$  la fonction telle que :

$$f(t) = \begin{cases} g(t), & \text{si } t \in [0, T[ \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \text{ alors, on a :}$$

$$F(p) = (1 - e^{-pT}) G(p) \dots\dots\dots(1.12)$$

On peut remarquer que :  $f(t) = g(t) - g(t - T)$ .  
Par conséquent :  $F(p) = G(p) - e^{-pT} G(p) = (1 - e^{-pT}) G(p)$

## 1.5 Notion de Fonction de Transfert

Pour un système, la fonction de transfert est l'expression mathématique plus ou moins complexe qui indique le rapport entre une fonction du signal de sortie et une fonction du signal d'entrée.

### 1.5.1 Définition

**Définition 1.7 (Fonction de Transfert).** La fonction de transfert d'un système continu est le rapport de la transformée de Laplace de sa sortie sur la transformée de Laplace de son entrée en considérant les conditions initiales nulles :

$$F(p) = \frac{\text{Sortie}(p)}{\text{Entrée}(p)}$$

**Remarques :**

- Le concept de fonction de transfert permet de représenter le comportement dynamique du système de manière algébrique (le rapport sortie / entrée est variable dans le temps).

- La fonction de transfert est une caractéristique indépendante de l'amplitude et de la nature de l'entrée du système.
- C'est un modèle entrée-sortie qui ne contient aucune information sur la structure interne physique du système

### Exemple 01 Système électrique

Considérons le système (simple) électrique suivant, où l'on définira l'entrée  $u$  et la sortie  $i$ .

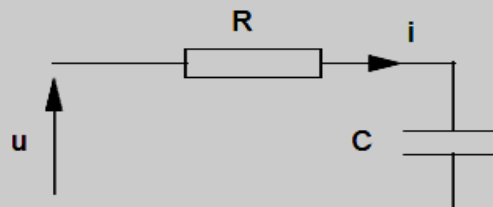


figure 1.8: Circuit RC

On peut écrire la relation entre la tension d'alimentation  $u(t)$  de ce circuit et le courant qui y circule  $i(t)$  :

$$u(t) = Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

ou bien encore :

$$u'(t) = Ri'(t) + \frac{1}{C} i(t)$$

et si l'on calcule la transformée de Laplace de cette équation :

$$\begin{aligned} pU(p) &= RpI(p) + \frac{1}{C} I(p) \\ &= \left( Rp + \frac{1}{C} \right) I(p) \end{aligned}$$

On a considéré les conditions initiales ( $u(0)$  et  $i(0)$ ) nulles. En effet, la tension initiale au borne de la résistance et l'intensité initiale du condensateur son nulles.

On obtient ainsi la fonction de transfert :

$$F(p) = \frac{I(p)}{U(p)} = \frac{Cp}{1+RCp}$$

Nous allons voir comment obtenir le modèle d'un système mécanique représentatif d'un grand nombre de problème.

### Exemple 02 : amortisseur

Considérons le système décrit par la figure 1.9 :

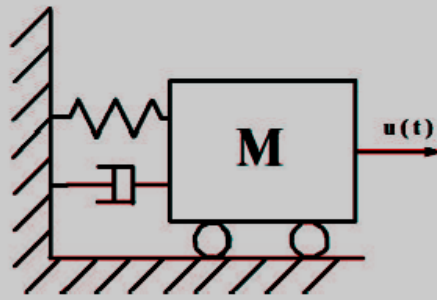


figure 1.9: Système Masse - Ressort

Par application du Principe Fondamental de la Dynamique, l'équation différentielle régissant le comportement de la masse  $M$  soumise à une force  $u(t)$  est donnée par :

$$My''(t) + fy'(t) + Ky(t) = ut$$

En appliquant la transformée de Laplace à cette équation et en choisissant la position  $y(t)$  de la masse comme sortie, on obtient la fonction de transfert du système comme le rapport de  $Y(p)$  sur  $U(p)$ , soit :

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{Mp^2 + fp + K}$$

D'autres exemples seront traités plus en détails

### 1.5.2 Notions associées

Un certain nombre de notions découlent directement de la définition de la fonction de transfert.

**Définition 1.8 (Ordre).** L'ordre du système est le degré le plus élevé du polynôme du dénominateur appelé polynôme caractéristique.

**Exemple :**

$T(p) = \frac{2p+3}{p^2+5p+10}$  représente la fonction de transfert d'un système du deuxième ordre.

**Définition 1.9 (Pôle(s)).** Le(s) pôle(s) sont les racines du dénominateur (le polynôme caractéristique) de la fonction de transfert. Le nombre de pôles correspond à l'ordre du système. Ils peuvent être réels ou complexes puisque les coefficients du dénominateur sont réels.

Un système est suffisamment caractérisé par la nature et le positionnement dans le plan complexe de ses pôles (lieu des pôles).

**Exemple :**

Le système décrit par la fonction de transfert  $T(p) = \frac{2p+3}{p^2+5p+10}$  est un système du deuxième ordre. Il possède alors 2 pôles complexes conjugués  $p_1 = -2.5 + j1.94$  et  $p_2 = -2.5 - j1.94$ .

**Définition 1.10 (Régime).** Il existe deux régimes de fonctionnement successifs :

- régime transitoire : évolution de la sortie dans le temps suite à une variation de l'entrée. Il est délimité par les réponses initiale et finale. C'est la « raison » d'être de la régulation
- La sortie et la commande sont maintenues constantes. On atteint une amplitude constante de la sortie quelque soit le temps. On l'appelle aussi régime stationnaire, d'équilibre ou établi.

**Remarque :** On associe souvent les notions de dynamique à transitoire et statique à permanent.

## 1.6 Schémas Blocs et Algèbre de Diagrammes

### 1.6.1 Introduction

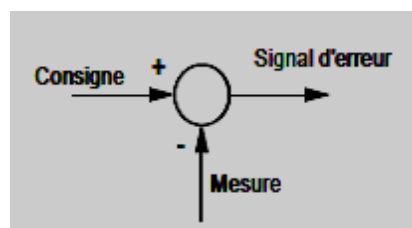
Les schémas qui illustrent la régulation des procédés se présentent sous deux formes majeures :

- schémas blocs (ou schémas fonctionnels) : les rôles des blocs sont fonction des différents éléments de la boucle de régulation. Ils sont reliés entre eux par des flèches annotées et représentant les signaux qui y circulent. Ces blocs sont indépendants de la nature du signal à réguler.
- schémas opérationnels (schémas de principe, schémas réels) : on représente la circulation des fluides ou des signaux électriques à travers l'ensemble des équipements ainsi que dans le système de régulation. Les symboles sont standards.

Etant donné la diversité des signaux et des systèmes à étudier, nous choisirons d'utiliser les schémas dans la suite de ce cours.

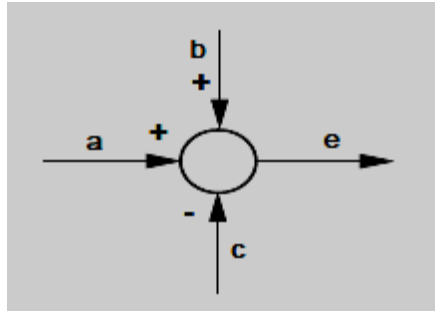
### 1.6.2 Construction

Etudions en premier lieu l'organe responsable de la comparaison entre l'entrée de consigne et la mesure. Cet organe est appelé comparateur :



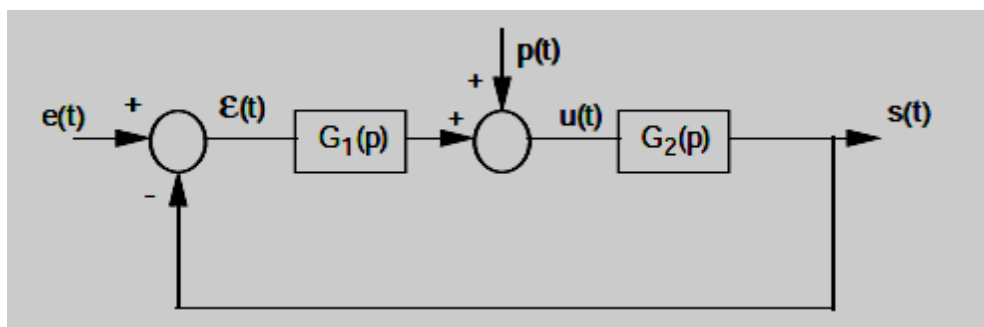
**Figure 1.10:** Un comparateur :  $\text{Signal d'erreur} = \text{Consigne} - \text{Mesure}$

Ce comparateur peut comporter plus de deux entrées, comme indiqué sur la figure 1.11.



**Figure 1.11:** comparateur à plusieurs entrées :  $e=a+b-c$

Dans le cas général les schémas blocs peuvent être très ramifiés et comporter plusieurs boucles imbriquées. Toutefois, on pourra, en règle quasi-générale, utiliser le schéma-blocs « standard » sous la forme de la figure 1.12.



**Figure 1.12:** Schéma-blocs d'un système en boucle fermée

Avec

- $e(t)$  : signal d'entrée, consigne, référence ;
- $u(t)$  : commande ;
- $s(t)$  : signal de sortie ;
- $p(t)$  : perturbation de commande (car  $p(t)$  agit (s'ajoute) sur la commande du système  $G_2(p)$ ) ;
- $\epsilon(t)$  : signal d'erreur (sortie du comparateur) ;
- $G_1(p)$  : fonction de transfert du correcteur (on dit aussi régulateur, voire contrôleur) ;
- $G_2(p)$  : fonction de transfert du système à commander (à réguler et asservir).  $G_2(p)$  contient les fonctions de transfert de l'actionneur et du capteur.

Pour obtenir le schéma bloc d'un système, la démarche de construction est la suivante :

- écrire les équations de la physique associées à chaque élément constituant le système
- appliquer la transformée de Laplace
- calculer la fonction de transfert associée à chaque élément en supposant les conditions initiales nulles
- identifier les relations inter-sigaux et sigaux-blocs
- tracer le schéma fonctionnel
- simplifier le schéma et le mettre (le plus souvent possible) sous la forme de la figure 1.12

### 1.6.3 Simplification – Réduction

Quand on établit le schéma-blocs d'une installation, on obtient souvent une structure complexe.

On peut, grâce aux quelques règles qui suivent, simplifier ces diagrammes.

**Règle 1. série :** Soit le schéma 1.13 suivant :

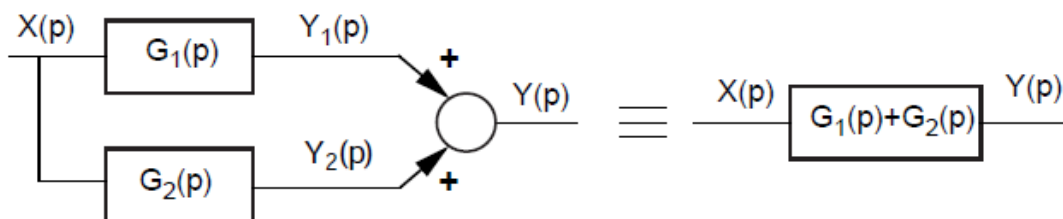


**Figure 1.13:** Schéma-blocs en série

On peut écrire :

$$\begin{cases} Y(p) = Y_1(p)G_2(p) \\ Y_1(p) = X(p)G_1(p) \end{cases} \quad \text{donc : } \boxed{\frac{Y(p)}{X(p)} = G_1(p)G_2(p)}$$

**Règle 2. Parallèle :** Soit le schéma 1.14 suivant :

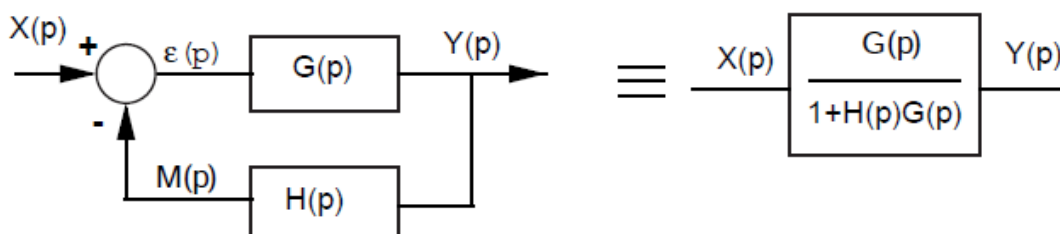


**Figure 1.14:** Schéma-blocs en parallèle

On peut écrire :

$$\begin{cases} Y(p) = Y_1(p) + Y_2(p) \\ Y_1(p) = X(p)G_1(p) \\ Y_2(p) = X(p)G_2(p) \end{cases} \quad \text{donc : } \boxed{\frac{Y(p)}{X(p)} = G_1(p) + G_2(p)}$$

**Règle 3. Boucle fermée :** Soit le schéma 1.15 suivant :



**Figure 1.15:** Boucle fermée

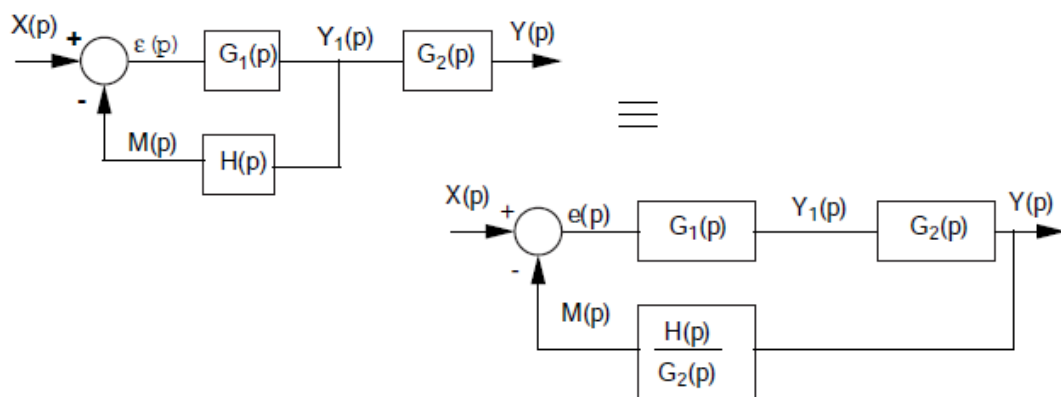
On peut écrire :

$$\begin{cases} Y(p) = \varepsilon(p)G(p) \\ \varepsilon(p) = X(p) - M(p) & \text{donc : } Y(p) = (X(p) - H(p)Y(p))G(p) \\ M(p) = H(p)Y(p) \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{G(p)}{1 + H(p)G(p)}}$$

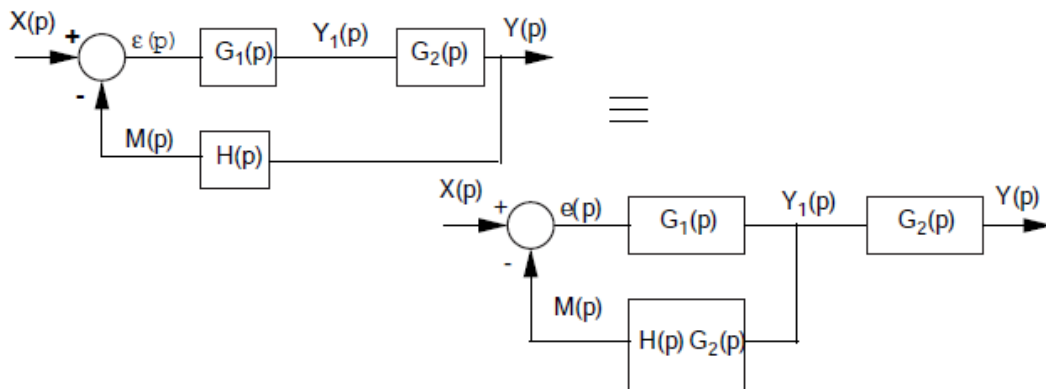
On montre de la même manière les équivalences entre les schéma-blocs suivants :

**Règle 4. Lien arrière :** Soit le schéma 1.16 suivant :



**Figure 1.16:** Déplacement d'un lien arrière

**Règle 5. Lien avant :** Soit le schéma 1.17 suivant :



**Figure 1.17:** Déplacement d'un lien avant

En pratique, on simplifiera toujours en premier lieu les boucles les plus internes (les plus imbriquées).

Pour simplifier un schéma-blocs, il sera possible d'utiliser les techniques graphiques exposées ci-avant, ou des techniques calculatoires. C'est l'objet de l'exemple qui suit.



**Annexe du Chapitre 01**  
**Table des transformées de Laplace**

Table de transformées de Laplace

	$f(t)$	$F(s)$
P1	1 ou $u(t)$	$\frac{1}{s}$
P2	$t$	$\frac{1}{s^2}$
P3	$t^n$ ( $n$ entier positif)	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
P4	$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$
P5	$t e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
P6	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
P7	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
P8	$e^{-at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
P9	$e^{-at} \cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
P10	$t \sin(\omega t)$	$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
P11	$t \cos(\omega t)$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
P12	$t^n, n \in \mathbb{R}, n > -1$	$\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$
P13	$u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
P14	$\delta(t)$	1
P15	$\delta(t-a)$	$e^{-as}$
P16	$\frac{df}{dt} = f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
P17	$\frac{d^2f}{dt^2} = f''(t)$	$s^2 F(s) - s f(0) - f'(0)$
P18	$\frac{d^n f}{dt^n} = f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
P19	$e^{-at} f(t)$	$F(s+a)$
P20	$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$
P21	$g(t) u(t-a)$	$e^{-as} \mathcal{L}\{g(t+a)\}$

## Table de transformées de Laplace

Cette deuxième partie de la table est surtout utilisée pour trouver des transformées de Laplace inverses. Les propriétés P25 à P30 ne sont pas essentielles et les résultats indiqués pourraient s'obtenir avec les propriétés précédentes et les techniques vues dans le chapitre 5. Par exemple, P27 vient directement de P6 ; P25 se déduit facilement de P3. On peut démontrer P26 en utilisant P25 et P19. Elles sont dans la table pour faciliter le travail du calcul manuel de la transformée inverse. La décomposition en fractions partielles, à l'aide de la commande `expand()` de Nspire, et un certain travail de manipulation algébrique peuvent être nécessaires pour bien utiliser cette table.

	$F(s)$	$f(t)$
P22	$e^{-as}F(s)$	$f(t-a)u(t-a)$
P23	$\frac{F(s)}{s}$	$\int_0^t f(\tau) d\tau$
P24	$F(s) \cdot G(s)$	$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau = f(t) * g(t) = (f * g)(t)$
P25	$\frac{1}{s^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
P26	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\frac{t^{n-1}e^{-at}}{(n-1)!}$
P27	$\frac{1}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{1}{\omega} \sin(\omega t)$
P28	$\frac{1}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$\frac{1}{\omega} e^{-at} \sin(\omega t)$
P29	$\frac{1}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega^3} (\sin(\omega t) - \omega t \cos(\omega t))$
P30	$\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega} (t \sin(\omega t))$

Si  $f_p(t)$  est une fonction périodique de période  $P$ , donc si  $f_p(t+P) = f_p(t) \quad \forall t > 0$ , alors

$$\mathcal{L}\{f_p(t)\} = \frac{\int_0^P e^{-st} f_p(t) dt}{1 - e^{-sP}}$$

Les fonctions dans le domaine du temps sont notées par des lettres minuscules et celles dans le domaine  $s$  par des lettres majuscules. La transformée de Laplace de  $f(t)$  est notée  $F(s)$ . Par définition,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = F(s) \quad \text{si l'intégrale impropre converge}$$

Les opérateurs  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{L}^{-1}$  sont des opérateurs linéaires. Pour  $a, b \in \mathbb{R}$ ,

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = aF(s) + bG(s) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}^{-1}\{aF(s) + bG(s)\} = af(t) + bg(t)$$

Si les limites existent,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = f(0^+) \quad \text{et} \quad \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$$

**Exemple 01 :****Résolution d'une équation différentielle du 1<sup>ier</sup> ordre en utilisant les transformé de Laplace**

On considère l'équation différentielle

$$y'(t) = 2y(t) + e^{3t} \sin(t) \quad \text{et} \quad y(0) = 1.$$

On pose  $Y(p) = \mathcal{L}(y(t))$  alors

$$\mathcal{L}(y'(t)) = p\mathcal{L}(y(t)) - y(0) = pY(p) - 1$$

et d'autre part on a

$$\mathcal{L}(y'(t)) = \mathcal{L}(2y(t) + e^{3t} \sin(t)) = 2\mathcal{L}(y(t)) + \mathcal{L}(e^{3t} \sin(t)) = 2Y(p) + \frac{1}{(p-3)^2 + 1}.$$

D'où

$$pY(p) - 1 = 2Y(p) + \frac{1}{(p-3)^2 + 1}$$

*i.e.*

$$(p-2)Y(p) = \frac{1}{(p-3)^2 + 1} + 1$$

donc

$$Y(p) = \frac{1}{((p-3)^2 + 1)(p-2)} + \frac{1}{p-2}.$$

On décompose en éléments simples de sorte que

$$Y(p) = -\frac{1}{2} \frac{p-4}{(p-3)^2 + 1} + \frac{3}{2} \frac{1}{p-2} = -\frac{1}{2} \frac{p-3}{(p-3)^2 + 1} + \frac{1}{2} \frac{1}{(p-3)^2 + 1} + \frac{3}{2} \frac{1}{p-2}$$

d'où pour  $t \geq 0$

$$y(t) = \frac{1}{2} e^{3t} (-\cos(t) + \sin(t)) + \frac{3}{2} e^{2t}.$$

**Exemple 02 :****Résolution d'une équation différentielle du 2<sup>ier</sup> ordre en utilisant les transformé de Laplace**

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' + 2y' + 2 = e^{-t} \text{ avec } y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = 2$$

Il suffit pour résoudre cette équation d'en calculer la transformée de Laplace :

$$\begin{aligned} [p^2 Y(p) - p - 2] + 2[pY(p) - 1] + \frac{2}{p} &= \frac{1}{p+1} \\ Y(p) [p^2 + 2p] &= p + 4 - \frac{2}{p} + \frac{1}{p+1} \\ Y(p) &= \frac{(p+4)p(p+1) - 2(p+1) + p}{p^2(p+1)(p+2)} \\ &= \frac{A}{p^2} + \frac{B}{p} + \frac{C}{p+1} + \frac{D}{p+2} \\ &= \frac{-1}{p^2} + \frac{3}{p} + \frac{-1}{p+1} + \frac{-1}{p+2} \end{aligned}$$

Ce qui permet d'écrire, par transformée inverse de Laplace (utiliser les tables) :

$$y(t) = -t + 3 - e^{-t} - e^{-2t}$$

**Exemple 03 :**

Simplification de schéma-bloc

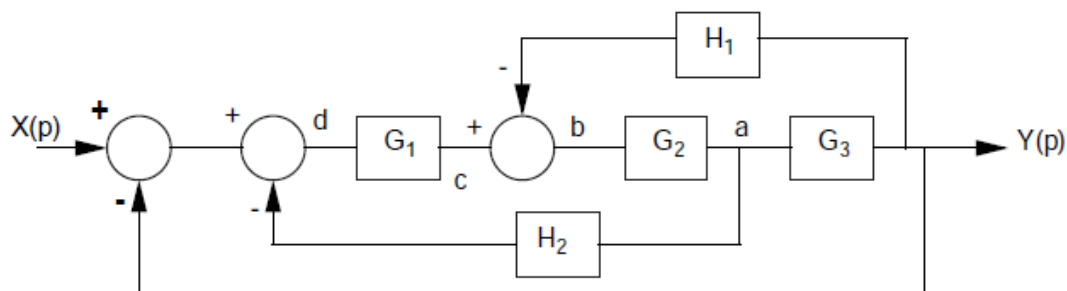
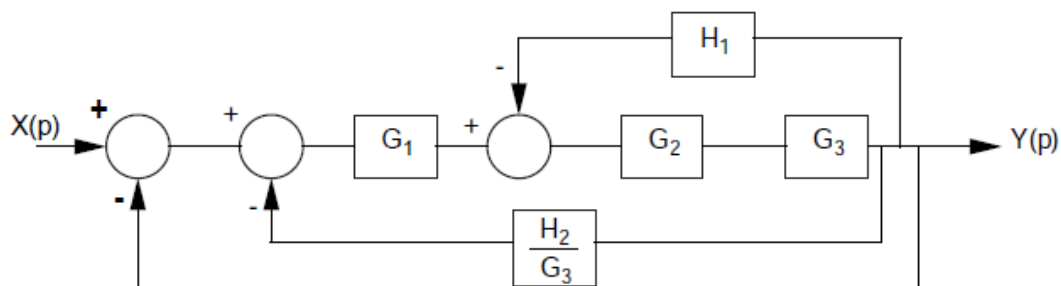
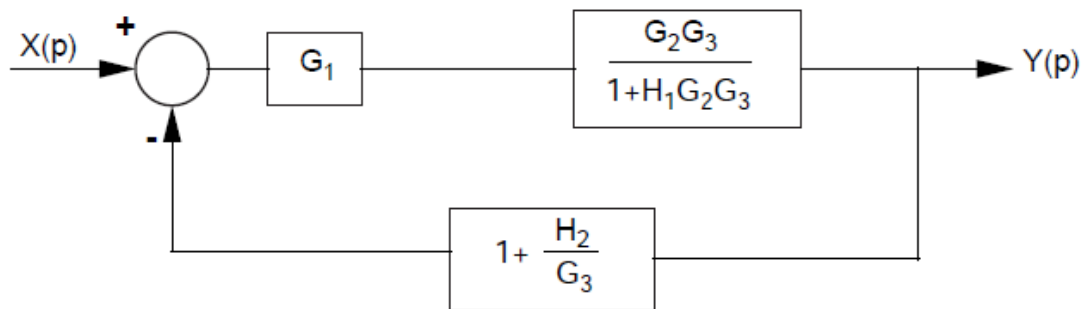


Schéma-blocs à simplifier

**1<sup>ière</sup> Etape :**

**2<sup>ième</sup> Etape :**

Ce qui permet d'écrire :

$$\frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{G_1(p)G_2(p)G_3(p)}{1 + H_1(p)G_2(p)G_3(p) + H_2(p)G_1(p)G_2(p) + G_1(p)G_2(p)G_3(p)}$$

On peut retrouver ce résultat par le calcul :

$$\begin{cases} Y = aG_3 \\ a = bG_2 \\ b = c - H_1Y \\ c = dG_1 \\ d = X - Y - H_2a \end{cases} \quad \text{donc : } Y = [(X - Y - H_2a) - H_1Y] G_2G_3$$

Ce qui conduit au résultat souhaité.