Chapitre II. Systèmes du Premier Ordre

Sommaire

II.2.1. Objectifs

L'idée de ce chapitre est de poursuivre l'étude des systèmes dynamiques. Conformément à ce qui a été énoncé auparavant, nous allons soumettre un système élémentaire à des signaux élémentaires appelés entrées canoniques. Les systèmes les plus élémentaires (les plus simples) sont des systèmes du premier ordre dont l'étude temporelle va être détaillée ci après.

Définition

L'analyse temporelle consiste à étudier la réponse d'un système représenté par sa fonction de transfert à un signal d'entrée variant dans le temps

Le signal d'entrée peut en principe être quelconque. Toutefois, pour obtenir une expression analytique, nous utiliserons des signaux élémentaires (impulsion, échelon, rampe). Ceci se justifie par le fait que l'on peut décomposer tout signal en une somme de signaux élémentaires.

II.2.2. Systèmes du premier ordre

Par définition, ces systèmes obéissent à une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants :

$$x(t) = a\frac{dy(t)}{dt} + by(t) \quad \text{………………………… (2.1)}$$

Où x(t) et y(t) représentent respectivement l'entrée et la sortie du système.

Outre l'intérêt purement pédagogique de cette partie (elle permet de travailler sur la représentation la plus simple possible, sous quelques hypothèses simplificatrices), il faut noter qu'un grand nombre de systèmes physiques peuvent être représentés par des modèles du premier ordre.

La transformée de Laplace de l'équation **(2.1),** où les conditions initiales sont considérées nulles, permet d'obtenir facilement la forme générale de la fonction de transfert des systèmes du premier ordre :

$$F(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{1}{ap+b} = \frac{1/b}{1+\frac{a}{b}p} \quad \text{…………………(2.2)}$$

En utilisant les changements de variables K = 1=b et τ = a=b on obtient la forme (appelée forme standard) d'une fonction de transfert d'un système du premier ordre :

$$F(p) = \frac{K}{1+\tau p}$$ ………………….(2.3)

F(s) possède 2 paramètres essentiels : K et τ.

- Le gain statique du système K s'exprime dans la même unité que le rapport Δy(t)/Δx(t). Pour un système stable (la sortie est constante en régime permanent), le gain statique représente la valeur prise par sa réponse à une entrée en échelon unitaire quand t $\longrightarrow +\infty$.
- La constante de temps τ du système s'exprime en secondes et caractérise la vitesse (dynamique) de réaction d'un système.

Ces deux grandeurs suffisent à caractériser tout système du premier ordre : ce sont ses grandeurs (paramètres) caractéristiques.

II.2.3. Réponses temporelles

Il est intéressant de connaître et de reconnaître les réponses des systèmes du premier ordre aux signaux temporels classiques : impulsion, échelon, rampe. Cela permettra en particulier une comparaison avec les signaux réponses du système physique sur lequel on travaille.

II.2.3.1. Réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle d'un système est la sortie de ce système suite à une sollicitation en impulsion de Dirac :

$$x(t) = \begin{cases} \infty & \text{pour } t = 0 \\ 0 & \text{pour } t \neq 0 \end{cases} \Longrightarrow X(p) = 1$$ ……………………………….(2.4)

Les équations 2.2 et 2.4 permettent d'écrire l'expression de la réponse impulsionnelle :

$$Y(p) = \frac{K}{1+\tau p} X(p) = \frac{K}{\tau} \frac{1}{p+\frac{1}{\tau}}$$

$$\overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Longrightarrow} \boxed{y(t) = \frac{K}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}}$$ ……………………….(2.5)

La tangente à l'origine de cette réponse a pour coefficient directeur : $y'(0)= K/\tau^2$ (*la pente de la tangente est égale à la dérivée en ce point*).

On peut montrer facilement que l'intersection de cette tangente à l'origine avec l'axe des temps se fait à t = τ comme indiqué sur la figure (2.1).

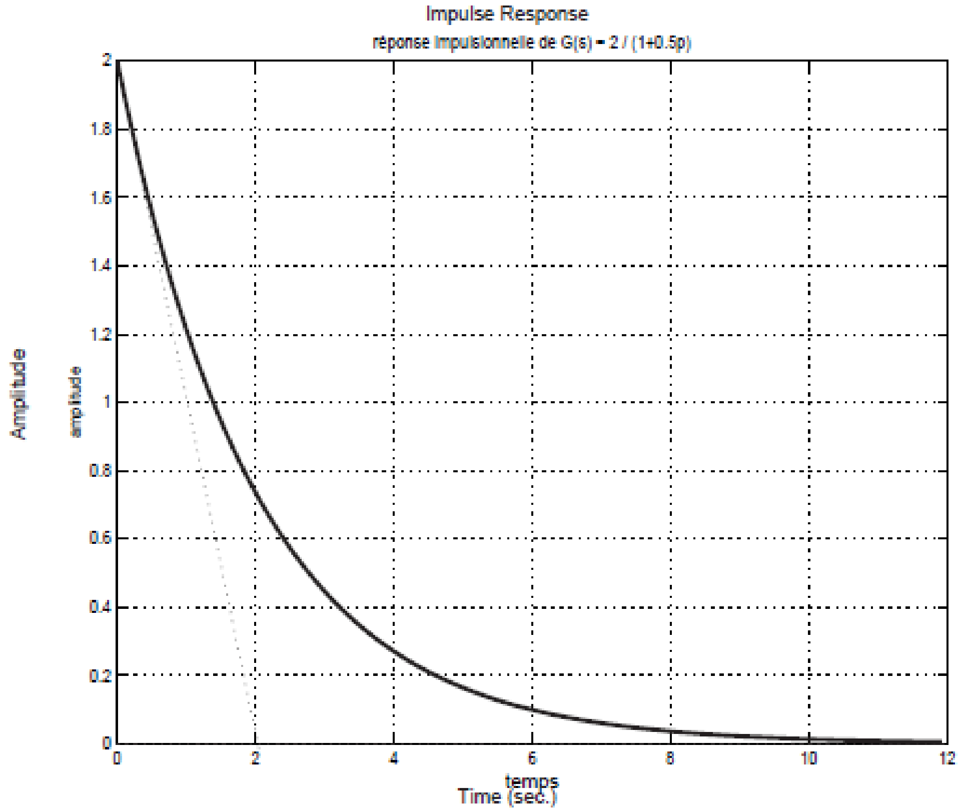


Figure (2.1). Réponse impulsionnelle d'un système du premier ordre

La figure suivante (2.2) permet de se rendre compte de l'influence de τ sur la réponse impulsionnelle :

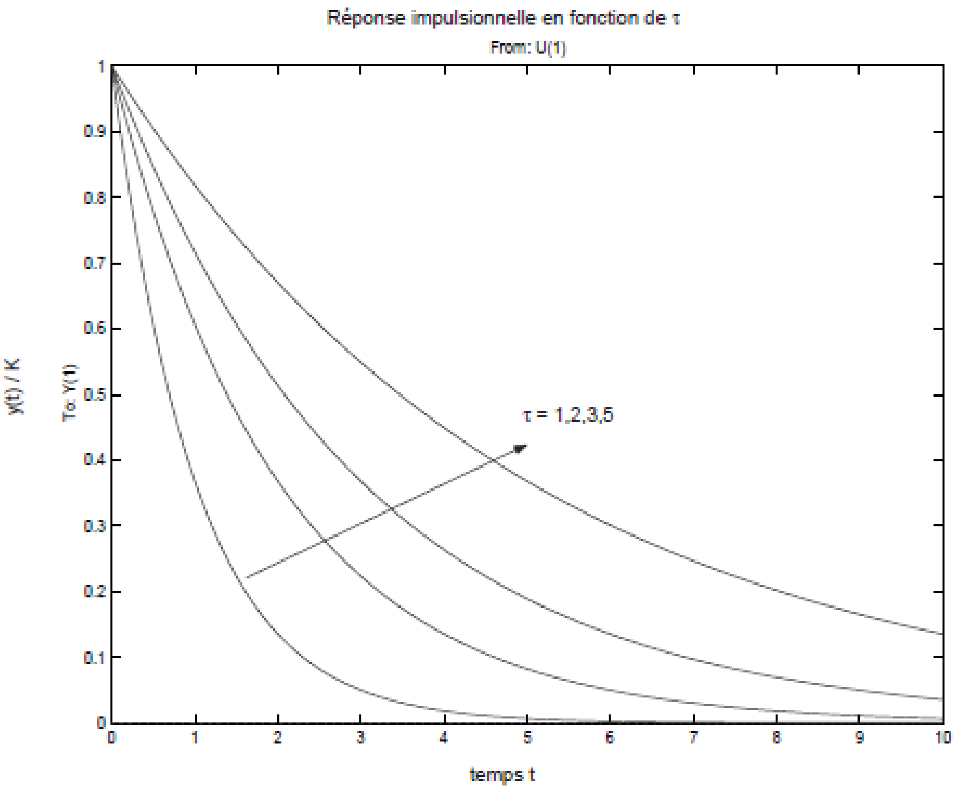


Figure (2.2) : Réponse impulsionnelle d'un système du premier ordre en fonction de τ

On remarque donc que τ influence la rapidité du système (*le temps que le système met pour revenir à l'état initial après une impulsion*) mais ne modifie pas l'allure générale de la courbe. La variation de **K** ne fait que déplacer le point de départ de cette courbe de réponse. Par souci de clarté, cette courbe est normalisée par rapport à **K**.

II.2.3.2. Réponse indicielle

La réponse indicielle d'un système est sa réponse à une entrée en échelon (entrée constante de valeur A). L'entrée du système est donc définie par l'équation (2.6).

$$x(t) = \begin{cases} A & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases} \Longrightarrow X(p) = \frac{A}{p} \quad \text{……………………………..(2.6)}$$

$$Y(p) = \frac{K}{1+\tau p} \times \frac{A}{p} = AK\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+\frac{1}{\tau}}\right) \stackrel{\mathcal{L}^{-1}}{\Longrightarrow} \boxed{y(t) = AK\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)} \quad \text{……. (2.7)}$$

Remarque 2.1. D'après le théorème de la valeur finale, on a :

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{p\to 0} pY(s) = AK$$

La réponse atteint donc un régime final stable. Le coefficient directeur de la tangente à l'origine est donné par : **y'(0) = AK/τ.**

Définition (***temps de réponse***).

On appelle ***<u>temps de réponse</u>*** d'un système, le temps que met la réponse indicielle du système pour ne plus sortir d'un intervalle de ±5% autour de sa réponse finale (les anglo-saxons utilisent couramment une référence à ±2%). On considère alors que le régime permanent est obtenu au bout d'un temps égal au temps de réponse du système (la sortie est alors « quasi-équivalente » au gain statique K × amplitude de l'entrée).

L'évolution de la sortie jusqu'au temps de réponse correspond alors au régime transitoire. Cette définition est valable quelque soit l'ordre du système considéré.

Pour déterminer le temps de réponse d'un système du premier ordre, il suffit de trouver tr (*<u>pour temps de réponse</u>*) tel que : $y(t_r) = 0.95*AK$. C'est à dire :

$$y(t_r) = AK\left(1 - e^{-\frac{t_r}{\tau}}\right) = 0.95AK \Longrightarrow e^{-\frac{t_r}{\tau}} = 0.05$$

Et donc

$$t_r = -\tau \ln 0.05 \simeq 3\tau$$

Définition (*erreur statique*)

Si le système est stable, on appelle erreur statique (aussi erreur de position), la différence que l'on relève sur une réponse indicielle, entre l'entrée et la sortie d'un système lorsque **t tend vers l'infini** ∞

Pour un système du premier ordre, on peut calculer l'erreur statique comme suit :

$$\lim_{t\to\infty} \epsilon(t) = \lim_{t\to\infty} [x(t) - y(t)] = \lim_{p\to 0} p\,[X(p) - Y(p)]$$
$$= \lim_{p\to 0} p\,[X(p) - Y(p)] = \lim_{p\to 0} A\,[1 - G(p)]$$
$$= A(1-K)$$

L'erreur statique n'est donc nulle que pour les systèmes du premier ordre dont le gain statique K est unitaire. On l'exprime en pourcentage (en divisant par A. Elle est alors indépendante de l'amplitude A de l'entrée !!!

Remarque

- La tangente à l'origine coupe l'axe horizontal y = AK pour t =τ.
- La réponse indicielle est la dérivée de la réponse impulsionnelle.
- L'amplitude de la réponse indicielle pour t =τ est :

$$y(\tau) = AK(1-e^{-1}) = 0.632*AK$$

Pour un système du premier ordre, la constante de temps est donc le temps au bout duquel la réponse indicielle atteint 63.2% de son régime final.

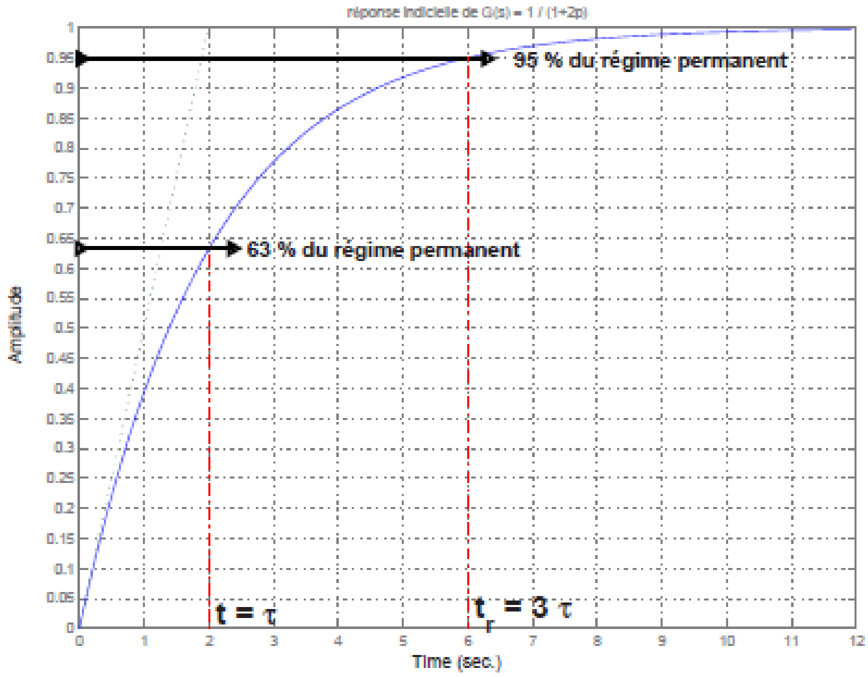


Figure (2.3) : Réponse indicielle d'un système du premier ordre

De la même façon que pour la réponse impulsionnelle, on peut se rendre compte de l'influence de τ et de K sur la réponse indicielle en consultant les figures (2.4) et (2.5) :

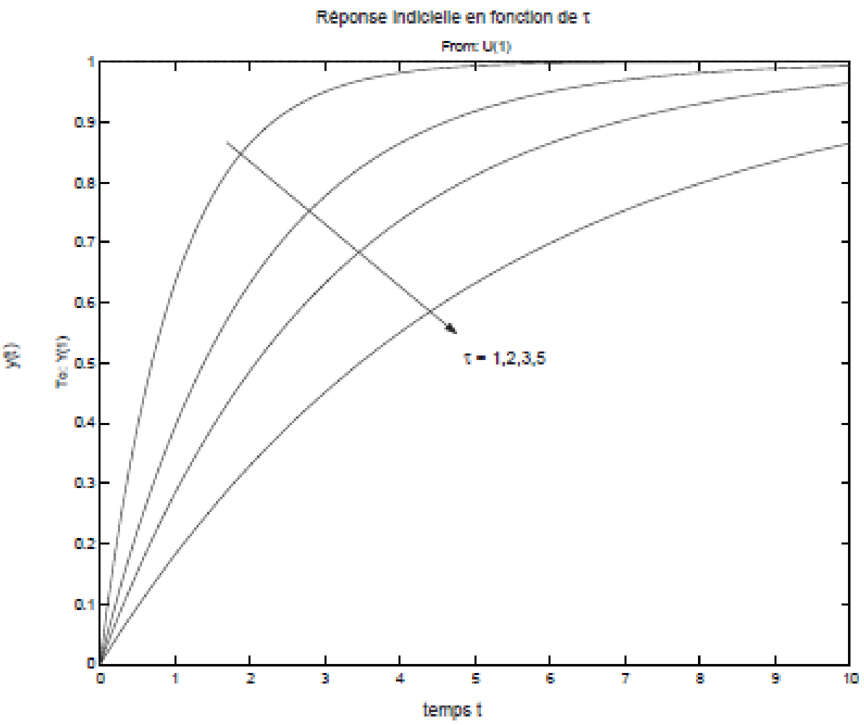


Figure (2.4) : Réponse indicielle d'un système du premier ordre en fonction de τ

On remarque donc que τ influence la rapidité du système (le temps que met le système pour parvenir à rejoindre l'entrée) mais ne modifie pas l'allure générale de la courbe.

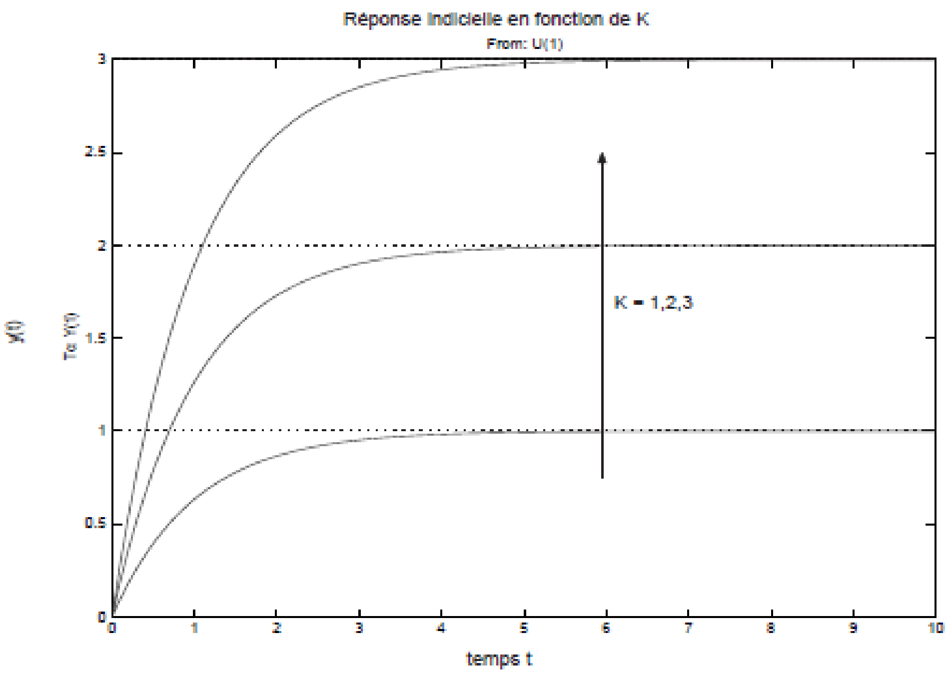


Figure (2.5) : Réponse indicielle d'un système du premier ordre en fonction de K

La variation de K ne fait que translater verticalement la courbe mais ne modifie pas la rapidité du système (temps de réponses identiques).

II.2.3.3. Réponse à une rampe

Un signal d'entrée en rampe est défini par :

$$x(t) = \begin{cases} At & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases} \Longrightarrow X(s) = \frac{A}{p^2}$$ ………………… (2.8)

Les équations (2.3) et (2.8) permettent d'écrire l'expression de la réponse d'un système du premier ordre à une rampe :

$$Y(p) = \frac{K}{1+\tau p} \times \frac{A}{p^2} = AK\left(\frac{1}{p^2} - \frac{\tau}{p} + \frac{\tau}{p+\frac{1}{\tau}}\right)$$

$$\overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Longrightarrow} \boxed{y(t) = AK\left(t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$$ …………………(2.9)

Définition (erreur de traînage).

On appelle erreur de traînage (aussi erreur de vitesse), la différence que l'on relève entre l'entrée et la sortie d'un système, lorsque t→ ∞, pour une entrée en rampe. Cette définition est valable quelque soit l'ordre du système considéré.

Dans le cas d'un système du premier ordre, on a :

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \epsilon(t) &= \lim_{t\to\infty} [x(t) - y(t)] \\ &= \lim_{t\to\infty} \left[At(1-K) + \tau - \tau e^{\frac{-t}{\tau}}\right] \\ &= \lim_{t\to\infty} [At(1-K) + \tau] \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{cases} \text{si } K = 1 & \text{l'erreur de traînage est égale à } \tau \\ \text{si } K \neq 1 & \text{l'erreur de traînage est infinie} \end{cases}$$

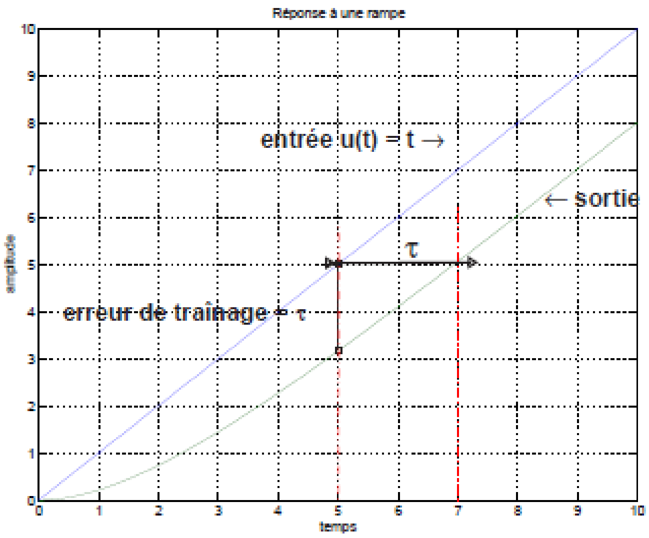


Figure (2.6) : Réponse d'un système du premier ordre à une rampe quand K=1

II.2.4. Cas particulier des systèmes du premier ordre généralisé

Son équation différentielle vaut :

$$k_0x(t) + k_1\frac{dx(t)}{dt} = \frac{dy(t)}{dt} + by(t)$$

Sa fonction de transfert est donnée par :

$$F(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{k_0+k_1p}{1+\tau p}$$

On note la présence d'un zéro (solution du numérateur). Il y a alors modification de la réponse indicielle. En effet, si on cherche la réponse (avec C.I. nulles), on s'aperçoit que la réponse indicielle débute à k_1/τ.

II.2.5. Cas particulier des systèmes intégrateurs

Ce type de système est très fréquent en pratiques : asservissement de position d'un moteur, modèle d'une cuve, etc...

Son équation différentielle vaut :

$$Kx(t) = \tau\frac{dy(t)}{dt}$$

Sa fonction de transfert est donnée par :

$$F(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{K}{\tau} \times \frac{1}{p}$$

On note la présence d'un pôle à l'origine.

II.2.5.1. Réponse impulsionnelle

$$Y(p) = \frac{K}{\tau p}X(p) = \frac{K}{\tau p} \times 1 \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = \frac{K}{\tau} = \text{constante},$$ ……………(2.10)

pas de retour à zéro

II.2.5.2. Réponse indicielle

$$Y(p) = \frac{K}{\tau p}X(p) = \frac{K}{\tau p} \times \frac{1}{p} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = \frac{K}{\tau}t$$ …………(2.11)

Dans ce cas la réponse indicielle diverge (elle croît indéfiniment). La notion de gain statique n'a pas de sens ici car nous n'avons pas de régime permanent.

II.2.6 Cas particulier des systèmes avec retard

Les retards peuvent être de différentes natures :

- ***Retard physique :*** il est dû aux éléments physiques qui composent le processus : il provient par exemple du chemin a parcourir pour le transport de l'information, du parcours des fluides entre le point d'introduction et le capteur.

- ***Le retard de mesure*** provient du temps que met le capteur pour délivrer la mesure. Dans le cas des débits, pressions, etc... la mesure se déplace à la vitesse proche du son et le retard est quasiment négligeable. Dans le cas des températures, pH, COD, la mesure se déplace à la vitesse des fluides conducteurs et le retard est plus important...

La forme de la fonction de transfert est un premier ordre faisant apparaître un terme exponentiel au dénominateur :

$$F(p) = \frac{Ke^{-Tp}}{1+\tau p} \quad \text{……………………….. (2.12)}$$

En effet, en se basant sur le théorème du retard (voir relation 1.10), on en déduit la fonction temporelle f(t→T) qui est bien la fonction retardée d'une valeur T.

Exemple

A titre d'exemple, on peut constater l'effet d'un retard de 2.5 s sur la réponse indicielle d'un système de fonction de transfert

$$\mathbf{F(p) = e^{-2.5p}/(1+2p)}$$

(ce qui pourrait illustrer le fait qu'on allume le radiateur, la pièce ne chauffe pas immédiatement ...) :

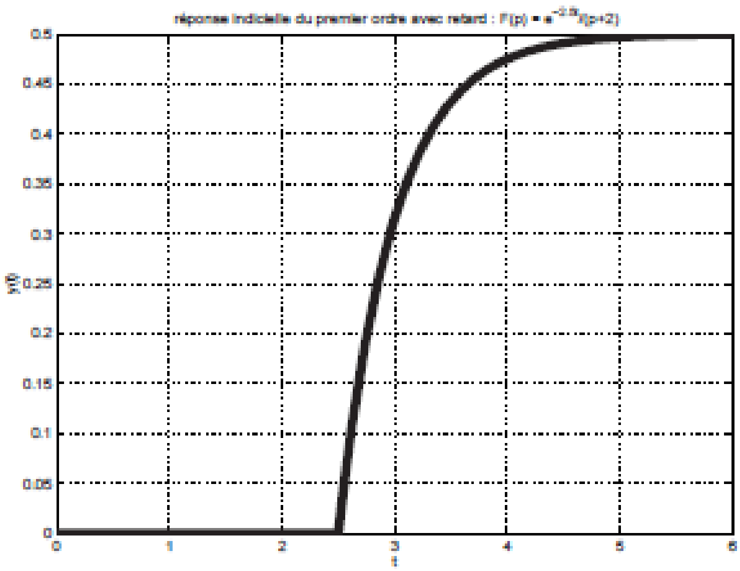


Figure (2.7) : Réponse indicielle d'un système du premier ordre retardé

Exercices corrigés

Exercice 01 :

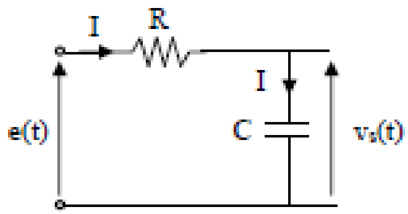
Soit le montage RC suivant :

1- Déterminer la fonction de transfert de ce système.

$$H(p) = \frac{V_s(p)}{E(p)}$$

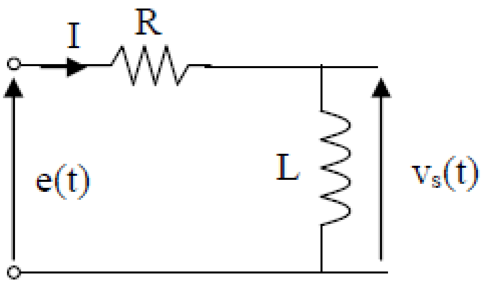
2- Déduire la nature du système ainsi que ses paramètres caractéristiques en fonction de R et C.

3- Pour $e(t) = 10u(t)$, $R = 100\Omega$ et $C = 1\mu F$; calculer et tracer $v_s(t)$.



Exercice 02 :

1. Soit le montage RL suivant :
2. Déterminer la fonction de transfert de ce système.
3. Représenter $v_s(t)$ pour $e(t) = 2u(t)$, $R = 100\Omega$ et $L = 1mH$.



Exercice 03 :

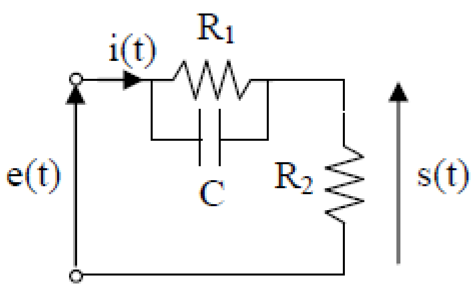
Déterminer et représenter la réponse à un échelon de vitesse (rampe) d'un système de 1er ordre dont la fonction de transfert est :

$$H(p) = \frac{k}{1+\tau p}.$$

Exercice 04 :

Déterminer la fonction de transfert des montages suivants :

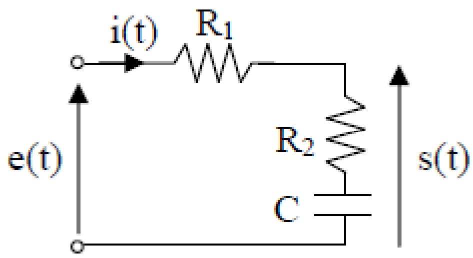
Système de 1er ordre à avance de phase



Exercice 05 :

Déterminer la fonction de transfert des montages suivants :

Système à retard de phase



Corrigés

Corrigé 01 :

1. $e(t) = Ri(t) + v_s(t)$

$$e(t) = RC\frac{dv_s(t)}{dt} + v_s(t) \Rightarrow E(p) = RCV_s(p) + V_s(p)$$

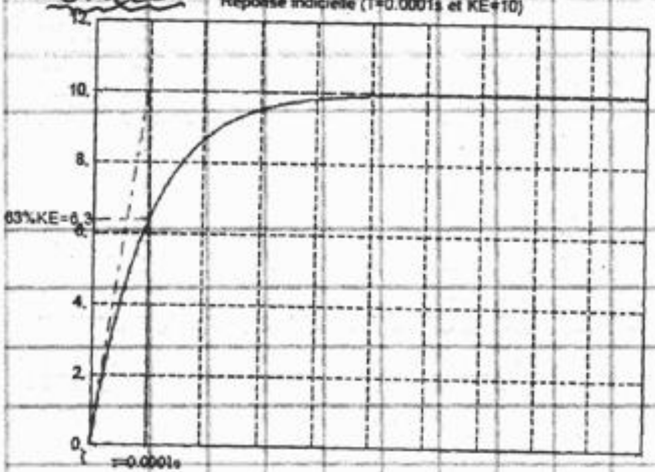
Donc $H(p) = \dfrac{V_s(p)}{E(p)} = \dfrac{1}{1+RCp}$

2. C'est un système de 1er ordre avec k=1 et $\tau = RC$

3. $V_s(p) = \dfrac{1}{1+RCp}E(p)$ avec $E(p) = \dfrac{10}{p}$; $\tau = RC = 100x10^{-6} = 10^{-4}\,s$

$$V_s(p) = \frac{10}{p(1+10^{-4}p)} \Rightarrow v_s(t) = 10(1-e^{-\frac{t}{10^{-4}}}) \Rightarrow \boxed{v_s(t) = 10(1-e^{-10^4 t})}$$

Tracé



Corrigé 02 :

1. $e(t) = Ri(t) + v_s(t)$

$$v_s(t) = L\frac{di(t)}{dt} \Rightarrow i(t) = \frac{1}{L}\int v_s(t)dt$$

$$e(t) = \frac{R}{L}\int v_s(t)dt + v_s(t) \Rightarrow E(p) = \frac{R}{Lp}V_s(p) + V_s(p)$$

$$\Rightarrow E(p) = (\frac{R}{Lp}+1)V_s(p)$$

$$\Rightarrow \frac{V_s(p)}{E(p)} = \frac{1}{1+\frac{R}{Lp}} = \frac{\frac{L}{R}p}{1+\frac{L}{R}p}$$

Donc $H(p) = \dfrac{V_s(p)}{E(p)} = \dfrac{\frac{L}{R}p}{1+\frac{L}{R}p}$ avec k=1 et $\tau_1 = \dfrac{L}{R}$ et $\tau_2 = \dfrac{L}{R}$.

Réponse 03 : Voir le cours

Réponse 04 :

Rappel sur les systèmes du 1ier ordres généralisés

Un système de 1er ordre généralisé est décrit par l'équation différentielle suivante :

$$\tau_2 \frac{ds}{dt} + s(t) = k[\tau_1 \frac{de(t)}{dt} + e(t)]$$

$$\Rightarrow \tau_2 p Y(p) + Y(p) = k[\tau_1 p E(p) + E(p)]$$

$$\Rightarrow Y(p)[\tau_2 p + 1] = kE(p)[\tau_1 p + 1]$$

$$\Rightarrow \boxed{H(p) = \frac{Y(p)}{E(p)} = k(\frac{1+\tau_1 p}{1+\tau_2 p})}$$

Soit $\tau_1 = \alpha\tau_2$; alors $\boxed{H(p) = k(\frac{1+\alpha\tau_2 p}{1+\tau_2 p})}$

$e(t) = v(t) + s(t)$

$E(p) = V(p) + S(p)$ avec $Z(p) = \frac{R_1}{1+R_1 Cp}$, $I(p) = \frac{S(p)}{R_2}$ et $V(p) = Z(p)I(p)$

$$E(p) = (\frac{Z(p)}{R_2} + 1)S(p)$$

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{R_2}{R_2 + Z(p)} = \frac{R_2}{R_2 + \frac{R_1}{1+R_1 Cp}} = \frac{R_2(1+R_1 Cp)}{R_1 + R_2 + R_1 R_2 Cp}$$

$$\Rightarrow H(p) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1+R_1 Cp}{1+\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} Cp}$$

$k = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$; $\tau_1 = R_1 C$; $\tau_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C$

$\tau_1 = \alpha\tau_2 \Rightarrow \frac{\tau_1}{\tau_2} = \alpha = \frac{R_1 + R_2}{R_2} = 1 + \frac{R_1}{R_2} > 1$

Donc c'est un système de 1er ordre à avance de phase.

Réponse 05 :

$e(t) = R_1 i(t) + s(t)$

$I(p) = \frac{S(p)}{Z(p)}$ où $Z(p) = R_2 + \frac{1}{Cp} = \frac{R_2 Cp + 1}{Cp}$

$E(p) = (\frac{R_1}{Z} + 1)S(p)$

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{Z}{R_1 + Z} = \frac{\frac{R_2 Cp + 1}{Cp}}{R_1 + \frac{R_2 Cp + 1}{Cp}} = \frac{1 + R_2 Cp}{1 + (R_1 + R_2)Cp}$$

$$\Rightarrow H(p) = \frac{1 + R_2 Cp}{1 + (R_1 + R_2)Cp}$$

$\tau_1 = R_2 C$; $\tau_2 = (R_1 + R_2)C$

$\tau_1 = \alpha\tau_2 \Rightarrow \frac{\tau_1}{\tau_2} = \alpha = \frac{R_2}{R_1 + R_2} < 1$